# Matemáticas 1

## Cálculo diferencial

Dennis G. Zill
Warren S. Wright

# Matemáticas 1

## Cálculo diferencial

# Matemáticas 1

## Cálculo diferencial

**Dennis G. Zill**
Loyola Marymount University

**Warren S. Wright**
Loyola Marymount University

**Adaptación y revisión técnica:**
**Joel Ibarra Escutia**
Instituto Tecnológico de Toluca

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

**Director Higher Education:** Miguel Ángel Toledo Castellanos
**Editor sponsor:** Pablo E. Roig Vázquez
**Coordinadora editorial:** Marcela I. Rocha M.
**Editor de desarrollo:** Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
**Supervisor de producción:** Zeferino García García

**Traductores:** Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

**MATEMÁTICAS 1. Cálculo diferencial**

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

**ISBN 13: 978-607-15-0534-7**

Adaptación de la obra *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4a. edición, de Dennis G. Zill y Warren S. Wright.


ISBN: 978-607-15-0502-6

Traducido de la cuarta edición de *Calculus. Early transcendentals*.


ISBN: 978-0-7637-5995-7

1234567890 1098765432101

Impreso en México *Printed in Mexico*

# Prefacio

## ☰ Para el instructor

### Filosofía

En esta serie de *Matemáticas* he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un material que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

### Características de esta obra

***Secciones y ejercicios*** El material que se ha seleccionado para esta serie es actual. Los conjuntos de ejercicios se han organizado en problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones consideradas pertenecen al ámbito de la "vida real" en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han incluido problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. La serie completa (*Matemáticas 1*, *Matemáticas 2* y *Matemáticas 3*) contiene más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Piense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

Una característica sobresaliente de *Matemáticas 1*, *Cálculo diferencial*, es que se estudian los conceptos sobre los que se construye todo el cálculo: números reales, variable, función, límite y derivada, lo que permite analizar razones de cambio entre dos variables, noción de trascendental importancia en las aplicaciones de la ingeniería.

Esta asignatura contiene los conceptos básicos y esenciales para cualquier área de la ingeniería y contribuye a desarrollar en el estudiante un pensamiento formal y heurístico que le permitirá modelar fenómenos y resolver problemas.

En los apéndices se proporciona material de gran utilidad para los diferentes cursos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

***Características especiales*** Cada unidad empieza con una introducción al material referido y con las competencias específicas de esa unidad. En la parte final del libro el lector encontrará la

sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Evaluación diagnóstica* consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Cada unidad incluye la sección *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean un análisis informal dirigido directamente al estudiante. Este análisis varía desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

Asimismo, esta obra contiene un considerable número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

***Figuras, definiciones, teoremas*** Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, se ha adoptado un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de "figura 1.2.3" es

Unidad Sección de la unidad 1
↓ ↓
1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1 .2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en una unidad posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 3.5 se proporciona como FIGURA 3.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 3.5.1. También, en esta obra cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

## Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

# Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano,* con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En las primeras páginas encontrará la sección "Evaluación diagnóstica", que contiene 56 preguntas. Esta "prueba" es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en las páginas finales. Sin tomar en cuenta su "calificación", lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer "que se le pegue") mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

## PRÓLOGO A ESTA EDICIÓN

Vivimos tiempos de cambio, y la educación no es ajena a este proceso. Los planes de estudio de las instituciones de educación superior se renuevan constantemente para estar a la altura de las necesidades actuales, y se establecen nuevas metodologías que deben ser respaldadas con obras editoriales de calidad.

Como una contribución a esta revolución educativa se desarrolla esta obra, dirigida a alguna materia del área básica, cursada en las principales escuelas de ciencias e ingeniería.

Los libros elaborados cubren los planes de estudio más recientes que se imparten en los institutos tecnológicos.

Aunado a lo anterior, nuestros reconocidos autores siguen ofreciendo el estilo científico preciso y de fácil comprensión que ha caracterizado a cada una de las obras.

Entre las principales características de esta serie se pueden mencionar:

- Adaptación al nuevo modelo de competencias.
- Ejemplos y ejercicios renovados.
- Utilización de las tecnologías de información y comunicación (TIC).
- Notas históricas que fundamentan los conceptos básicos.
- Notación formal de fácil accesibilidad para los alumnos.
- Estructura que contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico para modelar fenómenos y resolver problemas.
- Actividades encaminadas al desarrollo de competencias genéricas, instrumentales, sistémicas y específicas.

**Joel Ibarra Escutia**
Instituto Tecnológico de Toluca

## ☰ Las competencias y el cálculo diferencial

Una de las características más sobresalientes de esta edición es que ha sido organizada para contribuir al desarrollo de competencias específicas, genéricas, instrumentales y sistémicas, listadas a continuación.

### Competencias específicas

UNIDAD 1 *Los números reales*
Comprender las propiedades de los números reales para resolver desigualdades de primero y segundo grados con una incógnita y desigualdades con valor absoluto, representando las soluciones en la recta numérica real.

UNIDAD 2 *Funciones*
Comprender el concepto de función real e identificar tipos de funciones, así como aplicar sus propiedades y operaciones.

UNIDAD 3 *Límite de una función*
Comprender el concepto de límite de funciones y aplicarlo para determinar de manera analítica la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, y mostrar gráficamente los diferentes tipos de discontinuidad.

UNIDAD 4 *La derivada*
Comprender el concepto de derivada para aplicarlo como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable con respecto a otra.

UNIDAD 5 *Aplicaciones de la derivada*
Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y variación de funciones, y el de diferencial en problemas que requieren aproximaciones.

### Competencias genéricas

- Procesar e interpretar datos.
- Representar e interpretar conceptos en diferentes formas: numérica, geométrica, algebraica, trascendente y verbal.
- Comunicarse en lenguaje matemático de manera oral y escrita.
- Modelar matemáticamente fenómenos y situaciones.
- Lograr un pensamiento lógico, algorítmico, heurístico, analítico y sintético.
- Potenciar las habilidades para el uso de tecnologías de la información.
- Resolver problemas.
- Analizar la factibilidad de las soluciones.
- Tomar decisiones.
- Reconocer conceptos o principios generales e integradores.
- Establecer generalizaciones.
- Argumentar con contundencia y precisión.
- Optimizar soluciones.

### Competencias instrumentales

- Capacidad de análisis y síntesis.
- Comunicación escrita.
- Habilidades básicas de manejo de la computadora.
- Solución de problemas.

### Competencias sistémicas

- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.
- Habilidades de investigación.
- Capacidad para aprender.
- Capacidad para generar nuevas ideas.
- Habilidad para trabajar en forma autónoma.
- Búsqueda de logros.

## Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta obra, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, *Baylor University*
Salvatore Anastasio, *SUNY*, *New Paltz*
Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Robert Brooks, *University of Utah*
Dietrich Burbulla, *University of Toronto*

David Burton, *Chabot College*
Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
Arthur Dull, *Diablo Valley College*
Hugh Easler, *College of William and Mary*
Jane Edgar, *Brevard Community College*
Joseph Egar, *Cleveland State University*
Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
Peter Frisk, *Rock Valley College*
Shirley Goldman, *University of California at Davis*
Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
Jean Holton, *Tidewater Community College*
Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut Slate University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*
Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*
Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University*, *Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Loyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

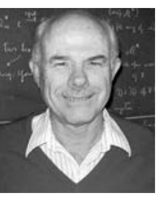
- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto compartido.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.

Dennis G. Zill



Warren S. Wright

# Agradecimientos especiales

La presente obra es una adaptación con un enfoque basado en competencias del libro *Cálculo. Trascendentes tempranas*, cuarta edición, cuya versión en español contó con la revisión técnica de

**Marlene Aguilar Ábalo**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Ciudad de México

**Crisanto Castillo Castillo**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Cuernavaca

**Fidel Castro López**
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional

**Rocío Cerecero López**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Cuernavaca

**Ramón Espinosa Armenta**
Instituto Tecnológico
Autónomo de México (ITAM)

**Eugenio L. Fautsch Tapia**
Facultad de Química,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

**José Job Flores Godoy**
Universidad Iberoamericana,
Ciudad de México

**Enrique Arturo Galván Flores**
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional

**Linda Margarita Medina Herrera**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Ciudad de México

**Santiago Neira Rosales**
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León

**Ignacio Ramírez Vargas**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Hidalgo

**Héctor Joé Rosas Toledo**
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

**Tonatihu Valdez Hernández**
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

# Contenido

## 1 Los números reales 1



## 2 Funciones 21

## 3 Límite de una función 87

## 4 La derivada 133

## 5 Aplicaciones de la derivada 211

## Apéndice Sucesiones y series 281

# Evaluación diagnóstica

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-1.

## *Como preparación para el cálculo*

### ≡ Matemáticas básicas

**1.** (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. __________

**2.** (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. __________

**3.** (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$. __________

**4.** (Falso/verdadero) $\dfrac{2^n}{4^n} = \dfrac{1}{2^n}$. __________

**5.** (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de $x^2$ es __________.

**6.** Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.

**7.** Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}2x + 2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

**8.** Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.

**9.** Resuelva las ecuaciones:

***a***) $x^2 = 7x$ ***b***) $x^2 + 2x = 5$ ***c***) $\dfrac{1}{2x - 1} - \dfrac{1}{x} = 0$ ***d***) $x + \sqrt{x - 1} = 1$

**10.** Factorice completamente:
***a***) $10x^2 - 13x - 3$
***b***) $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
***c***) $x^3 - 27$
***d***) $x^4 - 16$

### ≡ Números reales

**11.** (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. __________

**12.** (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. __________

**13.** (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\dfrac{-a}{a} < 0$. __________

**14.** (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ __________ o $x =$ _______.

**15.** (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ __________.

**16.** ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?

***a***) 0.25 ***b***) 8.131313 . . . ***c***) $\pi$

***d***) $\dfrac{22}{7}$ ***e***) $\sqrt{16}$ ***f***) $\sqrt{2}$

***g***) 0 ***h***) $-9$ ***i***) $1\frac{1}{2}$

***j***) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ***k***) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***l***) $\dfrac{-2}{11}$

**17.** Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.
*i*) $(2, 4]$ *ii*) $[2, 4)$ *iii*) $(2, 4)$ *iv*) $[2, 4]$
***a***) $|x - 3| < 1$ ***b***) $|x - 3| \leq 1$ ***c***) $0 \leq x - 2 < 2$ ***d***) $1 < x - 1 \leq 3$

**18.** Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como

***a***) una desigualdad y ***b***) una desigualdad que implique valores absolutos.

**19.** Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

**20.** Encuentre todos los números reales $x$ que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.

**21.** Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

**22.** Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \dfrac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

## ☰ Plano cartesiano

**23.** (Llene el espacio en blanco) Si $(a, b)$ es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el ___________ cuadrante.

**24.** (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es ___________.

**25.** (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$___________ y $y_2 =$ ___________.

**26.** (Llene los espacios en blanco) El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:

***a***) simétrica con respecto al eje $x$. ___________

***b***) simétrica con respecto al eje $y$. ___________

***c***) simétrica con respecto al origen. ___________

**27.** (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones $x$ y $y$ de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, ___________ y ___________.

**28.** ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente $x/y$?

**29.** La coordenada $y$ de un punto es 2. Encuentre la coordenada $x$ del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.

**30.** Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.

**31.** Si los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

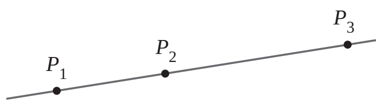



FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

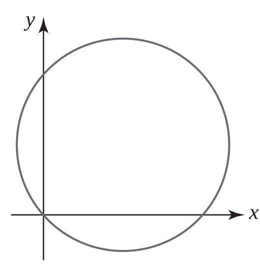



FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

**32.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$ representan constantes diferentes de cero.

***a***) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$

***b***) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$

***c***) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$

***d***) $ax^2 + ay^2 + c = 0$

***e***) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

## ☰ Rectas

**33.** (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. ___________

**34.** (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ ___________.

**35.** (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción $x$ $(-4, 0)$ e intersección $y$ $(0, 32)$ tiene pendiente ___________.

**36.** (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones $x$ y $y$ de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, ___________, ___________, y ___________.

**37.** (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente $-5$ e intersección $y$ $(0, 3)$ es ___________.

**38.** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

**39.** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (−3, 4) y (6, 1).

**40.** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

**41.** Una recta tangente a un círculo en un punto $P$ del círculo es una recta que pasa por $P$ y es perpendicular a la recta que pasa por $P$ y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente $L$ indicada en la FIGURA A.3.

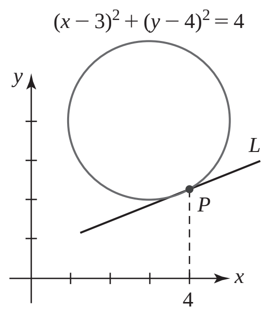
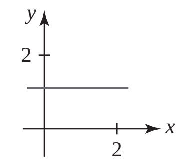


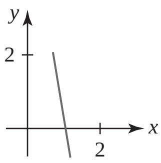

FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

**42.** Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

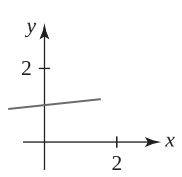
| | | |
|---|---|---|
| *i)* $x + y - 1 = 0$ | *ii)* $x + y = 0$ | *iii)* $x - 1 = 0$ |
| *iv)* $y - 1 = 0$ | *v)* $10x + y - 10 = 0$ | *vi)* $-10x + y + 10 = 0$ |
| *vii)* $x + 10y - 10 = 0$ | *viii)* $-x + 10y - 10 = 0$ | |



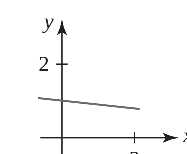

**b)**



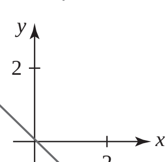

**c)**



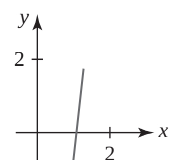

**d)**



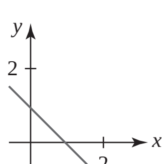

**e)**




**f)**




**g)**




**h)**

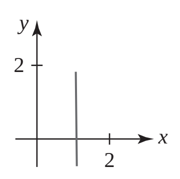



FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

## ≡ Trigonometría

**43.** (Falso/verdadero) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. ___________

**44.** (Falso/verdadero) $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t$. ___________

**45.** (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a ___________ radianes.

**46.** (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a ___________ grados.

**47.** (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ ___________.

**48.** Encuentre $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo $t$ está en el segundo cuadrante.

**49.** Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ dado en la FIGURA A.5.

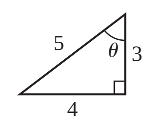



FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

**50.** Exprese las longitudes $b$ y $c$ de la FIGURA A.6 en términos del ángulo $\theta$.

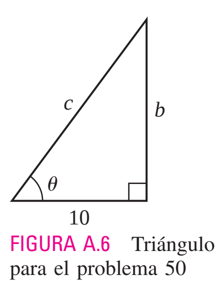



FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

## Logaritmos

**51.** Exprese el símbolo $k$ en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.

**52.** Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.

**53.** Exprese $\log_b 5 + 3\log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.

**54.** Use una calculadora para evaluar $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.

**55.** (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} =$ __________.

**56.** (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$. __________

# Ensayo

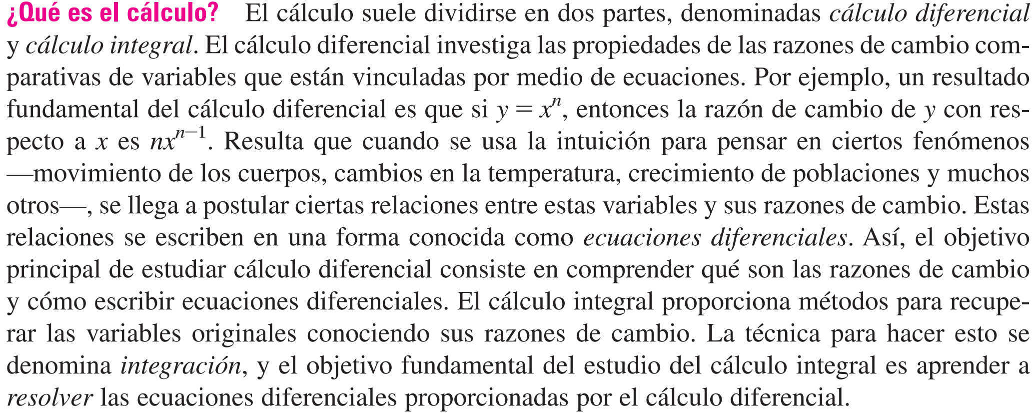
## La historia del cálculo

Por Roger Cooke
*University of Vermont*

Isaac Newton

Gottfried Leibniz

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.



**¿Qué es el cálculo?** El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de $y$ con respecto a $x$ es $nx^{n-1}$. Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo,

estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

**Las fuentes geométricas del cálculo** Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco “infinitesimal”

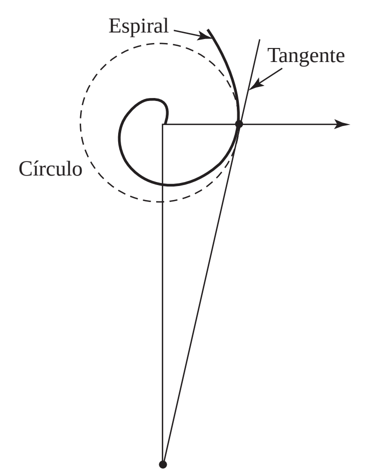



FIGURA 1 *La espiral de Arquímedes.* La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva "infinitamente próximos" entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza "infinitamente corta" de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases "infinitamente próximos" e "infinitamente cortos".

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos "infinitamente próximos", al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas $x_0$ y $x_1$, de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas $x$. Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)$, de modo que $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en $y$; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en $x$; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto $(x_1, y_1)$ está infinitamente cerca del punto $(y_1, y_0)$ sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

**La invención del cálculo** A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje $x$. La proyección sobre el eje $x$ de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje $x$ se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangen*te [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] *es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}r^3 + \cdots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* ($x$) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* ($x$) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso

sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta "rectificación" de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación $dx$ y $dy$ que sigue en uso. Para él, $dx$ era una abreviación de "diferencia en $x$", y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de $x$. En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que $dx$ era un número "infinitesimal", diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así $dy/dx$ era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos "infinitamente delgados" de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal $dx$. Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto $x$ era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x)\,dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la $S$ alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x)\,dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x)\,dx, \qquad dA = f(x)\,dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5\cos^5\theta} - \cdots\right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si $\theta$ no es mayor que 45°. Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para $\arctan x$.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura $h$ en un círculo de diámetro $d$; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\frac{d}{2}\operatorname{arcsen}\frac{h}{d}\right)^2$. Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L´Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito,* de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

**El legado del cálculo** Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real $x$ se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una "suma de diferencias infinitesimales" o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la $dx$ de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al "sumar" sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideano. En su *Principia Mathematica* escribió:

> Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

> . . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como “fantasmas de cantidades”. Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque “epsilon-delta” de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado “análisis no estándar”, no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

## Ejercicios

**1.** El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es $v$, el punto está a una distancia $vt$ del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante $t$. Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es $\omega$ (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio $R$ y una velocidad radial de $v$, ¿cuál debe ser $\omega$ para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? *Res.* $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\,\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

**2.** La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro $AB$ está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo $DBG$ genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:

***a*)** Si $B$ se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro $K$ del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de $B$.

***b*)** Cada sección del cilindro perpendicular a la recta $AB$, permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto $C$.

***c*)** Por tanto, el cilindro concentrado en $K$ equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en $C$.

***d*)** En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.

***e*)** Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.

***f*)** Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

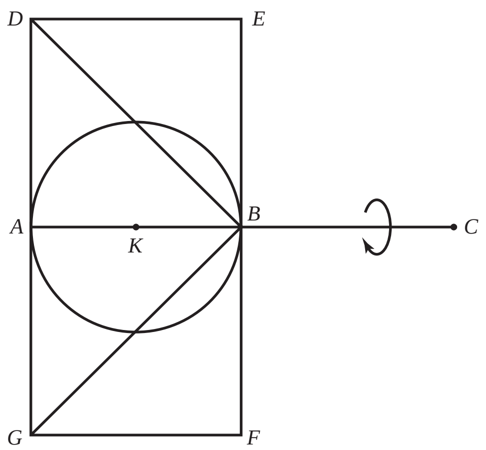



FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

**3.** El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia $h$ debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

***a***) Si el radio de la esfera es $r$, el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.

***b***) Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

***c***) La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.

***d***) En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.

***e***) Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.

***f***) En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

**4.** Proporcione un razonamiento “infinitesimal” de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides “infinitamente delgadas” donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [*Sugerencia*: parta del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

# Los números reales

**En esta unidad** Una de las herramientas más poderosas de las matemáticas es el cálculo. Su evolución ha ocurrido de manera paralela a los diferentes sistemas numéricos, desde los primeros conteos hasta la era tecnológica. El cálculo fundamenta su estudio en las propiedades de los números reales. En esta unidad estudiaremos los axiomas fundamentales, los de orden y los de completitud como preámbulo para otras aplicaciones más complejas.

## Competencia específica

Comprender las propiedades de los números reales para resolver desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita y desigualdades con valor absoluto, representando las soluciones en la recta numérica real.

# 1.1 Los números reales

Hoy en día la ciencia y la tecnología han alcanzado niveles extraordinarios. El desarrollo de la física, la química, la biología, la astronomía, la medicina, la ingeniería y muchas ramas más, fundamentan su progreso en la aplicación de una de las herramientas más poderosas de las matemáticas: el *cálculo infinitesimal*.

En términos históricos el desarrollo del cálculo se produjo al buscar soluciones a problemas de la vida real, entre los más conocidos podemos mencionar:

- Describir la velocidad de una partícula con velocidad constante.
- Determinar la ecuación de la tangente a una curva en un punto.
- Analizar la razón de cambio entre dos variables.
- Calcular el área de una superficie y el volumen de un sólido.

El cálculo sustenta su estudio en el conjunto de los números reales, por esta razón es necesario conocer sus axiomas y sus principales propiedades.

Existen diversas maneras de iniciar el estudio del sistema de los números reales, pero una de las más utilizadas considera los sistemas numéricos más sencillos, el primero de ellos es el conjunto de los *números naturales*.

## Definición del conjunto de números naturales

El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$, y se define como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Una de las primeras aplicaciones de las matemáticas en la vida real ha sido el conteo y los números naturales han sido la herramienta. Entre las propiedades más importantes de este conjunto podemos mencionar la existencia de un orden, la existencia del 1 como primer elemento, que todo número natural tiene otro como sucesor y que todo número natural, excepto el número 1, tiene otro número natural como antecesor. En términos formales se tiene:

### Propiedades de los números naturales

1. $1 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $k \in \mathbb{N}$ se define su sucesor como $k + 1$ y además $k + 1 \in \mathbb{N}$.
3. Si $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, se define su antecesor como $k - 1$ y además $k + 1 \in \mathbb{N}$.

En $\mathbb{N}$ se definen dos operaciones: la suma y el producto. Se verifica que ambas operaciones son cerradas, conmutativas y asociativas, la suma distribuye respecto al producto. El número natural 1 es el neutro multiplicativo. Sin embargo, estas propiedades no son suficientes para describir algunos fenómenos físicos, por ejemplo, las temperaturas bajo cero, las altitudes por debajo del mar o la distancia entre dos puntos iguales; en concreto, carecen de un elemento neutro aditivo y de inversos aditivos.

Los números naturales están contenidos en los números enteros $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Un conjunto "más grande" que resuelve este inconveniente se define como el conjunto de los números enteros.

## Definición del conjunto de los números enteros

Se define el conjunto de los números enteros como

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

La resta de dos números es una operación derivada de la suma, y se define como la suma de un número con el inverso aditivo de otro.

En $\mathbb{Z}$ también están definidas las operaciones de suma y producto que son, de nueva cuenta, cerradas, conmutativas y asociativas, también se verifica la propiedad distributiva de la suma, existe el elemento neutro multiplicativo, pero además se agregan el "cero" como elemento neutro aditivo y los "números negativos" como inversos aditivos. Estas propiedades permiten la defi-

nición de la resta como una operación derivada de sumar un número con el inverso aditivo de otro, es decir $x - y = x + (-y)$.

No obstante lo anterior, la solución a problemas elementales como repartir una naranja entre dos personas o describir qué parte representa un minuto de una hora, o simplemente para dar el resultado exacto de dividir 46 dulces entre 5 niños, no pueden resolverse en términos de números naturales ni de números enteros. Se hace necesaria, entonces, la introducción de los números fraccionarios, también conocidos como los números racionales que tienen otras propiedades de mayor aplicación.

La definición antigua de la unidad fundamental de longitud, como la diezmillonésima parte del meridiano terrestre a lo largo de un cuadrante, es un ejemplo de número racional.

## Definición del conjunto de los números racionales

Se define el conjunto de los números racionales como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

**EJEMPLO 1** Algunos números racionales

Los siguientes son ejemplos de números racionales.

La letra $\mathbb{Q}$ se tomó originalmente de la palabra "cociente" en inglés.

1. $\frac{1}{5}, \frac{4}{9}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{3}{11}, \frac{4}{-13}$
2. Cualquier número natural.
3. Cualquier número entero.
4. Cualquier expansión decimal finita como 0.25, 3.1, −7.05, 1.1
5. Cualquier expansión decimal infinita periódica, por ejemplo

   $3.\overline{4} = 3.44444444444\ldots, -52.\overline{04} = -52.040404040404\ldots.$

   $5.\overline{123} = 5.123123123\ldots$ (la línea arriba de los dígitos indica que se repiten infinitamente). ■

Los números racionales históricamente se definen como cocientes de números enteros, la condición es que el denominador sea diferente de cero. Dado que todo número entero $n$ puede expresarse como el cociente $\frac{n}{1}$, entonces se considera que todo número entero es un número racional. Es decir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Todo número entero puede expresarse como el cociente de él mismo y del 1, de manera que todo entero es un número racional.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Todas las propiedades de los enteros siguen siendo válidas en $\mathbb{Q}$, pero además se verifica la existencia de los inversos multiplicativos para cualquier número racional, excepto el cero. Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ el inverso multiplicativo se define por $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ y satisface $\frac{a}{b}\,\frac{b}{a} = 1$. Se define la división de dos números como el producto de uno por el inverso de otro distinto de cero, esto es $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \neq 0$, se define el inverso multiplicativo $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ y satisface $\frac{a}{b}\,\frac{b}{a} = 1$.

Dado un número racional $\frac{a}{b}$ es posible realizar la división de $a$ entre $b$, para obtener como resultado un número decimal. El teorema 1.1.1, presentado sin demostración, expresa las opciones de este resultado.

**Teorema 1.1.1** Todo número racional puede expresarse como una expansión decimal finita o como una expansión decimal infinita periódica.

**EJEMPLO 2** Una expansión decimal finita es un número racional

Demostrar que la expansión decimal 0.14 es un número racional.

**Solución**

Si $x = 0.14$, entonces

$x = 0.14$ ← multiplicar por $10^2$

$100x = 14$ ← despejar

$$x = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$ ■

**EJEMPLO 3** Otra expansión decimal finita que es un número racional

Demostrar que la expansión decimal 0.2124 es un número racional.

**Solución**

Si $x = 0.2124$, entonces

$x = 0.2124$ ← multiplicar por $10^4$

$10\,000x = 2\,124$ ← despejar

$$x = \frac{2\,124}{10\,000} = \frac{531}{2\,500}$$ ■

En general, dada la expansión decimal finita $0.a_1a_2a_3 \ldots a_n$ se supone

$x = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_n$ ← multiplicar por $10^n$

$10^n x = a_1a_2a_3 \ldots a_n$ ← despejar $x$

$$x = \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n}$$ ■

**EJEMPLO 4** Una expansión decimal infinita periódica es un número racional

Demostrar que la expansión decimal infinita $0.543543543543 \ldots = 0.\overline{543}$ es un número racional.

**Solución**

Sea $x = 0.\overline{543} = 0.543543543543 \ldots$, entonces

$x = 0.543543543543 \ldots$ ← multiplicar por $10^3$

$10^3 x = 543.543543543543 \ldots$ ← restar a esta nueva expresión la anterior

$$\begin{array}{r} 10^3 x = 543.543543543543 \ldots \\ x = 0.543543543543 \ldots \\ \hline 999x = 543 \end{array}$$ ← despejar

$$x = \frac{543}{999}$$ ■

**EJEMPLO 5** Una expansión decimal infinita periódica es un número racional

Demostrar que la expansión decimal infinita $0.1241414141 \ldots = 0.12\overline{41}$ es un número racional.

**Solución**

Sea $x = 0.12\overline{41} = 0.1241414141 \ldots$, entonces

$x = 0.1241414141 \ldots$ ← multiplicar por $10^4$ y por $10^2$

$10^4 x = 1\,241.41414141 \ldots$

$10^2 x = 12.41414141 \ldots$ ← restar estas ecuaciones

$$10^4x = 1241.41414141\ldots$$
$$10^2x = 12.41414141\ldots \qquad \leftarrow \text{despejar}$$
$$9\,900x = 1\,229$$
$$x = \frac{1\,229}{9\,900}$$

■

Dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible determinar un nuevo número racional comprendido entre ellos, esto puede realizarse tantas veces como se desee; por ejemplo, entre los racionales $m$ y $n$ se encuentra el número racional $(m+n)/2$. Sin embargo, los números racionales no “llenan” toda la recta numérica.

Al intentar responder preguntas como: ¿cuál es la longitud de la arista de un cuadrado que tiene área 2? o ¿cuál es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su radio?, encontramos que las respuestas $\sqrt{2}$ y $\pi$, respectivamente, no pueden expresarse como un número racional (vea los problemas 23 y 24 de la sección 1.4). Números de este tipo se conocen como irracionales y gráficamente se “intercalan” en toda la recta numérica en los “huecos” que existen entre los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$.

Una de las primeras aplicaciones de los números racionales fue construir números irracionales, esto después de un sofisticado proceso.

La necesidad de utilizar números irracionales se presentó en algunos problemas de geometría en la Grecia antigua; sin embargo, fue hasta el siglo XIX que se obtuvieron avances significativos gracias a los estudios realizados por Karl Weierstrass, George Cantor y Richard Dedekin. La construcción total se dio a partir de los axiomas que estableció Giuseppe Peano en 1889.

Los números irracionales son todos aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, o bien como aquellos números que tienen una expansión decimal *infinita no periódica*. En ocasiones basta entender que los irracionales son un conjunto disjunto de los racionales.

## Definición del conjunto de números irracionales

Se define el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ como el conjunto de todos los números que no son racionales.

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ es una expansión decimal infinita no periódica}\}$$

**EJEMPLO 6** Algunos números irracionales

Algunos números irracionales son:

1. $e$
2. $\pi$
3. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt{p}$, con $p$ número primo.
5. $a+\sqrt{p}$, si $a$ es un número racional y $p$ un número primo. ■

**EJEMPLO 7** Otros números irracionales

Un número primo sólo es divisible por él mismo y por la unidad, los números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, . . . El número $\sqrt{p}$ es irracional siempre que $p$ sea un número primo.

Se deja como ejercicio al lector determinar cuáles propiedades de los racionales se satisfacen para los irracionales. No todas las propiedades siguen siendo válidas; por ejemplo, podemos mencionar que la suma no es cerrada, basta considerar que $-2+\pi$ y $7-\pi$ son dos números irracionales que sumados resultan un número entero.

Ya estamos en condiciones de obtener la definición de un conjunto más general, el conjunto de los números reales.

## Definición del conjunto de números reales

Se define al conjunto de los números reales como la unión disjunta de números racionales e irracionales. Es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Es importante observar que los racionales y los irracionales son conjuntos disjuntos, esto es, que dado un número real o está en $\mathbb{Q}$ o está en $\mathbb{I}$ pero nunca en ambos. Además se verifican las contenciones propias

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

# 1.2 Los números reales y la recta numérica

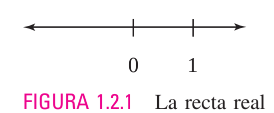


FIGURA 1.2.1 La recta real

Los números reales se pueden representar gráficamente como puntos sobre una línea recta conocida como la *recta real*. Sobre esta recta se fijan dos puntos representados por 0 y 1. Estos dos puntos permiten construir todos los demás, ya que para representar cualquier número real $x$ se toma un segmento de longitud $x$ a la derecha del cero si $x$ es positivo o a la izquierda si $x$ es negativo.

El extremo de este segmento es el punto correspondiente al número $x$. El cero se conoce como origen de la recta real y el 1 como la escala. Por lo anterior, sobre la recta real se representan los reales positivos, el cero y los reales negativos, y se verifica una regla de correspondencia: cada punto de la recta corresponde a un número real y cada número real lo podemos representar como un punto de esta recta. La recta real se muestra en la FIGURA 1.2.1.

Los números definidos a la derecha del cero se conocen como reales positivos y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. De manera análoga, se define $\mathbb{R}^-$ como el conjunto de todos los reales a la izquierda del cero.

El conjunto de los números reales es un conjunto denso.

Otra propiedad importante de los números reales es que entre dos números reales diferentes cualesquiera, sin importar cuán cercanos estén, siempre existe otro número real y, en consecuencia, entre dos números reales cualesquiera diferentes, siempre existe una infinidad de números reales. A diferencia de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$ los reales no contienen "huecos". En términos matemáticos se dice que el conjunto de los números reales es un *conjunto denso*.

# 1.3 Propiedades de los números reales

El sistema de los números reales es uno de los pilares fundamentales en el desarrollo de las matemáticas a cualquier nivel, existen muchos resultados que muestran su importancia histórica. No obstante, la presente obra no realiza un estudio más profundo de este conjunto numérico y simplemente se establece el conjunto de axiomas a partir de los cuales se derivan todas las propiedades utilizadas en un curso básico de cálculo.

## Axiomas de los números reales

Dados dos números reales cualesquiera $x$ y $y$ se define la suma $x + y \in \mathbb{R}$ y el producto $xy \in \mathbb{R}$, que satisfacen los siguientes axiomas:

**Axioma 1** Propiedad conmutativa de la suma

$$x + y = y + x$$

**Axioma 2** Propiedad asociativa de la suma

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

**Axioma 3** Existencia del neutro aditivo

$$\text{Existe el } 0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + 0 = x.$$

**Axioma 4** Existencia de inversos aditivos

Para todo número real $x$ existe $-x \in \mathbb{R}$, tal que $x + (-x) = 0$.

**Axioma 5** Propiedad conmutativa del producto

$$xy = yx$$

**Axioma 6** Propiedad asociativa del producto

$$x(yz) = (xy)z$$

**Axioma 7** Existencia del neutro multiplicativo

Existe el $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = x$.

**Axioma 8** Existencia de inversos aditivos

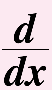
Para todo número real distinto de cero $x$ existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

**Axioma 9** Propiedad distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

Todas las propiedades conocidas de los números reales pueden demostrarse a partir de los axiomas anteriores, por esta razón se dice que la teoría de los números reales es una *teoría axiomática*.

La teoría de los números reales es una teoría axiomática.



## NOTAS DESDE EL AULA

Si existiera la división entre 0 . . .

¿En dónde está el error del siguiente desarrollo?

Supongamos que es un número real **distinto** de cero.

| | |
|---|---|
| Entonces sea | $x = y \neq 0$ |
| Multiplicar la ecuación por $x$ | $x^2 = xy$ |
| Restar $y^2$ en ambos lados | $x^2 - y^2 = xy - y^2$ |
| Factorizar | $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ |
| Despejar | $\dfrac{(x + y)(x - y)}{(x - y)} = y$ |
| Cancelar | $\dfrac{(x + y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} = y$ |
| | $x + y = y$ |
| Y como inicialmente $x = y$ | $y + y = y$ |
| Se tiene | $2y = y \quad \Rightarrow \quad 2 = \dfrac{y}{y} = 1 \quad ?$ |

¿Qué ocurrió?

Los axiomas de los números reales permiten definir operaciones complementarias como la diferencia de dos números y el cociente de dos números.

## Definición de resta y división de números reales

Se define la resta y la división de números reales como sigue:

*a*) $x - y = x + (-y)$

*b*) $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, siempre que $y \neq 0$

## Propiedades de orden de los números reales

En los números reales se define una relación de orden $<$, que satisface los siguientes axiomas:

### Axiomas de orden en $\mathbb{R}$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

**Ley de tricotomía:** Dados dos números reales cualesquiera uno es mayor que otro o son iguales.

**Axioma 10** Ley de tricotomía

Se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

**Nota:** $x > y$ significa $y < x$

**Axioma 11** Si $y < x$, entonces $y + z < x + z$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$

**Axioma 12** Si $0 < y$ y $0 < x$, entonces $0 < xy$

**Axioma 13** Propiedad de transitividad

Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$

### Definición de los símbolos de desigualdad estricta $<$ y $>$

Los símbolos $<$ y $>$ se conocen como símbolos de desigualdad estricta y se leen "menor que" y "mayor que".

### Definición de los símbolos de desigualdad no estricta $\leq$ y $\geq$

Los símbolos $\leq$ y $\geq$ se conocen como símbolos de desigualdad no estricta y se leen "menor o igual que" y "mayor o igual que".

La expresión $y \leq x$ abrevia los casos $y < x$ o $y = x$.

La expresión $y \geq x$ abrevia los casos $y > x$ o $y = x$.

En el teorema 1.3.1 se muestran otras propiedades de orden.

**Teorema 1.3.1** Otras propiedades de orden

1. Si $y < x$ y $0 < z$, entonces $yz < xz$
2. Si $y < x$ y $z < 0$, entonces $yz > xz$
3. Si $0 < x$ y $0 < y$, entonces $0 < x + y$
4. Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $y + w < x + z$
5. Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $yw < xz$

**DEMOSTRACIÓN 1** Si $y < x$, entonces por el axioma 11 $y - y < x - y$, es decir, $0 < x - y$, y si $0 < z$ por el axioma 12 se cumple $0 < (x - y)z$, luego $0 < xz - yz$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos $yz < xz - yz + yz$, donde finalmente $yz < xz$. ■

**DEMOSTRACIÓN 2** Si $y < x$ y $z < 0$, entonces $0 < x - y$ y $0 < -z$, por el axioma 12 se cumple $0 < (x - y)(-z)$, luego $0 < -xz + yz$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos $xz < yz$. ■

**DEMOSTRACIÓN 3** Si $0 < x$ y $0 < y$, entonces por el axioma 11 si $0 < x$ y $0 + x < x + y$,

por tricotomía (axioma 10) se tiene $0 < x + y$. ■

**DEMOSTRACIÓN 4** Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $0 < x - y$ y $0 < z - w$, por el inciso 3 de este teorema se tiene $0 < (x - y) + (z - w)$ luego $0 < x + z - (y + w)$. Por último $y + w < x + z$. ■

**DEMOSTRACIÓN 5** Si $0 < y < x$ y $0 < w < z$, entonces $yw < xw$ y $wx < xz$. Por tricotomía se concluye la demostración. ■

## El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado

Los axiomas de orden inducen de manera natural un orden en el conjunto de los números reales, y se tiene la siguiente convención:

1. $y < x$ si y sólo si $0 < x - y$
2. $y = x$ si y sólo si $0 = x - y$
3. $y \leq x$ si y sólo si $0 \leq x - y$

En la recta real la desigualdad $y < x$ se representa como un número $y$ a la izquierda de un número $x$ (FIGURA 1.3.1).

En otras palabras, se dice que un número $x$ es mayor que otro número $y$ si y sólo si la diferencia $x - y$ es un número real positivo. De la misma manera se dice que un número $x$ es menor que otro número $y$ si y sólo si la diferencia $x - y$ es un número real negativo. Se dice que los números son iguales si la diferencia $x - y$ es cero.

Lo anterior define un orden de manera natural en el conjunto de los números reales, porque para saber cuál es la ubicación correcta de un número basta compararlo con el cero.

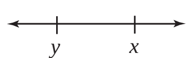



FIGURA 1.3.1 Representación gráfica de $y < x$.

## Ínfimo y supremo

Introducimos las siguientes cuatro definiciones antes de presentar un último axioma de los números reales que estudiaremos en esta sección:

**Definición de cota superior** Sea $A \subset \mathbb{R}$, si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ para todo $a \in A$, entonces $x$ se llama una *cota superior* de $A$ y se dice que el conjunto $A$ está acotado *por arriba* o que $A$ está acotado *superiormente*.

**Definición de cota inferior** Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < a$ para todo $a \in A$, entonces $x$ se llama una *cota inferior* de $A$ y se dice que el conjunto $A$ está acotado por abajo o que $A$ está acotado *inferiormente*.

**Definición de supremo de un conjunto** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado por arriba y supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- $x$ es una cota superior de $A$.
- Si $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior de $A$, entonces $x \leq y$.

Entonces $x$ se dice el *supremo* de $A$ y tiene la propiedad de ser "la menor de todas las cotas superiores".

Si existen, el ínfimo y el supremo de un conjunto son únicos.

**Definición de ínfimo de un conjunto** Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado por abajo y supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- $x$ es una cota inferior de $A$.
- Si $y \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de $A$, entonces $y \leq x$.

Entonces $x$ se dice el ínfimo de $A$ y tiene la propiedad de ser "la mayor de todas las cotas inferiores".

Ya se tienen las condiciones para poder enunciar un último axioma de los números reales, conocido como el *axioma de complitud* o de *completitud*:

### Axioma de completitud

**Axioma 14** Axioma de completitud

1. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por arriba tiene un supremo.
2. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por abajo tiene un ínfimo.

Los números reales forman un conjunto denso.

Como un conjunto de números reales puede constar de un solo número real, se verifica por el axioma 14 que los reales son densos.

## 1.4 Intervalos en $\mathbb{R}$

Al utilizar una variable en cualquier problema de aplicación es necesario definir el subconjunto de números reales que le corresponde como conjunto de sustitución. Sin lugar a dudas, unos de los subconjuntos más importantes en $\mathbb{R}$ son los intervalos y son definidos a continuación:

### Definición de intervalo en $\mathbb{R}$

Se definen los siguientes subconjuntos de números reales, conocidos como intervalos reales:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Intervalo abierto | $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ |
| 2. | Intervalo cerrado | $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ |
| 3. | Intervalos mixtos | $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ |
| | | $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ |
| 4. | Intervalos infinitos | $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ |
| | | $(-\infty, b) = \{x \mid x \leq b\}$ |
| | | $[a, \infty) = \{x \mid a < x\}$ |
| | | $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$ |
| 5. | Los números reales | $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ |

En la FIGURA 1.4.1 se pueden observar las representaciones gráficas de los diferentes tipos de intervalos. Algunos autores denotan los extremos de un intervalo abierto con puntos "huecos" y los extremos de un intervalo cerrado con puntos "sólidos".

**EJEMPLO 8** Operaciones con intervalos

Determine el conjunto de números reales definido por $(-2, 16] \cap [12, 20)$ y por $(-2, 16] \cup [12, 20)$.

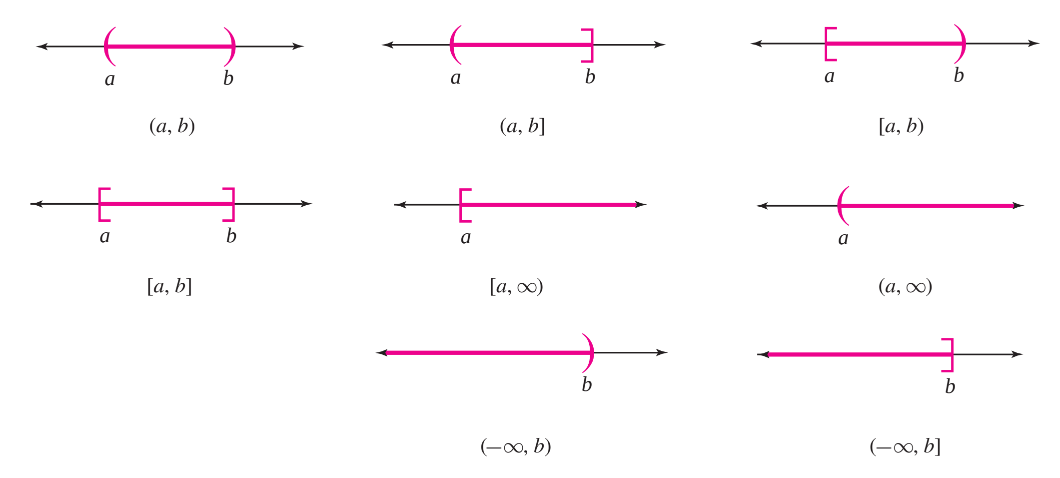



FIGURA 1.4.1 Intervalos reales

**Solución** Los intervalos son conjuntos, de manera que al utilizar operaciones de conjuntos, se tiene:

$$(-2, 16] \cap [12, 20) = \{x|-2 < x \leq 16\} \cap \{x|\,12 \leq x < 20\} = \{x|\,12 \leq x \leq 16\} = [12, 16]$$

$$(-2, 16] \cup [12, 20) = \{x|-2 < x \leq 16\} \cup \{x|\,12 \leq x < 20\} = \{x|-2 < x < 20\} = (-2, 20)$$

−2 12 16 20

FIGURA 1.4.2

Los resultados gráficos se observan en la FIGURA 1.4.2. ■

## 1.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

**1.** Demuestre que la división entre cero no existe.

En los ejercicios 2 a 9 exprese los racionales dados en forma decimal.

**2.** $\frac{5}{6}$ **3.** $\frac{21}{4}$

**4.** $\frac{14}{3}$ **5.** $-\frac{4}{17}$

**6.** $\frac{11}{14}$ **7.** $\frac{123}{100}$

**8.** $\frac{32}{41}$ **9.** $\frac{1}{20}$

En los ejercicios 10 a 21 escriba los números decimales dados, si es posible, en forma de fracción.

**10.** 0.123321123321 . . . **11.** 3.141615

**12.** 0.12121212121 . . . **13.** 0.25555555 . . .

**14.** 2.213213 **15.** 5.71715

**16.** 0.0144444 . . . **17.** 0.0134134134 . . .

**18.** 1.3132313231 . . . **19.** 0.123123123123 . . .

**20.** 0.123456789123456 . . . **21.** 4.022022022 . . .

**22.** Determine el menor natural, el menor entero positivo, el menor racional positivo y el menor irracional positivo.

**23.** Demuestre que $\pi$ es irracional.

**24.** Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

**25.** Demuestre que la raíz cuadrada de un número primo es irracional.

**26.** Determine un racional que aproxime a $\pi$.

**27.** Demuestre que si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{Q}$.

**28.** Justificar si la suma de dos irracionales es un irracional.

**29.** Demuestre que si $x, z \in \mathbb{Q}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < z$.

**30.** Demuestre que si $x, z \in \mathbb{I}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{I}$ tal que $x < y < z$.

**31.** Demuestre que si $x, z \in \mathbb{R}$, $x < z$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y < z$.

**32.** Dados $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ ordenar los números $x$, $y$, $\sqrt{xy}$, $\frac{x+y}{2}$.

En los ejercicios 33 a 38 determine si el resultado es un número racional o irracional.

**33.** $(\sqrt{3} + 1)^2$ **34.** $(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 4)$

**35.** $\sqrt{\pi}$ **36.** $(\sqrt{\pi} + \pi)^2$

**37.** $\pi^2$ **38.** $(1 + \sqrt{5})^4$

**39.** Demuestre que si $x$ y $y$ son dos números pares, entonces $xy$ es otro número par.

**40.** Demuestre que si $x$ y $y$ son dos números impares, entonces $xy$ es otro número impar.

**41.** Demuestre que el cuadrado de un número par es otro número par.

**42.** Demuestre que el cuadrado de un número impar es otro número impar.

**43.** Demuestre que si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{I}$, entonces $xy \in \mathbb{I}$.

En los ejercicios 44 a 51 determine si existen el ínfimo y el supremo para cada uno de los conjuntos dados.

**44.** $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

**45.** $A = \{0, 4, 0, 49, 0.499, \ldots\}$

**46.** $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

**47.** $A = \{1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots\}$

**48.** $A = \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots\}$

**49.** $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

**50.** $A = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}\}$

**51.** $A = \{x | x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

En los ejercicios 52 a 59 represente gráficamente cada uno de los intervalos dados.

**52.** $(3, 8)$ **53.** $(-10, -2]$

**54.** $[1, 6.5]$ **55.** $[-2, 14)$

**56.** $(-\infty, -1)$ **57.** $(-\infty, 0]$

**58.** $(1, \infty)$ **59.** $[-9, \infty)$

En los ejercicios 60 a 72, realice las operaciones con intervalos indicadas.

**60.** $(2, 12] \cup (-7, 8)$ **61.** $(-\infty, 2] \cup (-4, 10)$

**62.** $(-\infty, 5] \cup (2, \infty)$ **63.** $(-9, 9] \cap (-3, 3)$

**64.** $\big[[0, 2] \cap (-2, 1]\big]^c$ **65.** $(-\infty, 1) \cap (-4, 10]$

**66.** $\big((1, 9] \cup (-2, 4)\big) \cap [0, 2)$

**67.** $\big((1, 3] \cap (-4, 0)\big)^c$ **68.** $[-5, \infty] - (4, 12)$

**69.** $\mathbb{R} - \big((1, 5] \cup (-1, 8)\big)$ **70.** $\mathbb{R} - (-\infty, 3)$

**71.** $\big((0, 4] \cup (-3, 3)\big) - [2, 5)$

**72.** $\big((-8, 4] \cup (-3, 1)\big) \cap [2, 6)$

# 1.5 Desigualdades y valor absoluto

En esta sección estudiaremos dos conceptos fundamentales en el cálculo infinitesimal, el concepto de desigualdad (o inecuación) y el concepto de valor absoluto.

## Definición de desigualdad en una variable

Una desigualdad en una variable es una expresión de la forma $f(x)\ \Delta\ 0$, donde $\Delta$ es alguna de las relaciones de orden $<, >, \leq, \geq$.

Por resolver una desigualdad se entiende determinar el intervalo o combinación de intervalos (de números reales) cuyos elementos satisfacen la desigualdad.

Para resolver una desigualdad se utilizan los axiomas de los números reales como se ilustra en los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 1** Resuelva la desigualdad $2x + 4 < 6x + 1$

**Solución**

| | |
|---|---|
| $2x + 4 < 6x + 1$ | Por el axioma 11, restar 1 |
| $2x + 4 - 1 < 6x + 1 - 1$ | Simplificar |
| $2x + 3 < 6x$ | Por el axioma 11, restar $2x$ |
| $2x - 2x + 3 < 6x - 2x$ | Simplificar |
| $3 < 4x$ | Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por $\frac{1}{4}$ |
| $\left(\frac{1}{4}\right)3 < 4\left(\frac{1}{4}\right)x$ | Simplificar |
| $\frac{3}{4} < x$ | De manera equivalente |
| $x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ | ■ |

**EJEMPLO 2** Resuelva la desigualdad $-6x + 3 \leq -8x - 7$

**Solución**

| | |
|---|---|
| $-6x + 3 \leq -8x - 7$ | Por el axioma 11, sumar 7 |
| $-6x + 3 + 7 \leq -8x - 7 + 7$ | Simplificar |

| | |
|---|---|
| $-6x + 10 \le -8x$ | Por el axioma 11, sumar $6x$ |
| $-6x + 6x + 10 \le -8x + 6x$ | Simplificar |
| $10 \le -2x$ | Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, multiplicar por $-\frac{1}{2}$ |
| $\left(-\frac{1}{2}\right)10 \ge -2\left(-\frac{1}{2}\right)x$ | Simplificar |
| $-5 \ge x$ | De manera equivalente |
| $x \in (-\infty, -5]$ | |

■

**EJEMPLO 3** Resuelva la desigualdad $3 < (5x - 7)/2 \le 10$

**Solución**

| | |
|---|---|
| $3 < \dfrac{5x-7}{2} \le 10$ | Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por 2 |
| $6 < 5x - 7 \le 20$ | Por el axioma 11, sumar 7 |
| $6 + 7 < 5x - 7 + 7 \le 20 + 7$ | Simplificar |
| $13 < 5x \le 27$ | Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por $\frac{1}{5}$ |
| $13\left(\frac{1}{5}\right) < 5\left(\frac{1}{5}\right)x \le 27\left(\frac{1}{5}\right)$ | Simplificar |
| $\frac{13}{5} < x \le \frac{27}{5}$ | De manera equivalente |
| $x \in \left(\frac{13}{5}, \frac{27}{5}\right]$ | |

■

**EJEMPLO 4** Resuelva la desigualdad $-2 < (6 - 2x)/4 \le 5$

**Solución**

| | |
|---|---|
| $-2 < \dfrac{6-2x}{4} \le 5$ | Por el inciso 1 del teorema 1.3.1, multiplicar por 4 |
| $-8 < 6 - 2x \le 20$ | Por el axioma 11, restar 6 |
| $-8 - 6 < 6 - 6 - 2x \le 20 - 6$ | Simplificar |
| $-14 < -2x \le 14$ | Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, multiplicar por $-\frac{1}{2}$ |
| $-14\left(-\frac{1}{2}\right) > -2\left(-\frac{1}{2}\right)x \ge 14\left(-\frac{1}{2}\right)$ | Simplificar |
| $7 > x \ge -7$ | De manera equivalente |
| $-7 \le x < 7$ | En forma de intervalo |
| $x \in [-7, 7)$ | |

■

**EJEMPLO 5** Resolver la desigualdad $x^2 > 3x - 2$

**Solución** Al reescribir la desigualdad en la forma $x^2 - 3x + 2 > 0$, tenemos $(x - 1)(x - 2) > 0$.

Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es positivo, lo cual implica que los factores son del mismo signo.

Se tienen los siguientes casos.

**Caso 1** Si $(x - 1)(x - 2) > 0$

entonces $x - 1 > 0$ y $x - 2 > 0$

De donde $x > 1$ y $x > 2$

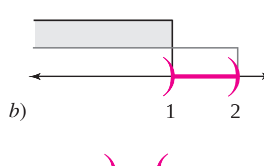





FIGURA 1.5.1

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$. Vea la FIGURA 1.5.1*a*).

**Caso 2** Si $(x - 1)(x - 2) > 0$

entonces $x - 1 < 0$ y $x - 2 < 0$.

De donde $x < 1$ y $x < 2$

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$. Vea la FIGURA 1.5.1*b*).

De manera que la solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. Es decir, la solución es el conjunto $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Vea la FIGURA 1.5.1*c*). ■

## EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

**Solución** Al considerar la desigualdad $x^2 - 2x - 8 \leq 0$, tenemos $(x - 4)(x + 2) \leq 0$

Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es menor o igual a cero, lo cual ocurre cuando los factores son de signos diferentes o cero.

Se tienen los siguientes casos.

**Caso 1** Si $(x - 4)(x + 2) \leq 0$

entonces $x - 4 \leq 0$ y $x + 2 \geq 0$.

De donde $x \leq 4$ y $x \geq -2$.

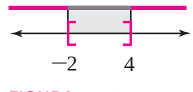



FIGURA 1.5.2

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, 4] \cap [-2, \infty) = [-2, 4]$. Vea la FIGURA 1.5.2.

**Caso 2** Si $(x - 4)(x + 2) \leq 0$,

entonces $x - 4 \geq 0$ y $x + 2 \leq 0$.

De donde $x \geq 4$ y $x \leq -2$.

El conjunto solución de este par de desigualdades es $(-\infty, -2] \cap [4, \infty) = \varnothing$.

La solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. En este caso la solución es el conjunto $x \in [-2, 4] \cup \varnothing = [-2, 4]$. Vea la figura 1.5.2. ■

## EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $(x - 8)/(x + 4) \geq 5$

**Solución** Al considerar la desigualdad $\dfrac{x - 8}{x + 4} \geq 5$ se tienen los siguientes dos casos, dependiendo del signo del denominador.

**Caso 1** Si $x + 4 > 0$ (observe que no se puede dar el caso $x + 4 \geq 0$),

entonces $x - 8 \geq 5(x + 4)$ con $x > -4$.

De manera que $-4x \geq 28$ y $x > -4$

Al dividir entre $-4$, tenemos $x \leq -7$ y $x > -4$.

Es decir $x \in (-\infty, -7] \cap [-4, \infty) = \varnothing$.

**Caso 2** Si $x + 4 < 0$ (observe que no se puede dar el caso $x + 4 \leq 0$),

entonces $x - 8 \leq 5(x + 4)$ con $x < -4$.

De manera que $-4x \leq 28$ y $x < -4$.

Al dividir entre $-4$, tenemos $x \geq -7$ y $x < -4$.

Es decir, $x \in [-7, \infty) \cap (-\infty, -4) = [-7, -4)$.

Por último, la solución es la unión de los intervalos solución obtenidos en los dos casos, es decir, $x \in [-7, -4) \cup \varnothing = [-7, -4)$. ■

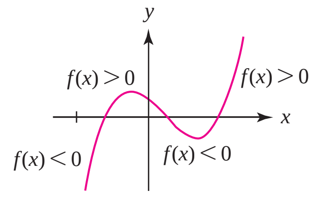


FIGURA 1.5.3

Otra manera de resolver una desigualdad es a través de un análisis gráfico.

Para esto, es necesario recordar que dada una función $y = f(x)$ los puntos de intersección entre su gráfica y el eje $x$ se determinan al resolver la ecuación $f(x) = 0$. Y que, por otra parte, si $f(x) > 0$, entonces la gráfica está por "arriba" del eje $x$ y si $f(x) < 0$, entonces la gráfica está por "abajo" del eje $x$. Vea la FIGURA 1.5.3.

**EJEMPLO 8** Resolver la desigualdad $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

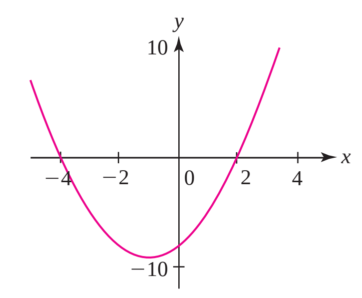


FIGURA 1.5.4

**Solución** Los puntos de corte de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$ y el eje $x$ son $x = 2$ y $x = -4$.

La gráfica de la función puede observarse en la FIGURA 1.5.4.

Se verifica que $f(x) = (x - 2)(x + 4) \leq 0$ en el intervalo $[-4, 2]$.

(También puede observarse que $f(x) = (x - 2)(x + 4) > 0$ en $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$. ■

## Valor absoluto de un número real

Hemos visto que a cada número real se le asocia un único punto de la recta numérica, considerando la distancia entre el origen (el cero) y el número dado. Esta distancia también se define como el valor absoluto o como la magnitud del número. Formalmente se tiene la siguiente definición.

### Definición de valor absoluto de un número real

Si $x$ es un número real, se define el valor absoluto de $x$ como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**EJEMPLO 9** Algunos ejemplos de valores absolutos

1. $|2| = 2$
2. $|0| = 0$
3. $|-13| = 13$
4. $|x| + x = \begin{cases} x + x & \text{si } x \geq 0 \\ -x + x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
5. $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
6. $|x - 2| + x = \begin{cases} x - 2 + x & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) + x & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ ■

### Definición de distancia entre dos números

Si $x, y \in \mathbb{R}$, se define su distancia como $|x - y|$.

## Propiedades del valor absoluto

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes del valor absoluto. La demostración se deja como ejercicio al lector (basta aplicar la definición de valor absoluto).

**Teorema 1.5.1** Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|xy| = |x|\,|y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad |y| \neq 0$

## Desigualdades y valor absoluto

En el siguiente teorema se presentan las propiedades del valor absoluto aplicadas a las desigualdades.

**Teorema 1.5.2** Propiedades del valor absoluto

1. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$
2. $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ o $x > a$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad del triángulo
4. $x \leq |x|$ y $-x \leq |x|$
5. Si $y \geq 0$, entonces $|x| = y$ si y sólo si $\begin{cases} x = y & \text{si } x \geq 0 \\ -x = y & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas al cambiar los símbolos de desigualdad estrictos $<$ y $>$ por los no estrictos $\leq$ y $\geq$.

**DEMOSTRACIÓN 1** Por definición, si $|x| < a$, entonces se tienen los siguientes casos:

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ -x < a & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Multiplicar la segunda rama por } -1$$

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ x > -a & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Aplicar transitividad a ambas ramas}$$

$$-a < x < a \qquad \text{Para toda } x \in \mathbb{R}$$

■

**DEMOSTRACIÓN 2** Por definición, si $|x| > a$, entonces se tienen los siguientes casos:

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ -x > a & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Multiplicar la segunda rama por } -1$$

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ x < -a & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Aplicar transitividad a ambas ramas}$$

Es decir, $x < -a$ o $x > a$ — Para toda $x \in \mathbb{R}$

■

La demostración de las propiedades 3, 4 y 5 se proponen como ejercicio.

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas al cambiar los símbolos de desigualdad estrictos $<$ y $>$ por los no estrictos $\leq$ y $\geq$.

**EJEMPLO 10** Resuelva la desigualdad $|x-4|<30$

**Solución**

$|x-4| < 30$ — Por el inciso 1, teorema 1.5.2

$-30 < x-4 < 30$ — Por el axioma 11, sumar 4 a cada rama

$-30+4 < x-4+4 < 30+4$ — Simplificar

$-26 < x < 34$ — En forma de intervalo

$x \in (-26, 34)$ ■

Unas de las desigualdades más utilizadas en el cálculo de límites son mostradas a continuación en los ejemplos 11 y 12.

**EJEMPLO 11** Resuelva la desigualdad $|f(x)-L|<\varepsilon$

**Solución**

$|f(x)-L| < \varepsilon$ — Por el inciso 1, teorema 1.5.2

$-\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$ — Por el axioma 11, sumar $L$ a cada rama

$L-\varepsilon < f(x)-L+L < L+\varepsilon$ — Simplificar

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ — En forma de intervalo

$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ■

**EJEMPLO 12** Resuelva la desigualdad $|x-a|<\delta$

**Solución**

$|x-a| < \delta$ — Por el inciso 1, teorema 1.5.2

$-\delta < x-a < \delta$ — Por el axioma 11, sumar $a$ y simplificar

$a-\delta < x < a+\delta$ — En forma de intervalo

$x \in (a-\delta, a+\delta)$ ■

**EJEMPLO 13** Resuelva la desigualdad $|-5x+8| \leq 10$

**Solución**

$|-5x+8| \leq 10$ — Por el inciso 1, teorema 1.5.2

$-10 \leq -5x+8 \leq 10$ — Por el axioma 11, restar 8 a cada rama

$-10-8 \leq -5x+8-8 \leq 10-8$ — Simplificar

$-18 \leq -5x \leq 2$ — Por el inciso 2 del teorema 1.3.1, dividir entre −5

$$\frac{-18}{-5} \geq \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5}$$ — Simplificar y reordenar

$$-\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{18}{5}$$ — En forma de intervalo

$x \in \left[-\frac{2}{5}, \frac{18}{5}\right]$ ■

**EJEMPLO 14** Resuelva la desigualdad $|3x+5| > 20$

**Solución**

$|3x + 5| > 20$ — Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los dos casos

$3x + 5 > 20, \quad 3x + 5 < -20$ — Resolver las desigualdades simultáneamente

$3x > 15, \quad 3x < -25$ — Simplificar

$x > 5, \quad x < -\dfrac{25}{3}$ — En forma de intervalo

$x \in \left(-\infty, -\frac{25}{3}\right) \cup (5, \infty)$ ■

**EJEMPLO 15** Resuelva la desigualdad $|-2x+17| \geq 10$

**Solución**

$|-2x + 17| \geq 10$ — Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los dos casos

$-2x + 17 \geq 10, \quad -2x + 17 \leq -10$ — Resolver estas desigualdades simultáneamente

$-2x \geq 7, \quad -2x \leq -27$

$x \leq \dfrac{7}{2}, \quad x \geq \dfrac{27}{2}$ — En forma de intervalo

$x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{27}{2}, \infty\right)$ ■

**EJEMPLO 16** Resuelva la desigualdad $|4x+7| \geq x+4$

**Solución**

$|4x + 7| \geq x + 4$ — Por el inciso 2, teorema 1.5.2, se tienen los siguientes dos casos

$4x + 7 \geq x + 4, \quad 4x + 7 \leq -(x + 4)$ — Resolver estas desigualdades simultáneamente

$3x \geq -3, \quad 5x \leq -11$

$x \geq -1, \quad x \leq -\dfrac{11}{5}$ — En forma de intervalo

$x \in \left(-\infty, -\frac{11}{5}\right] \cup (-1, \infty)$ ■

## 1.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

**1.** Demostrar los incisos 3, 4 y 5 del teorema 1.5.2.

En los ejercicios 2 a 29, resolver la desigualdad indicada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

**2.** $2x < 4 - 10x$
**3.** $14x - 6 < 24 - 4x$
**4.** $5x + 14 > 40 - 8x$
**5.** $3(2x + 2) > 4x - 10$
**6.** $-(2x - 3) \leq 4 - (2x + 4)$
**7.** $\frac{1}{2}x - 2 \leq 3x - \frac{3}{2}$
**8.** $\frac{4}{3}x + 8 \geq 3\left(1 - \frac{1}{3}x\right)$
**9.** $-4 < 6x + 8 < 8$
**10.** $40 < 20 - 10x \leq 100$
**11.** $-5 \leq 4 - 9x < -2$
**12.** $-2 \leq 12 - 3x \leq 5$
**13.** $-2x - 10 < 8 + 8x$
**14.** $(x + 4)(x - 6) < 0$
**15.** $4(x - 1)(x - 5) > 0$
**16.** $(x - 2)(x + 5) \leq 0$
**17.** $(x + 4)(x - 9) \geq 0$
**18.** $x^2 + 5x + 6 \leq 0$
**19.** $2x^2 + x - 1 \geq 0$
**20.** $x^2 > x + 2$
**21.** $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
**22.** $2x^2 + 5x < 0$
**23.** $x^2 + 6x < 0$
**24.** $x^2 < 16$
**25.** $(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 0$
**26.** $x^2(x - 4) \leq 0$
**27.** $2x^2 + 5x < -x^2 + 1$
**28.** $x^3 > (x - 2)^2$
**29.** $\operatorname{sen} x < \cos x$

En los ejercicios 30 a 51, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

**30.** $\dfrac{x-3}{x+5} > 0$
**31.** $\dfrac{x-6}{x-9} < 0$

**32.** $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 0$

**33.** $\dfrac{x+4}{x+12} > 10$

**34.** $\dfrac{x-4}{x} \leq 8$

**35.** $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq -1$

**36.** $\dfrac{9}{x} \leq x$

**37.** $\dfrac{1}{x} \leq x - 1$

**38.** $\dfrac{x}{x+5} > 3x$

**39.** $\dfrac{2}{2-x} \leq \dfrac{4}{x}$

**40.** $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{2}{x}$

**41.** $\dfrac{x}{x+4} \leq \dfrac{10}{x}$

**42.** $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

**43.** $2x^2 - 9x + 4 > 0$

**44.** $\dfrac{x+3}{3-x} \geq \dfrac{x}{x+1}$

**45.** $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x+5} < 0$

**46.** $1 \leq \dfrac{2x}{1-x}$

**47.** $3x^2 - 7x + 14 \geq 10$

**48.** $\dfrac{1}{18-2x} \geq \dfrac{-1}{3x+6}$

**49.** $\dfrac{x+1}{2x-4} < \dfrac{1}{\frac{1}{3}x - 1}$

**50.** $3x - 2 < x^2$

**51.** $\dfrac{3x-2}{x+1} + 4 > 0$

En los ejercicios 52 a 66, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

**52.** $|3x + 15| \geq 10$

**53.** $10 < |x + 5|$

**54.** $|2x + 3| < 10|x|$

**55.** $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > 1$

**56.** $|2 + x| \leq 10$

**57.** $|x + 5| \geq 2x$

**58.** $|(x + 2)(x - 2)| < 2(2 - x)$

**59.** $\dfrac{|7-6x|}{|6x-2|} \geq 1$

**60.** $\left|\dfrac{8x}{2x-2}\right| \leq 1$

**61.** $\left|\dfrac{2x+3}{5x}\right| \leq 1$

**62.** $1 \leq \dfrac{|x+2|}{|8x-12|}$

**63.** $1 < \dfrac{|x-2|}{|x+3|}$

**64.** $|2x - 8| \geq 3$

**65.** $|-4x - 3| \leq 8$

**66.** $\left|\dfrac{5x}{x+3} - \dfrac{6}{x+3}\right| > 10$

**67** Demuestre que el cuadrado de cualquier real no cero es positivo.

**68.** Demuestre que si $|x| \leq 1$, entonces $x^2 \leq x$.

**69.** Demuestre que si $|x| \geq 1$, entonces $x^2 \geq x$.

**70.** Suponga que $0 < a < b < c$, resuelva para $x$ la siguiente desigualdad:

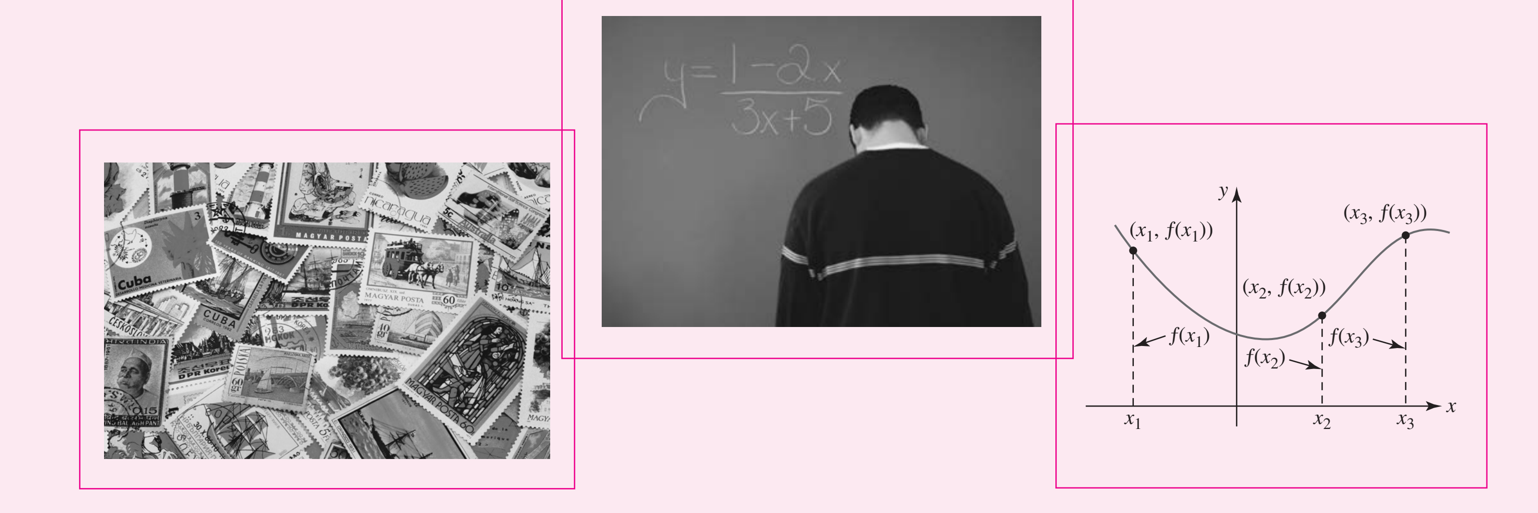
$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x+c} \geq 0$$

**71.** Si $a$, $b$, $c$, $d > 0$ son números reales tales que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ demuestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

# Unidad 2

# Funciones




**En esta unidad** ¿Ha escuchado frases como "el éxito está en función del trabajo arduo" y "la demanda está en función del precio"? La palabra *función* se usa a menudo para sugerir una relación o una dependencia de una cantidad con respecto a otra. Como tal vez sepa, en matemáticas el concepto de una función posee una interpretación similar pero ligeramente más especializada.

El cálculo trata, en esencia, sobre funciones. Así, resulta conveniente empezar su estudio con una unidad dedicada a un repaso de este importante concepto.

## Competencia específica

Comprender el concepto de función real e identificar tipos de funciones, así como aplicar sus propiedades y operaciones.

# 2.1 Funciones y gráficas

**Introducción** Al usar los objetos e interactuar con las personas que nos rodean, resulta fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, o apareje, a los miembros o elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, para cada número de seguridad social hay una persona; para cada libro corresponde por lo menos un autor; para cada estado hay un gobernador, etcétera. En matemáticas estamos interesados en un tipo especial de correspondencia: una *correspondencia con valor único* denominada **función**.

**Definición 2.1.1** Función

Una **función** de un conjunto $X$ en un conjunto $Y$ es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x$ en $X$ exactamente un elemento $y$ en $Y$.

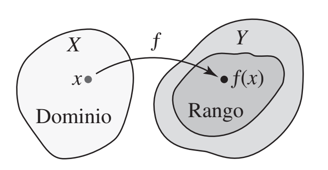
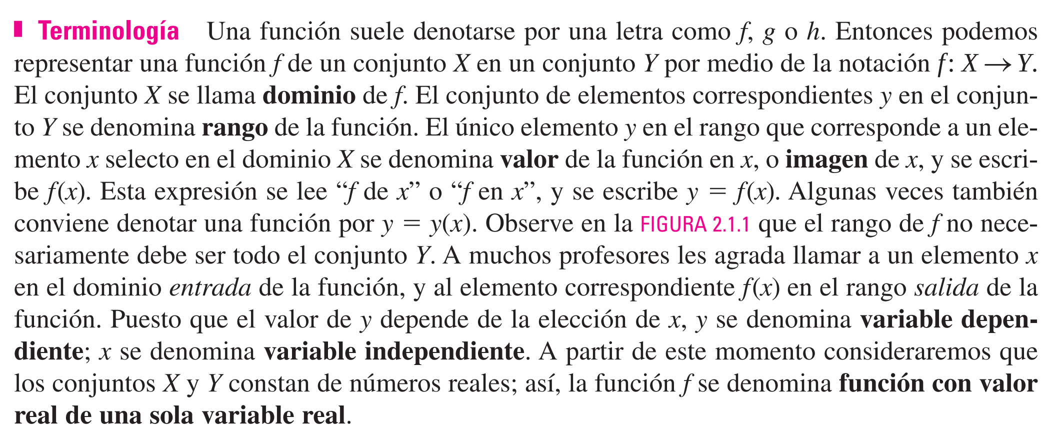



FIGURA 2.1.1 Dominio y rango de una función $f$



**Terminología** Una función suele denotarse por una letra como $f$, $g$ o $h$. Entonces podemos representar una función $f$ de un conjunto $X$ en un conjunto $Y$ por medio de la notación $f: X \to Y$. El conjunto $X$ se llama **dominio** de $f$. El conjunto de elementos correspondientes $y$ en el conjunto $Y$ se denomina **rango** de la función. El único elemento $y$ en el rango que corresponde a un elemento $x$ selecto en el dominio $X$ se denomina **valor** de la función en $x$, o **imagen** de $x$, y se escribe $f(x)$. Esta expresión se lee "$f$ de $x$" o "$f$ en $x$", y se escribe $y = f(x)$. Algunas veces también conviene denotar una función por $y = y(x)$. Observe en la FIGURA 2.1.1 que el rango de $f$ no necesariamente debe ser todo el conjunto $Y$. A muchos profesores les agrada llamar a un elemento $x$ en el dominio *entrada* de la función, y al elemento correspondiente $f(x)$ en el rango *salida* de la función. Puesto que el valor de $y$ depende de la elección de $x$, $y$ se denomina **variable dependiente**; $x$ se denomina **variable independiente**. A partir de este momento consideraremos que los conjuntos $X$ y $Y$ constan de números reales; así, la función $f$ se denomina **función con valor real de una sola variable real**.

En todos los análisis y ejercicios de este texto, las funciones se representan de varias formas:

- *analítica*, es decir, por medio de una fórmula como $f(x) = x^2$;
- *verbal*, es decir, mediante una descripción con palabras;
- *numérica*, es decir, mediante una tabla de valores numéricos, y
- *visual*, es decir, con una gráfica.

**EJEMPLO 1** Función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real está dada por la ecuación $f(x) = x^2$ o $y = x^2$. Los valores de $f$ en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen al sustituir $x$, a la vez, por los números $-5$ y $\sqrt{7}$.

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7.$$ ■

Correspondencia estudiante/escritorio

**EJEMPLO 2** Correspondencia estudiante y escritorio

Una correspondencia natural ocurre entre un conjunto de 20 estudiantes y un conjunto de, por ejemplo, 25 escritorios en un salón de clases cuando cada estudiante escoge y se sienta en un escritorio diferente. Si el conjunto de 20 estudiantes es el conjunto $X$ y el conjunto de 25 escritorios es el conjunto $Y$, entonces esta correspondencia es una función del conjunto $X$ al conjunto $Y$, en el supuesto de que ningún estudiante se sienta en dos escritorios al mismo tiempo. El conjunto de 20 escritorios ocupados realmente por los estudiantes constituye el rango de la función. ■

Algunas veces, para destacar el argumento, escribiremos una función representada por una fórmula usando paréntesis en lugar del símbolo $x$. Por ejemplo, al escribir la función elevar al cuadrado $f(x) = x^2$ como

$$f(\ \ ) = (\ \ )^2. \tag{1}$$

Entonces, para evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde $h$ representa un número real, escribimos $3 + h$ entre paréntesis y realizamos las operaciones algebraicas correspondientes:

Consulte la sección *Páginas de recursos*, al final del libro, para tener un repaso del desarrollo del binomio.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Si una función $f$ está definida por medio de una fórmula o ecuación, entonces por lo regular el dominio de $y = f(x)$ no se plantea explícitamente. Por lo general es posible deducir el dominio de $y = f(x)$ ya sea a partir de la estructura de la ecuación o del contexto del problema.

**EJEMPLO 3** Dominio y rango

En el ejemplo 1, puesto que cualquier número real $x$ puede elevarse al cuadrado y el resultado $x^2$ es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de $R$ en $R$; es decir, $f: R \to R$. En otras palabras, el dominio de $f$ es el conjunto $R$ de números reales. Al usar notación de intervalos, el dominio también puede escribirse como $(-\infty, \infty)$. Debido a que $x^2 \geq 0$ para todo número real $x$, es fácil ver que el rango de $f$ es el conjunto de números reales no negativos o $[0, \infty)$. ■

**Dominio de una función** Como ya se mencionó, el dominio de una función $y = f(x)$ que está definido por una fórmula no suele especificarse. A menos que se indique o implique lo contrario, se entiende que

- El **dominio** de una función $f$ es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

Este conjunto a veces se refiere como **dominio implícito** o **dominio natural** de la función. Por ejemplo, no es posible calcular $f(0)$ para la **función recíproca** $f(x) = 1/x$ puesto que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que $f$ está **indefinida** en $x = 0$. Puesto que todo número real diferente de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto cero. Por el mismo razonamiento, la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ ni en $x = 2$, de modo que su dominio es el conjunto de números reales sin los números $-2$ y 2. La **función raíz cuadrada** $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definida en el sistema de números reales, debe pedirse que el **radicando**, en este caso simplemente $x$, sea no negativo. A partir de la desigualdad $x \geq 0$ observamos que el dominio de la función $h$ es el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de la **función constante** $f(x) = -1$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es el conjunto que consta sólo del número $-1$.

**EJEMPLO 4** Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

**Solución** El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, de modo que el dominio de $f$ es $[3, \infty)$. Luego, como el símbolo $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y en consecuencia $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x = 3$ y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ aumentan cuando $x$ crece, se concluye que $y \geq 4$. Por consiguiente, el rango de $f$ es $[4, \infty)$. ■

**EJEMPLO 5** Dominios de dos funciones

Determine el dominio de

***a***) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ ***b***) $g(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x - 4}$.

**Solución**

***a***) Como en el ejemplo 4, la expresión dentro del radical —el radicando— debe ser no negativa; es decir, el dominio de $f$ es el conjunto de números reales $x$ para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ es también el dominio de $f$.

En precálculo se suelen resolver desigualdades cuadráticas como $(x - 3)(x + 5) \geq 0$ utilizando una tabla de signos.

***b***) Una función que está dada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores $x$ para los cuales el denominador es igual a 0. Puesto que el denominador de $g(x)$ se factoriza como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, vemos que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. Éstos son los *únicos* números para los cuales $g$ no está definida. Por tanto, el dominio de la función $g$ es el conjunto de números reales, a excepción de $x = -1$ y $x = 4$. ■

Al usar notación de intervalos, el dominio de $g$ en el inciso *b*) del ejemplo 5 puede escribirse como $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$. Como alternativa para esta desgarbada unión de intervalos ajenos, este dominio también puede escribirse usando notación de construcción de conjuntos $\{x \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

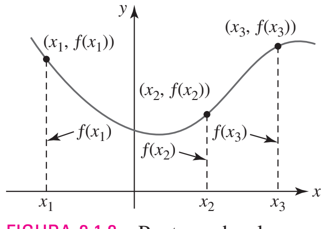
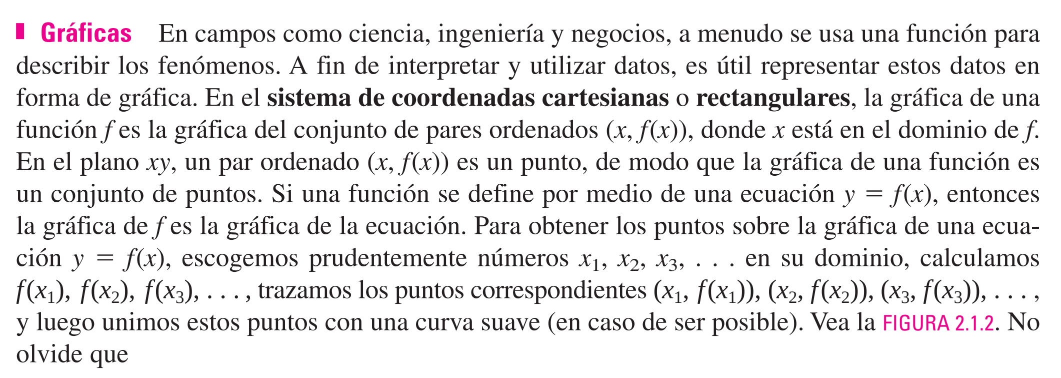



FIGURA 2.1.2 Puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$



**Gráficas** En campos como ciencia, ingeniería y negocios, a menudo se usa una función para describir los fenómenos. A fin de interpretar y utilizar datos, es útil representar estos datos en forma de gráfica. En el **sistema de coordenadas cartesianas** o **rectangulares**, la gráfica de una función $f$ es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde $x$ está en el dominio de $f$. En el plano $xy$, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, de modo que la gráfica de una función es un conjunto de puntos. Si una función se define por medio de una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de $f$ es la gráfica de la ecuación. Para obtener los puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$, escogemos prudentemente números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en su dominio, calculamos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$, trazamos los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \ldots$, y luego unimos estos puntos con una curva suave (en caso de ser posible). Vea la FIGURA 2.1.2. No olvide que

- un valor de $x$ es una distancia dirigida desde el eje $y$, y
- un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje $x$.

A continuación se hacen algunos comentarios sobre las figuras en este texto. Con pocas excepciones, suele ser imposible representar la gráfica completa de una función, por lo que a menudo sólo se muestran las características más importantes de la gráfica. En la FIGURA 2.1.3*a*) observe que la gráfica se dirige hacia abajo en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, puede asumirse que no hay sorpresas mayores más allá de lo que se ha mostrado y que la gráfica continúa simplemente de la manera indicada. La gráfica en la figura 2.1.3*a*) indica el denominado **comportamiento extremo** o **comportamiento global** de la función. Si una gráfica termina ya sea en su extremo derecho o izquierdo, este hecho se indica por medio de un punto cuando es necesario. Para representar el hecho de que el punto extremo está incluido en la gráfica se usa un punto sólido, y para indicar que el punto extremo no está incluido en la gráfica se usa un punto vacío.

**Prueba de la recta vertical** A partir de la definición de una función se sabe que para toda $x$ en el dominio de $f$ corresponde un solo valor $f(x)$ en el rango. Esto significa que una recta vertical que corta la gráfica de una función $y = f(x)$ (esto equivale a escoger una $x$) puede cortar a la gráfica de una función en cuanto mucho un punto. A la inversa, si *toda* recta vertical que corte la gráfica de una ecuación lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la gráfica es la gráfica de una función. La última declaración se denomina **prueba de la recta vertical** para una función. Por otra parte, si *alguna* recta vertical corta la gráfica de una ecuación más de una vez, entonces la gráfica no es la gráfica de una función. Vea las figuras 2.1.3*a*)-*c*). Cuando una recta vertical corta una gráfica en varios puntos, el mismo número $x$ corresponde a diferentes valores de $y$, en contradicción con la definición de función.

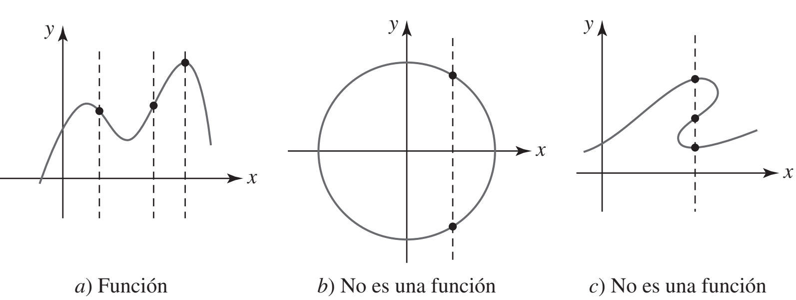
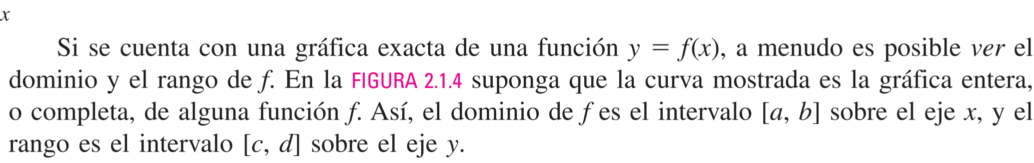



FIGURA 2.1.3 Prueba de la recta vertical

Rango de $f$ · $y = f(x)$ · Dominio de $f$ · $a$ · $b$ · $c$ · $d$

FIGURA 2.1.4 Dominio y rango interpretados gráficamente



Si se cuenta con una gráfica exacta de una función $y = f(x)$, a menudo es posible *ver* el dominio y el rango de $f$. En la FIGURA 2.1.4 suponga que la curva mostrada es la gráfica entera, o completa, de alguna función $f$. Así, el dominio de $f$ es el intervalo $[a, b]$ sobre el eje $x$, y el rango es el intervalo $[c, d]$ sobre el eje $y$.

## EJEMPLO 6 Otra perspectiva del ejemplo 4

A partir de la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$ dada en la FIGURA 2.1.5, podemos ver que el dominio y el rango de $f$ son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 4. ■

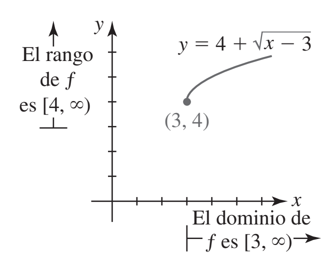
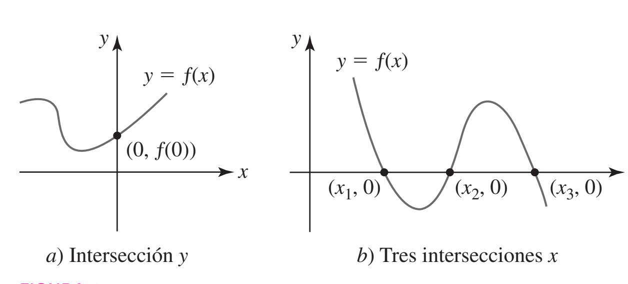



FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función $f$ en el ejemplo 6

**Intersecciones** Para graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, una buena idea suele ser determinar primero si la gráfica de $f$ tiene intersecciones. Recuerde que todos los puntos sobre el eje $y$ son de la forma $(0, y)$. Entonces, si 0 es el dominio de una función $f$, la **intersección $y$** es el punto sobre el eje $y$ cuya coordenada $y$ es $f(0)$; en otras palabras, $(0, f(0))$. Vea la FIGURA 2.1.6*a*). De manera semejante, todos los puntos sobre el eje $x$ tienen la forma $(x, 0)$. Esto significa que para encontrar las **intersecciones $x$** de la gráfica de $y = f(x)$, se determinan los valores de $x$ que hacen $y = 0$. Es decir, es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$ para $x$. Un número $c$ para el que $f(c) = 0$ se denomina **cero** de la función $f$ o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función $f$ son las coordenadas $x$ de las intersecciones $x$ de la gráfica de $f$. En la figura 2.1.6*b*) se ha ilustrado una función que tiene tres ceros $x_1$, $x_2$ y $x_3$ porque $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres intersecciones $x$ correspondientes son los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ y $(x_3, 0)$. Por supuesto, la gráfica de la función puede no tener intersecciones. Este hecho se ilustra en la figura 2.1.5.



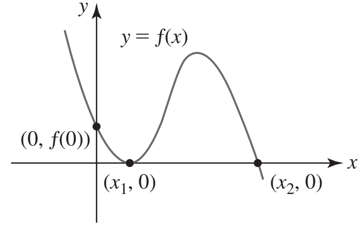




FIGURA 2.1.6 Intersecciones de la gráfica de una función $f$

Una gráfica no necesariamente tiene que *cruzar* un eje de coordenadas en una intersección; una gráfica puede simplemente tocar, o ser *tangente*, a un eje. En la figura 2.1.6*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje $x$ en $(x_1, 0)$.

## EJEMPLO 7 Intersecciones

Encuentre, de ser posible, las intersecciones $x$ y $y$ de la función dada.

***a***) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

**Solución**

***a***) Puesto que 0 está en el dominio de $f$, $f(0) = -2$ y así la intersección $y$ es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones $x$, es necesario determinar si $f$ tiene ceros reales, es decir, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores evidentes, se usa la fórmula general para polinomios cuadráticos para obtener $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Las intersecciones $x$ son los puntos $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

***b***) Debido a que 0 no está en el dominio de $f$, la gráfica de $f$ no posee intersección $y$. Ahora, puesto que $f$ es una expresión fraccionaria, la única forma en que es posible que $f(x) = 0$ es que el numerador sea igual a cero y el denominador sea diferente de cero al evaluar la función en el mismo número. Al factorizar el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$ se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. En consecuencia, los ceros de $f$ son los números $-1$ y 3. Las intersecciones $x$ son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ■

**Funciones definidas por partes** Una función $f$ puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de $f$. Una función definida de esta manera se denomina **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números reales no negativos ($x \geq 0$); el dominio de $f$ es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, puesto que $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número: $f(-4) = (-4)^2 = 16$; por otra parte, puesto que $6 \geq 0$ se suma 1 al número: $f(6) = 6 + 1 = 7$.

### EJEMPLO 8 Gráfica de una función definida por partes

Considere la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

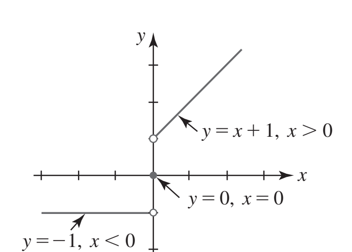


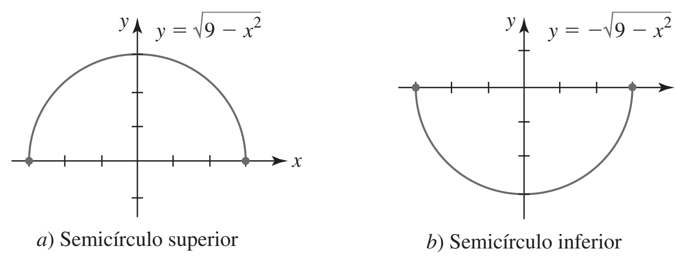

FIGURA 2.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

Aunque el dominio de $f$ consta de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función está definida sobre una parte diferente de su dominio. Se grafican

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$ y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se proporciona en la FIGURA 2.1.7. ■

**Semicírculos** Como se muestra en la figura 2.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (por lo menos) dos funciones de $x$. Si esta ecuación se resuelve para $y$ en términos de $x$, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{\ }$, ambas ecuaciones $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$ definen funciones. La primera ecuación define un **semicírculo superior**, y la segunda un **semicírculo inferior**. Con base en las gráficas mostradas en la FIGURA 2.1.8, el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.




*a*) Semicírculo superior *b*) Semicírculo inferior

FIGURA 2.1.8 Estos semicírculos son gráficas de funciones

y
$y = -x,\ x < 0$ $y = x,\ x \geq 0$
x

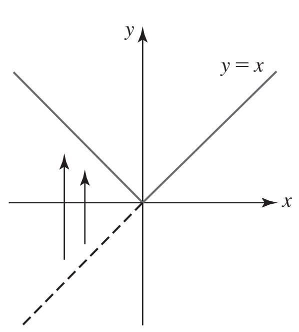
*a*)

**Función valor absoluto** La función $f(x) = |x|$, denominada **función valor absoluto**, aparece a menudo en el análisis de unidades ulteriores. El dominio de $f$ es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. En otras palabras, para cualquier número real $x$, los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Por ejemplo,

$$f(3) = |3| = 3, \quad f(0) = |0| = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por definición del valor absoluto de $x$, observamos que $f$ es una función definida por partes o pedazos, que consta de dos partes

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$




*b*)

FIGURA 2.1.9 Función valor absoluto (3)

Su gráfica, mostrada en la FIGURA 2.1.9*a*), consta de dos semirrectas perpendiculares. Puesto que $f(x) \geq 0$ para toda $x$, otra forma de graficar (3) consiste en simplemente trazar la recta $y = x$ y luego reflejar en el eje $x$ esa porción de la recta que está abajo del eje $x$. Vea la figura 2.1.9*b*).

**Función entero mayor** A continuación se considerará una función $f$ definida por partes denominada **función entero mayor**. Esta función, que tiene muchas notaciones, se denotará aquí por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y está definida por la regla

La función entero mayor también se escribe como $f(x) = [x]$.

$$\lfloor x \rfloor = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \tag{4}$$

La expresión (4), traducida a lenguaje coloquial, significa lo siguiente:

- El valor funcional $f(x)$ es el entero mayor $n$ que es menor o igual a $x$.

Por ejemplo,

$$f(-1.5) = -2,\ f(0.4) = 0,\ f(\pi) = 3,\ f(5) = 5,$$

y así en lo sucesivo. El dominio de $f$ es el conjunto de números reales y consta de la unión de una infinidad de intervalos ajenos; en otras palabras, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es una función definida por partes dada por

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases} \tag{5}$$

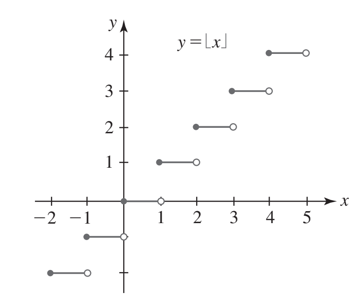



FIGURA 2.1.10 Función entero mayor

El rango de $f$ es el conjunto de enteros. La porción de la gráfica de $f$ sobre el intervalo cerrado $[-2, 5]$ se proporciona en la FIGURA 2.1.10.

En informática la función entero mayor se conoce como **función redondeo hacia el entero inferior anterior**. Una función relacionada denominada **función redondeo hacia el entero superior siguiente*** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero $n$ que es mayor o igual a $x$. Vea los problemas 57 a 59 en la sección "Desarrolle su competencia 2.1".

**Un modelo matemático** A menudo resulta aconsejable describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, ya sea físico, sociológico e incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático** y puede ser tan complicada como cientos de ecuaciones simultáneas o tan sencilla como una sola función. Esta sección concluye con una ilustración del mundo real de una función definida por partes denominada *función timbre postal*. Esta función es semejante a $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en el sentido de que ambos son ejemplos de *funciones escalón*; cada función es constante sobre un intervalo y luego salta a otro valor constante al siguiente intervalo colindante.

Al momento de escribir esto, la tarifa de primera clase del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el porte de una carta en un sobre de tamaño normal dependía de su peso en onzas:

$$\text{Porte} = \begin{cases} \$0.42, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.59, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.76, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas} \\ \vdots \\ \$2.87, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas.} \end{cases} \tag{6}$$

La regla en (6) es una función de $P$ que consta de 14 partes (las cartas que pesan más de 13 onzas se envían como correo prioritario). Un valor de la función $P(w)$ es una de 14 constantes; la constante cambia dependiendo del peso $w$ (en onzas) de la carta.† Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.42,\ P(1.7) = \$0.59,\ P(2.2) = \$0.76,\ P(2.9) = \$0.76 \text{ y } P(12.1) = \$2.87.$$

El dominio de la función $P$ es la unión de los intervalos:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

---

* Las funciones redondeo hacia el entero inferior anterior y redondeo hacia el entero superior siguiente y sus notaciones se deben al renombrado científico canadiense Kenneth E. Iverson (1920-2004).

† En (6) no se muestra que el porte de una carta cuyo peso se encuentra en el intervalo (3, 4] es determinado por si su peso está en (3, 3.5] o en (3.5, 4]. Éste es el único intervalo dividido de esta manera.

## $f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se traza la gráfica de una función, nunca se debe acudir a graficar muchos puntos manualmente. Esto es algo que una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (SAC) hacen bien. Por otra parte, usted no debe volverse dependiente de una calculadora para obtener una gráfica. Lo crea o no, hay muchos profesores de cálculo que no permiten el uso de calculadoras gráficas al aplicar cuestionarios o exámenes. Por lo general, no hay objeción para que usted use calculadoras o computadoras como ayuda para comprobar algunos problemas de tarea, pero en el salón de clases los maestros desean ver el producto de su propio esfuerzo, es decir, su capacidad de analizar. Así, está usted fuertemente motivado a desarrollar sus habilidades para graficar hasta el punto en que pueda trazar a mano rápidamente la gráfica de una función a partir de alguna propiedad conocida de tipos de funciones y trazar un mínimo de puntos bien escogidos.

## 2.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

### Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre los valores funcionales indicados.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5), f(-\sqrt{3}), f(3)$ y $f(6)$
2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(2)$ y $f(7)$
3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(-1), f(0), f(3)$ y $f(5)$
4. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)$ y $f(4)$
5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$; $f(-1), f(0), f(1)$ y $f(\sqrt{2})$
6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2}), f(-1), f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$

En los problemas 7 y 8, encuentre

$$f(x), f(2a), f(a^2), f(-5x), f(2a+1), f(x+h)$$

para la función dada $f$ y simplifique lo más que pueda.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$
8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$
9. ¿Para qué valores de $x$ $f(x) = 6x^2 - 1$ es igual a 23?
10. ¿Para qué valores de $x$ $f(x) = \sqrt{x-4}$ es igual a 4?

En los problemas 11-26, encuentre el dominio de la función $f$ dada.

11. $f(x) = \sqrt{4x-2}$
12. $f(x) = \sqrt{15-5x}$
13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$
14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$
15. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x(x-3)}$
16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10x+25}$
18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x-12}$
19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-1}$
21. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$
22. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$
24. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$
25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$
26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

En los problemas 27-30, determine si la gráfica en la figura es la gráfica de una función.

27.

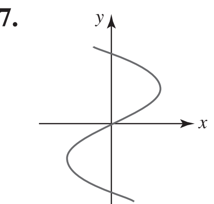



FIGURA 2.1.11 Gráfica para el problema 27

28.

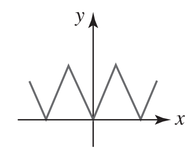



FIGURA 2.1.12 Gráfica para el problema 28

29.

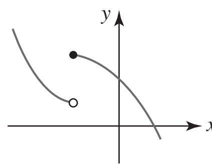



FIGURA 2.1.13 Gráfica para el problema 29

30.

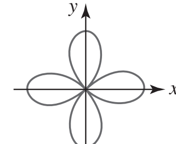



FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, use el rango de la función $f$ dada en la figura para encontrar su dominio y rango.

31.

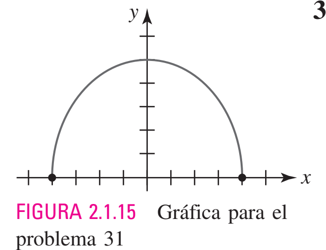



FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 31

32.

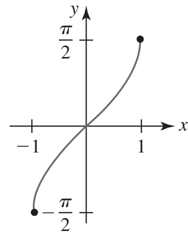



FIGURA 2.1.16 Gráfica para el problema 32

33.

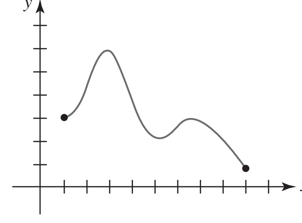



FIGURA 2.1.17 Gráfica para el problema 33

**34.**

FIGURA 2.1.18 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-44, encuentre las intersecciones $x$ y $y$ de la gráfica de la función dada $f$, en caso de haberlas. No grafique.

**35.** $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

**36.** $f(x) = x^2 - 6x + 5$

**37.** $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

**38.** $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

**39.** $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

**40.** $f(x) = x^4 - 1$

**41.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

**42.** $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

**43.** $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

**44.** $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 45 y 46, use la gráfica de la función $f$ dada en la figura para estimar los valores $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$. Calcule la intersección $y$.

**45.**

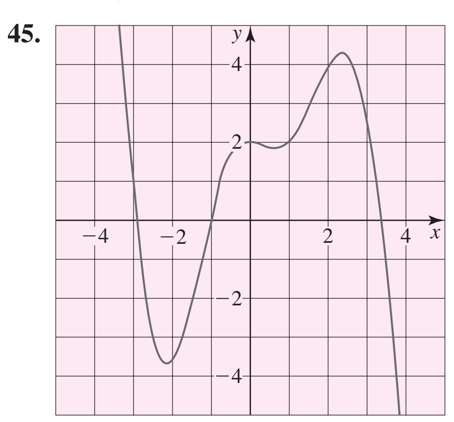



FIGURA 2.1.19 Gráfica para el problema 45

**46.**

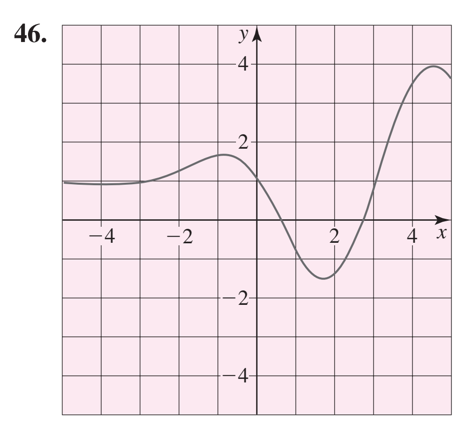



FIGURA 2.1.20 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 y 48, use la gráfica de la función $f$ dada en la figura para estimar los valores $f(-2)$, $f(-1.5)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3.2)$. Calcule las intersecciones $x$.

**47.**

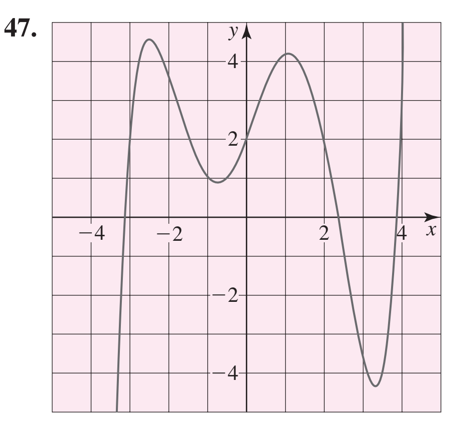



FIGURA 2.1.21 Gráfica para el problema 47

**48.**

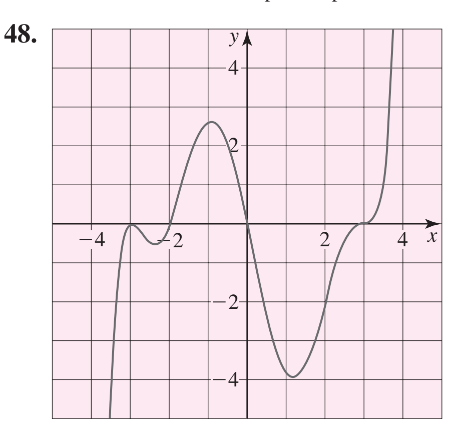



FIGURA 2.1.22 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación dada. Encuentre el dominio de las funciones $f_1$ y $f_2$.

**49.** $x = y^2 - 5$

**50.** $x^2 - 4y^2 = 16$

**51.** Algunas de las funciones que encontrará después en este texto tienen como dominio el conjunto de enteros positivos $n$. La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los $n$ primeros enteros positivos; es decir,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

***a***) Evalúe $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.

***b***) Demuestre que $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1)$.

***c***) Simplifique $f(5)/f(4)$ y $f(7)/f(5)$.

***d***) Simplifique $f(n + 3)/f(n)$.

**52.** Otra función de un entero positivo $n$ proporciona la suma de los $n$ primeros enteros positivos al cuadrado:

$$S(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

***a***) Encuentre el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.

***b***) Encuentre $n$ tal que $300 < S(n) < 400$. [*Sugerencia*: Use calculadora.]

## ≡ Piense en ello

**53.** Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio es
*a*) $[3, \infty)$ *b*) $(3, \infty)$.

**54.** Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es
*a*) $[3, \infty)$ *b*) $(3, \infty)$.

**55.** Con base en la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ dada en la FIGURA 2.1.23, determine el rango y dominio de la función $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Explique su razonamiento en una o dos frases.

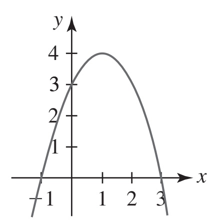



FIGURA 2.1.23 Gráfica para el problema 55

**56.** Sea $P$ cualquier punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de una función $f$. Suponga que los segmentos de recta $PT$ y $PS$ son perpendiculares a los ejes $x$ y $y$. Sean $M_1$, $M_2$ y $M_3$, respectivamente, los puntos medios de $PT$, $PS$ y $ST$ como se muestra en la FIGURA 2.1.24. Encuentre una función que describa la ruta de los puntos $M_1$. Repita lo anterior para los puntos $M_2$ y $M_3$.

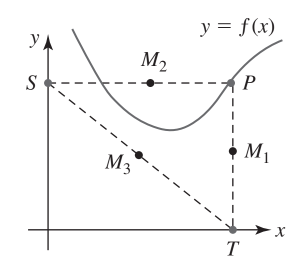



FIGURA 2.1.24 Gráfica para el problema 56

**57.** Anteriormente se vio que la **función redondeo hacia el entero superior siguiente** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero $n$ que es mayor o igual a $x$. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots & \\ ______, & -3 < x \le -2 \\ ______, & -2 < x \le -1 \\ ______, & -1 < x \le 0 \\ ______, & 0 < x \le 1 \\ ______, & 1 < x \le 2 \\ ______, & 2 < x \le 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

**58.** Grafique la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 57.

**59.** La función definida por partes

$$\text{int}(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

se denomina **función entero**. Grafique int($x$).

**60.** Analice cómo graficar la función $f(x) = |x| + |x - 3|$. Lleve a cabo sus ideas.

En los problemas 61 y 62, describa con palabras cómo difieren las gráficas de las funciones dadas.

**61.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$,
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

**62.** $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$,
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

# 2.2 Combinación de funciones

**▌Introducción** Dos funciones $f$ y $g$ pueden combinarse en varias formas para obtener nuevas funciones. En esta sección se analizarán dos formas en que es posible combinar funciones: mediante operaciones aritméticas y a través de la operación de composición de funciones.

**▌Funciones potencia** Una función de la forma

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

se denomina **función potencia**. En esta sección consideraremos que $n$ es un número racional. El dominio de la función potencia depende de la potencia $n$. Por ejemplo, para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente,

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto $R$ de números reales o $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto $R$ de números reales excepto $x = 0$.

Las funciones potencia simples, o versiones modificadas de estas funciones, ocurren tan a menudo en problemas en cálculo que no es conveniente desperdiciar tiempo valioso trazando sus gráficas. Se sugiere conocer (memorizar) el breve catálogo de gráficas de funciones potencia que se proporciona en la FIGURA 2.2.1. Usted debe reconocer la gráfica en el inciso *a*) de la figura 2.2.1 como una **recta** y la gráfica en el inciso *b*) como una **parábola**.

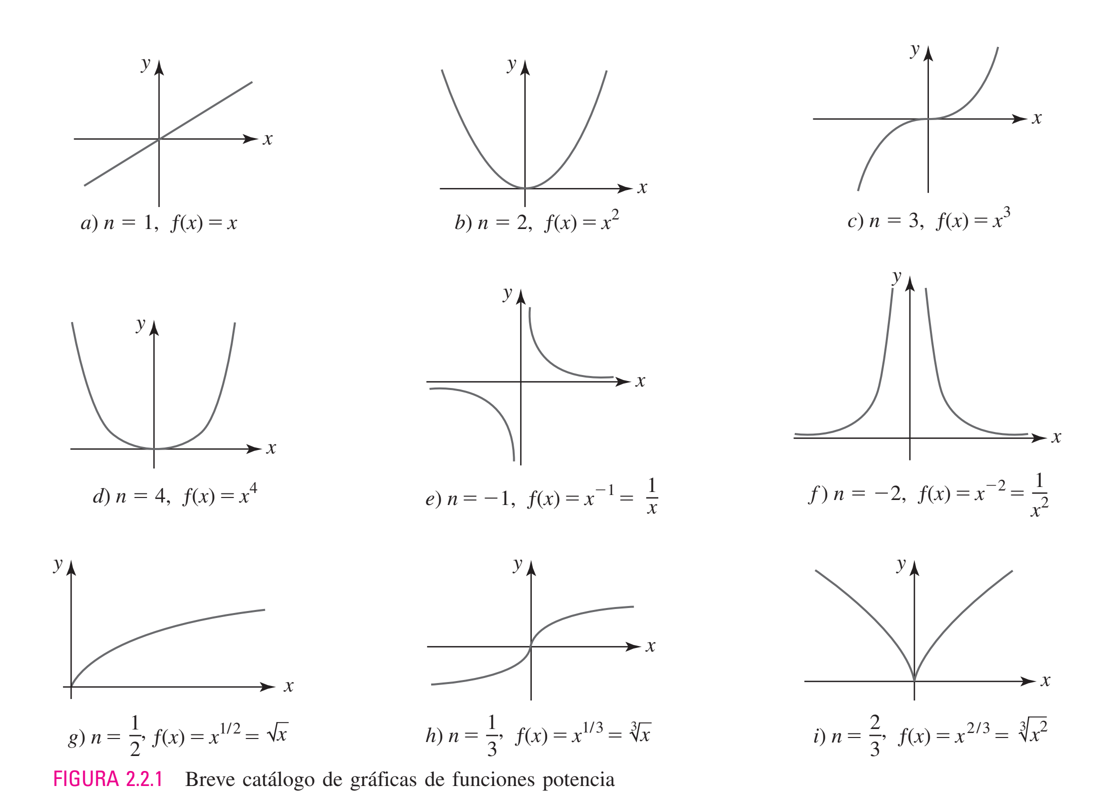



FIGURA 2.2.1 Breve catálogo de gráficas de funciones potencia

**Combinaciones aritméticas** Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

**Definición 2.2.1** Combinaciones aritméticas

Si $f$ y $g$ son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** $fg$ y el **cociente** $f/g$ se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ da } g(x) \neq 0. \tag{5}$$

**Dominio de una combinación aritmética** Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas $f$ y $g$ estén definidas en el mismo número $x$. Por tanto, el **dominio** de las funciones $f + g$, $f - g$ y $fg$ es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de $f$ con el dominio de $g$. En el caso del cociente $f/g$, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también es necesario excluir cualquier valor de $x$ para el que el denominador $g(x)$ sea cero. En otras palabras, si el dominio de $f$ es el conjunto $X_1$ y el dominio de $g$ es el conjunto $X_2$, entonces el dominio de $f + g$, $f - g$ y $fg$ es $X_1 \cap X_2$, y el dominio de $f/g$ es $\{x | x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

**EJEMPLO 1** Suma de dos funciones potencia

Ya se ha visto que el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto $R$ de números reales, o $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. En consecuencia, el dominio de la suma

$$f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

es la intersección de los dos dominios: $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. ■

**Funciones polinomiales** Muchas de las funciones con las que se trabaja en cálculo se construyen al realizar operaciones aritméticas sobre funciones potencia. De especial interés son las funciones potencia (1) donde $n$ es un entero no negativo. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la función $f(x) = x^n$ se denomina **función polinomial de un solo término**. Al usar las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación es posible construir funciones polinomiales con muchos términos. Por ejemplo, si $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$ y $f_4(x) = 1$, entonces

$$f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

En general, una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{6}$$

donde $n$ es un entero no negativo y los coeficientes $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son números reales. El **dominio** de cualquier función polinomial $f$ es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. Las siguientes funciones *no son* polinomiales:

$$y = 5x^2 - \underset{\text{no es un entero no negativo}}{3x^{-1}} \quad \text{y} \quad y = \underset{\text{no es un entero no negativo}}{2x^{1/2}} - 4.$$

**EJEMPLO 2** Suma, diferencias, producto y cociente

Considere las funciones polinomiales $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$.

***a*)** Con base en los numerales (2)-(4) de la definición 2.2.1 es posible producir tres nuevas funciones polinomiales:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x.$$

***b*)** Finalmente, con base en el numeral (5) de la definición 2.2.1,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$ ■

Observe en el ejemplo 2, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, que el dominio del cociente $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$ con $x = 3$ y $x = -3$ excluidos; en otras palabras, el dominio de $(f/g)(x)$ es la unión de tres intervalos: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

**Funciones racionales** La función en el inciso *b*) del ejemplo 2 es un caso de funciones racionales. En general, una **función racional** $y = f(x)$ es una función de la forma

Las funciones polinomiales y racionales se analizarán con más detalle en la sección 2.3.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{7}$$

donde $p$ y $q$ son funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \quad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{x^3 - x + 7}}{\underset{\text{polinomio}}{x + 3}}, \quad y = \frac{1}{x},$$

son funciones racionales. La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional.

**Composición de funciones** Otro método para combinar las funciones $f$ y $g$ se denomina **composición de funciones**. Para ilustrar la idea, se supondrá que para una $x$ dada en el dominio de $g$ el valor funcional $g(x)$ es un número en el dominio de la función $f$. Esto significa que es posible evaluar $f$ en $g(x)$; en otras palabras, $f(g(x))$. Por ejemplo, suponga $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces, para $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 es el dominio de $f$, es posible escribir $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En efecto, para estas dos funciones particulares resulta que es posible evaluar $f$ en cualquier valor funcional $g(x)$; es decir,

$$f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

A continuación se define la función resultante, denominada **composición de *f* y *g***.

**Definición 2.2.2** Composición de funciones

Si $f$ y $g$ son dos funciones, la **composición de *f* y *g***, denotada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{8}$$

La **composición de *g* y *f***, denotada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{9}$$

## EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encuentre

***a***) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

**Solución**

***a***) Para hacer énfasis se sustituye $x$ por el conjunto de paréntesis ( ) y $f$ se escribe en la forma $f(x) = (\ )^2 + 3(\ )$. Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$, cada conjunto de paréntesis se llena con $g(x)$. Se encuentra

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1)\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 4.\end{aligned}$$

***b***) En este caso, $g$ se escribe en la forma $g(x) = 2(\ )^2 + 1$. Así,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(x^2 + 3x)\\ &= 2(x^2 + 3x)^2 + 1\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1.\end{aligned}$$

Los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Es decir, en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

## EJEMPLO 4 Escritura de una función como una composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones $f$ y $g$.

**Solución** Si $f$ y $g$ se definen como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

Hay otras dos soluciones para el ejemplo 4. Por ejemplo, si las funciones $f$ y $g$ se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, observe entonces que $(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

**Dominio de una composición** Para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ el número $g(x)$ debe estar en el dominio de $f$. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. Observe que no es posible evaluar $f(g(1))$ porque $g(1) = -1$ y $-1$ no está en el dominio de $f$. Para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$, $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define al dominio de $f$, a saber: $g(x) \geq 0$. Esta última desigualdad es la misma que $x - 2 \geq 0$ o $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una porción del dominio original $(-\infty, \infty)$ de $g$. En general, el **dominio de la composición** $f \circ g$ es el conjunto de números $x$ en el dominio de $g$ tales que $g(x)$ está en el dominio de $f$.

Para una constante $c > 0$, las funciones definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La función $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. Las funciones definidas por $y = f(x + c)$, $y = f(x - c)$ y $y = f(cx)$ son las *composiciones* de $f(x)$ con las funciones polinomiales $g(x) = x + c$, $g(x) = x - c$ y $g(x) = cx$, respectivamente. Como veremos dentro de poco, la gráfica de cada una de éstas no es una **transformación rígida** ni una **transformación no rígida** de la gráfica de $y = f(x)$.

**Transformaciones rígidas** Una **transformación rígida** de una gráfica es una transformación que cambia sólo la *posición* de la gráfica en el plano $xy$, pero no su forma. Para la gráfica de una función $y = f(x)$ se analizan cuatro tipos de desplazamientos o traslaciones.

### Traslaciones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y $c$ es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = f(x) + c$ es la gráfica de $f$ desplazada verticalmente **hacia arriba** $c$ unidades,
- $y = f(x) - c$ es la gráfica de $f$ desplazada verticalmente **hacia abajo** $c$ unidades,
- $y = f(x + c)$ es la gráfica de $f$ desplazada horizontalmente **hacia la izquierda** $c$ unidades,
- $y = f(x - c)$ es la gráfica de $f$ desplazada horizontalmente **hacia la derecha** $c$ unidades.

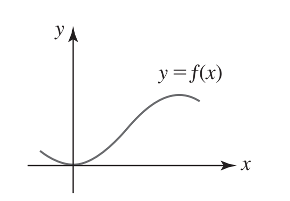
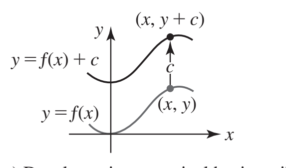
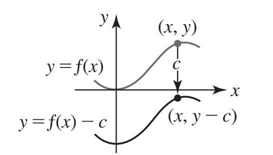


FIGURA 2.2.2 Gráfica de $y = f(x)$

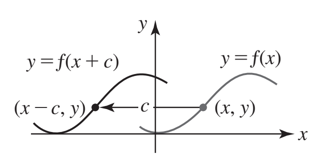
Considere la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 2.2.2. Desplazamientos vertical y horizontal de esta gráfica son las gráficas mostradas en los incisos *a*)-*d*) de la FIGURA 2.2.3. Si $(x, y)$ es un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de $f$ está desplazada, por ejemplo, hacia arriba por $c > 0$ unidades, entonces $(x, y + c)$ es un punto sobre la nueva gráfica. En general, las coordenadas $x$ no cambian como resultado de un desplazamiento vertical. Vea las figuras 2.2.3*a*) y 2.2.3*b*). En forma semejante, en un desplazamiento horizontal las coordenadas $y$ de puntos sobre la gráfica desplazada son las mismas que sobre la gráfica original. Vea las figuras 2.2.3*c*) y 2.2.3*d*).



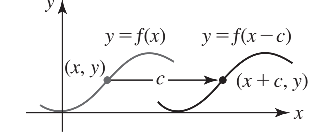
*a*) Desplazamiento vertical hacia arriba



*b*) Desplazamiento vertical hacia abajo



*c*) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

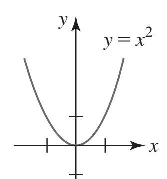


*d*) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

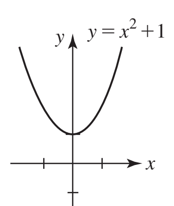
FIGURA 2.2.3 Desplazamientos vertical y horizontal de $y = f(x)$ por una cantidad $c > 0$

**EJEMPLO 5** Gráficas desplazadas

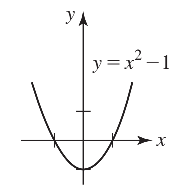
Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ en la FIGURA 2.2.4*a*) al desplazar esta gráfica, a la vez, 1 unidad hacia arriba (figura 2.2.4*b*)), 1 unidad hacia abajo (figura 2.2.4*c*)), 1 unidad hacia la izquierda (figura 2.2.4*d*)) y 1 unidad hacia la derecha (figura 2.2.4*e*)).



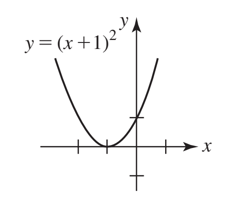
*a*) Punto inicial



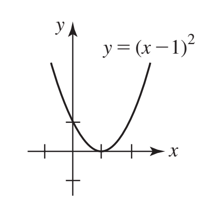
*b*) Desplazamiento hacia arriba



*c*) Desplazamiento hacia abajo



*d*) Desplazamiento hacia la izquierda



*e*) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 2.2.4 Gráficas desplazadas en el ejemplo 5 ■

**Combinación de desplazamientos** En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2, \qquad (10)$$

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante.

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (a la izquierda o a la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda seguida por un desplazamiento vertical 1 unidad hacia abajo. La gráfica se proporciona en la FIGURA 2.2.5.

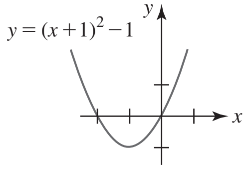


FIGURA 2.2.5 Gráfica obtenida por desplazamientos horizontal y vertical

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es por medio de una **reflexión** en un eje de coordenadas.

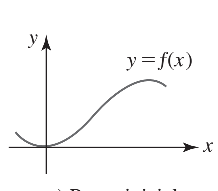
## Reflexiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función. Entonces la gráfica de

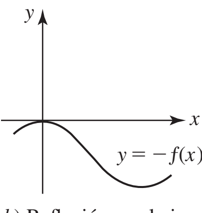
- $y = -f(x)$ es la gráfica de $f$ reflejada en el **eje *x***,
- $y = f(-x)$ es la gráfica de $f$ reflejada en el **eje *y***.

Reflexión o imagen especular

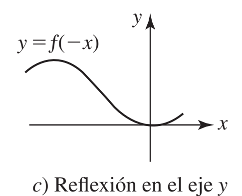
En la FIGURA 2.2.6*a*) se ha reproducido la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la figura 2.2.2. Las reflexiones de esta gráfica en los ejes $x$ y $y$ se ilustran en las figuras 2.2.6*b*) y 2.2.6*c*). Cada una de estas reflexiones es una **imagen especular** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



*a*) Punto inicial



*b*) Reflexión en el eje $x$



*c*) Reflexión en el eje $y$

FIGURA 2.2.6 Reflexiones con respecto a los ejes coordenados

## EJEMPLO 6 Reflexiones

Grafique

***a***) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$.

**Solución** El punto inicial es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ dada en la FIGURA 2.2.7*a*).

***a***) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje $x$. Observe en la figura 2.2.7*b*) que como (1, 1) está en la gráfica de $f$, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

***b***) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje $y$. Observe en la figura 2.2.7*c*) que como (1, 1) está en la gráfica de $f$, el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ parece algo extraña, pero no olvide que su dominio está determinado por el requerimiento de que $-x \geq 0$, o, de manera equivalente, $x \leq 0$, y así la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

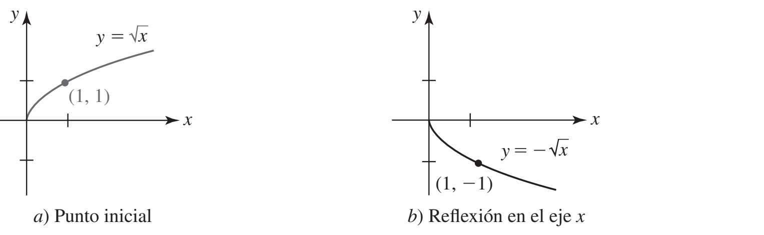



FIGURA 2.2.7 Gráficas en el ejemplo 6

**Transformaciones no rígidas** Si una función $f$ se multiplica por una constante $c > 0$, la forma de la gráfica cambia pero retiene, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ distorsionada verticalmente; la gráfica de $f$ se estira (o elonga) verticalmente o se comprime (o aplana) verticalmente, dependiendo del valor de $c$. En otros términos, un estiramiento vertical es un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje $x$, mientras que una compresión vertical es una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje $x$. La gráfica de la función $y = f(cx)$ está distorsionada horizontalmente, ya sea por un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje $y$ o por una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje $y$. El estiramiento o la compresión de una gráfica constituyen ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

## Estiramientos y compresiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y que $c$ es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = cf(x)$ es la gráfica de $f$ **estirada verticalmente** por un factor de $c$ si $c > 1$,
- $y = cf(x)$ es la gráfica de $f$ **comprimida verticalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de $f$ **estirada horizontalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de $f$ **comprimida horizontalmente** por un factor de $c$ si $c > 1$.

### EJEMPLO 7 Dos compresiones

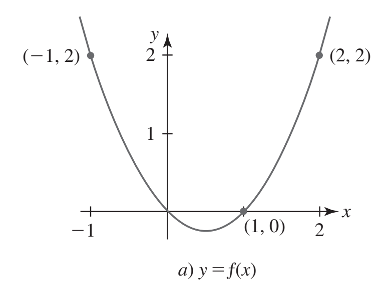
Dada $f(x) = x^2 - x$, compare las gráficas de

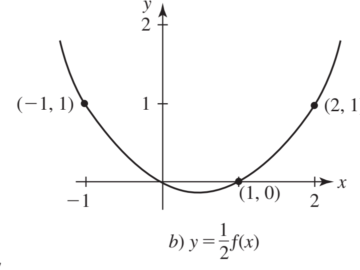
***a***) $y = \frac{1}{2}f(x)$ y ***b***) $y = f(2x)$.

**Solución** La gráfica de la función polinomial dada $f$ se muestra en la FIGURA 2.2.8.

***a***) Con la identificación $c = \frac{1}{2}$, la gráfica de $y = \frac{1}{2}f(x)$ es la gráfica de $f$ comprimida verticalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 2.2.8*a*), observe en la figura 2.2.8*b*) que las coordenadas $y$ de los tres puntos correspondientes miden la mitad. La gráfica original está girada hacia el eje $x$.

***b***) Con la identificación $c = 2$, la gráfica de $y = f(2x)$ es la gráfica de $f$ comprimida horizontalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 2.2.8*a*), en la figura 2.2.8*c*) las coordenadas $x$ de los tres puntos correspondientes están divididos entre 2. La gráfica original está girada hacia el eje $y$.



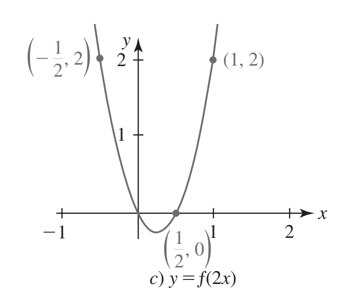




FIGURA 2.2.8 Gráficas de las funciones en el ejemplo 7

El siguiente ejemplo ilustra el desplazamiento, la reflexión y el estiramiento de una gráfica.

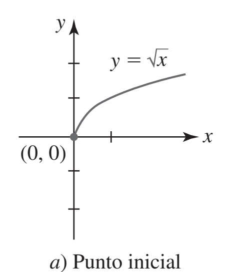
**EJEMPLO 8** Combinación de transformaciones

Grafique $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

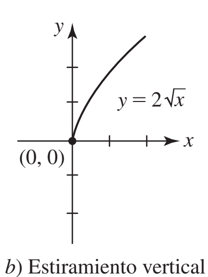
**Solución** Usted debe reconocer que la función dada consta de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

$$y = \overset{\substack{\text{desplazamiento vertical hacia arriba}\\ \downarrow}}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{reflexión en el eje } x}}{-} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{estiramiento vertical}}}{2}\sqrt{x \overset{\substack{\text{desplazamiento horizontal hacia la derecha}\\ \downarrow}}{- 3}}.$$

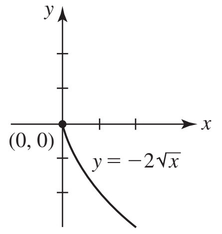
Empezaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en la FIGURA 2.2.9*a*). Las cuatro transformaciones se ilustran en las figuras 2.2.9*b*)-*e*).



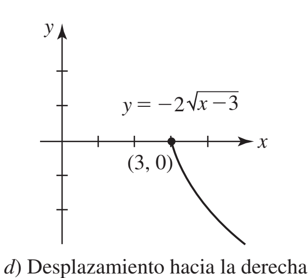

*a*) Punto inicial



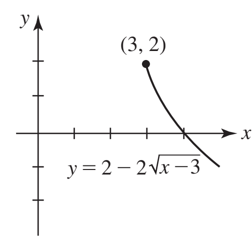

*b*) Estiramiento vertical




*c*) Reflexión en el eje *x*




*d*) Desplazamiento hacia la derecha




*e*) Desplazamiento hacia arriba

FIGURA 2.2.9 Gráfica de la función en el ejemplo 8 ■

**Simetría** Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje *y*, decimos que *f* es una **función par**. Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar**. Contamos con las siguientes pruebas para simetría.

## Pruebas para simetría de la gráfica de una función

La gráfica de una función *f* con dominio *X* es simétrica con respecto al

- **eje *y*** si $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ en $X$, o bien, (11)
- **origen** si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x$ en $X$. (12)

En la FIGURA 2.2.10, observe que si *f* es una función par y

$$\overset{f(x)}{\downarrow}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\overset{f(-x)}{\downarrow}$$
$$(x, y) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, y)$$

también es un punto sobre su gráfica. De manera semejante, en la FIGURA 2.2.11 se observa que si *f* es una función impar y

$$\overset{f(x)}{\downarrow}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\overset{f(-x)\,=\,-f(x)}{\downarrow}$$
$$(x, y) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, -y)$$

es un punto sobre su gráfica.

FIGURA 2.2.10 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje *y*

FIGURA 2.2.11 Función impar; la gráfica tiene simetría con respecto al origen

**EJEMPLO 9** Funciones pares e impares

***a***) $f(x) = x^3$ es una función impar, ya que por (12),

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Una inspección de la figura 2.1.2*c*) muestra que la gráfica de *f* es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, puesto que $f(1) = 1$, $(1, 1)$ es un punto sobre la gráfica de $y = x^3$. Debido a que *f* es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está sobre la misma gráfica.

***b***) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, ya que por (11) y las leyes de los exponentes,

la raíz cúbica de $-1$ es $-1$

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\sqrt[3]{-1})^2 x^{2/3} = (-1)^2 x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 2.2.1*i*) observamos que la gráfica de $f$ es simétrica con respecto al eje $y$. Por ejemplo, (8, 4) y $(-8, 4)$ son puntos sobre la gráfica de $y = x^{2/3}$.

***c***) $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. Con base en

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se observa que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. ■

Las gráficas en la figura 2.2.1, con el inciso *g*) como única excepción, presenta simetría con respecto al eje $y$ o al origen. Las funciones en las figuras 2.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las funciones en las figuras 2.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

## 2.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre $f + g$, $f - g$, $fg$ y $f/g$.

**1.** $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -4x + 8$

**2.** $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 7x - 9$

**3.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

**4.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{4x+2}$

**5.** $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$

**6.** $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

En los problemas 7-10, sean $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

**7.** $f + g$ **8.** $fg$ **9.** $f/g$ **10.** $g/f$

En los problemas 11-16, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.

**11.** $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x + 6$

**12.** $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$

**13.** $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + x^2$

**14.** $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$

**15.** $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

**16.** $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

En los problemas 17 y 18, sean $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$. Encuentre el dominio de la función dada.

**17.** $f \circ g$ **18.** $g \circ f$

En los problemas 19 y 20, sean $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 2 - \sqrt{x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

**19.** $g \circ f$ **20.** $f \circ g$

En los problemas 21 y 22, encuentre $f \circ (2f)$ y $f \circ (1/f)$.

**21.** $f(x) = 2x^3$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

La composición de tres funciones $f$, $g$ y $h$ es la función

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

En los problemas 23 y 24, encuentre $f \circ g \circ h$.

**23.** $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$

**24.** $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = \sqrt{2x+1}$

En los problemas 25 y 26, encuentre una función de $g$.

**25.** $f(x) = 2x - 5$, $(f \circ g)(x) = -4x + 13$

**26.** $f(x) = \sqrt{2x+6}$, $(f \circ g)(x) = 4x^2$

En los problemas 27 y 28, exprese la función $F$ como una composición $f \circ g$ de dos funciones $f$ y $g$.

**27.** $F(x) = 2x^4 - x^2$ **28.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

En los problemas 29-36, los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -4)$ están sobre la gráfica de la función $y = f(x)$. Encuentre los puntos correspondientes sobre la gráfica, obtenidos por las transformaciones dadas.

**29.** La gráfica de $f$ desplazada 2 unidades hacia arriba.

**30.** La gráfica de $f$ desplazada 5 unidades hacia abajo.

**31.** La gráfica de $f$ desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

**32.** La gráfica de $f$ desplazada 1 unidad hacia la derecha.

**33.** La gráfica de $f$ desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

**34.** La gráfica de $f$ desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

**35.** La gráfica de $f$ reflejada en el eje $y$.

**36.** La gráfica de $f$ reflejada en el eje $x$.

En los problemas 37-40, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

***a***) $y = f(x) + 2$ ***b***) $y = f(x) - 2$
***c***) $y = f(x + 2)$ ***d***) $y = f(x - 5)$
***e***) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$

**37.**

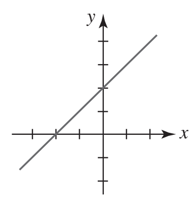



FIGURA 2.2.12 Gráfica para el problema 37

**38.**

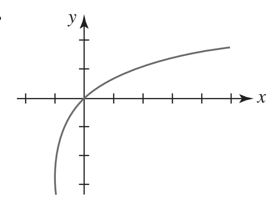



FIGURA 2.2.13 Gráfica para el problema 38

**39.**

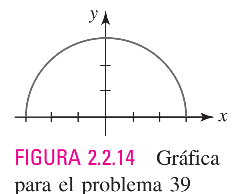



FIGURA 2.2.14 Gráfica para el problema 39

**40.**

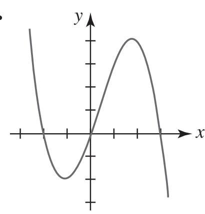



FIGURA 2.2.15 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

***a***) $y = f(x) + 1$ ***b***) $y = f(x) - 1$
***c***) $y = f(x + \pi)$ ***d***) $y = f(x - \pi/2)$
***e***) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$
***g***) $y = 3f(x)$ ***h***) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

**41.**

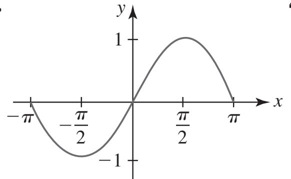



FIGURA 2.2.16 Gráfica para el problema 41

**42.**

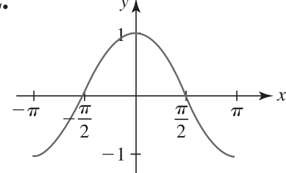



FIGURA 2.2.17 Gráfica para el problema 42

En los problemas 43-46, encuentre la ecuación de la gráfica final después que las transformaciones dadas se aplican a la gráfica de $y = f(x)$.

**43.** La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

**44.** La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ estirada verticalmente por un factor de 3 unidades y luego desplazada 2 unidades a la derecha.

**45.** La gráfica de $f(x) = x^4$ reflejada en el eje $x$ y luego desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

**46.** La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ reflejada en el eje $y$, luego desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

En los problemas 47 y 48, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si

***a***) $f$ es una función par y ***b***) $f$ es una función impar.

**47.**

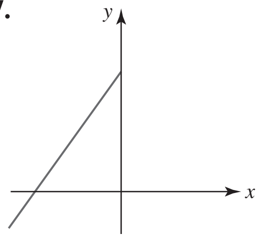



FIGURA 2.2.18 Gráfica para el problema 47

**48.**

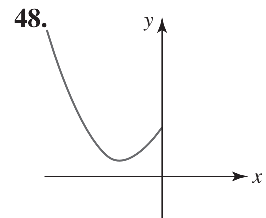



FIGURA 2.2.19 Gráfica para el problema 48

**49.** Complete la tabla, donde $f$ es una función par.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −1 | 2 | 10 | 8 | 0 |
| $g(x)$ | 2 | −3 | 0 | 1 | −4 |
| $(f \circ g)(x)$ | | | | | |

**50.** Complete la tabla, donde $g$ es una función impar.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −2 | −3 | 0 | −1 | −4 |
| $g(x)$ | 9 | 7 | −6 | −5 | 13 |
| $(g \circ f)(x)$ | | | | | |

**Un clásico matemático** En el análisis matemático de circuitos o señales, resulta conveniente definir una función especial que es 0 (apagado) hasta cierto número y luego es 1 (encendido) después de lo anterior. La **función de Heaviside**

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

recibe su nombre en honor al brillante y controvertido ingeniero eléctrico y matemático inglés **Oliver Heaviside** (1850-1925). La función $U$ también se denomina **función escalón unitario**.

En los problemas 51 y 52, trace la función dada. La función en el problema 52 algunas veces se denomina **función vagón o ventana**.

**51.** $y = 2U(x - 1) + U(x - 2)$

**52.** $y = U\left(x + \frac{1}{2}\right) - U\left(x - \frac{1}{2}\right)$

**53.** Encuentre la ecuación para la función $f$ ilustrada en la FIGURA 2.2.20 en términos de $U(x - a)$.

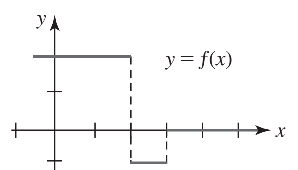



FIGURA 2.2.20 Gráfica para el problema 53

**54.** La función de Heaviside $U(x - a)$ suele combinarse con otras funciones por adición y multiplicación. Dado que $f(x) = x^2$, compare las gráficas de $y = f(x - 3)$ y $y = f(x - 3)U(x - 3)$.

En los problemas 55 y 56, trace la función dada.

**55.** $y = (2x - 5)U(x - 1)$

**56.** $y = x - xU(x - 3)$

## ≡ Piense en ello

**57.** Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es falsa o verdadera.

**58.** Suponga que $[-1, 1]$ es el dominio de $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el dominio de $y = f(x - 2)$?

**59.** Explique por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje $x$.

**60.** ¿Cuáles puntos, en caso de haber, sobre la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos; es decir, los mismos sobre la gráfica resultante después de un estiramiento o compresión vertical? ¿Después de una reflexión en el eje $x$? ¿Después de una reflexión en el eje $y$?

**61.** Suponga que el dominio de $f$ es $(-\infty, \infty)$. ¿Cuál es la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

**62.** Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ en la figura 2.2.1. Luego analice cómo obtener la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ para la función $f$ cuya gráfica se proporciona en la figura 2.2.15.

**63.** Suponga que $f(x) = x$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior. La diferencia de $f$ y $g$ es la función $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ denominada **parte fraccionaria de *x***. Explique el nombre y luego grafique $\text{frac}(x)$.

**64.** Use la notación de la reflexión de una gráfica en un eje para expresar la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ en términos de la función redondeo hacia el entero inferior anterior $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

# 2.3 Funciones polinomiales y racionales

**Introducción** En esta sección continúa el repaso de las funciones polinomiales y de las funciones racionales. Funciones como $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$, donde la variable $x$ se eleva a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de funciones polinomiales. En la sección precedente se vio que una **función polinomial** general $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

donde $n$ es un entero no negativo. Una **función racional** es el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{2}$$

donde $p$ y $q$ son funciones polinomiales.

**Funciones polinomiales** Las constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ en (1) se denominan **coeficientes**; el número $a_n$ se llama **coeficiente principal** y $a_0$ se denomina **término constante** del polinomio. Se dice que la mayor potencia de $x$ en un polinomio es el **grado** de éste. De modo que si $a_n \neq 0$, entonces se dice que $f(x)$ en (1) es de **grado *n***. Por ejemplo,

grado 5

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x + 8$$

coeficiente principal (3) — término constante (8)

es una función polinomial de grado 5.

Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$f(x) = a$, **función constante**,

$f(x) = ax + b$, **función lineal**,

$f(x) = ax^2 + bx + c$, **función cuadrática**,

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, **función cúbica**.

La función constante $f(x) = 0$ se denomina **polinomio cero**.

**Rectas** Sin duda, usted está familiarizado con el hecho de que las gráficas de una función constante y una función lineal son **rectas**. Puesto que el concepto de recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial, resulta conveniente revisar las ecuaciones de las rectas. En el plano $xy$ hay tres tipos de rectas: rectas horizontales, rectas verticales y rectas inclinadas u oblicuas.

**Pendiente** Se empezará con la recolección de geometría plana de que por dos puntos distintos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano pasa una sola recta $L$. Si $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Suele acostumbrarse denotar el **cambio en *y*** o **ascenso vertical** de la recta por $\Delta y = y_2 - y_1$ y el **cambio en *x*** o **recorrido horizontal** de la recta por $\Delta x = x_2 - x_1$, de modo que (3) se escribe $m = \Delta y/\Delta x$. Vea la FIGURA 2.3.1. Como se indica en la FIGURA 2.3.2, cualquier par de puntos distintos sobre una recta con pendiente, por ejemplo, por $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ y $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$, determina la misma pendiente. En otras palabras, la pendiente de una recta es independiente de la elección de los puntos sobre la recta.

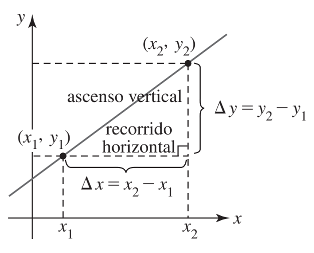


FIGURA 2.3.1 Pendiente de una recta

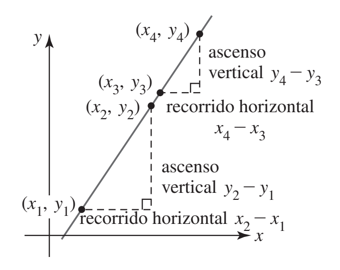
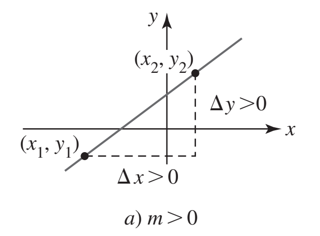
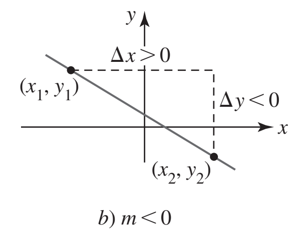


FIGURA 2.3.2 Triángulos semejantes

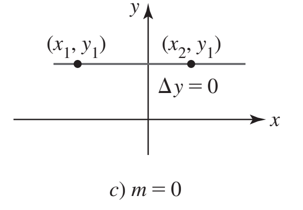
En la FIGURA 2.3.3 se comparan las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 2.3.3*a*) vemos, al leer la gráfica de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) asciende cuando $x$ crece. La figura 2.3.3*b*) muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) cae cuando $x$ crece. Si $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y así su ascenso vertical es $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$. Por tanto, con base en (3) la pendiente es cero ($m = 0$). Vea la figura 2.3.3*c*). Si $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y así su recorrido horizontal es $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$. En este caso se dice que la pendiente de la recta está **indefinida** o que la recta no tiene pendiente. Vea la figura 2.3.3*d*). Sólo rectas con pendiente son gráficas de funciones.



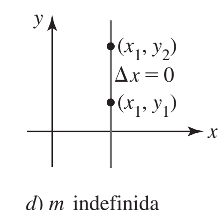
*a*) $m > 0$



*b*) $m < 0$



*c*) $m = 0$



*d*) $m$ indefinida

FIGURA 2.3.3 Rectas con pendiente *a*)-*c*); recta sin pendiente *d*)

**Ecuaciones de rectas** Para encontrar la ecuación de una recta $L$ con pendiente $m$, se supone que $(x_1, y_1)$ está sobre la recta. Si $(x, y)$ representa cualquier otro punto sobre $L$, entonces (3) proporciona

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Al multiplicar ambos miembros de la última igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante. La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por $(x_1, y_1)$ con pendiente $m$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{4}$$

Cualquier recta que no sea vertical debe cruzar el eje $y$. Si la intersección $y$ es $(0, b)$, entonces con $x_1 = 0, y_1 = b$, (4) proporciona $y - b = m(x - 0)$. La última ecuación se reduce a la **ecuación pendiente-intercepto** de la recta

$$y = mx + b. \tag{5}$$

**EJEMPLO 1** Ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, 3)$ y $(-2, 5)$.

**Solución** Primero se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Con base en (3),

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Luego, la ecuación (4) de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen proporciona $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ o $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ■

Una ecuación de *cualquier* recta en el plano es un caso especial de la **ecuación lineal** general

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

donde $A$, $B$ y $C$ son constantes reales. La característica que proporciona a (6) su nombre *lineal* es que las variables $x$ y $y$ sólo aparecen a la primera potencia. Los casos de interés especial son

$$A = 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{C}{B}, \tag{7}$$

$$A \neq 0, B = 0, \text{ da } x = -\frac{C}{A}, \tag{8}$$

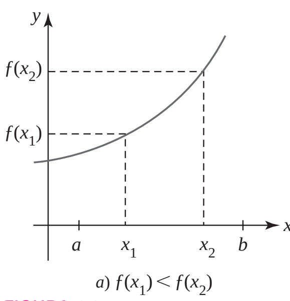
$$A \neq 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{9}$$

De estas ecuaciones, la primera y la tercera definen funciones. Al volver a identificar a $-C/B$ en (7) como $a$ se obtiene una función constante $y = a$. Al reidentificar a $-A/B$ y $-C/B$ en (9) como $a$ y $b$, respectivamente, se obtiene la forma de una función lineal $f(x) = ax + b$ que, excepto por algunos símbolos, es la misma que (5). Al volver a identificar $-C/A$ en (8) como $a$ se obtiene la ecuación de una recta vertical $x = a$, que no es una función.

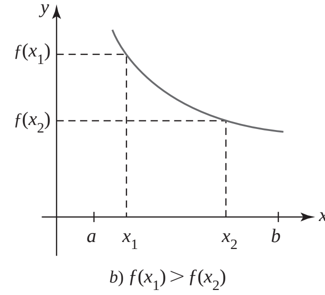
**Funciones crecientes-decrecientes** Recién acabamos de ver en las figuras 2.3.3*a*) y 2.3.3*b*) que si $a > 0$ (lo cual, desempeña la parte de $m$), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando $x$ crece, mientras que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando $x$ crece. Los conceptos creciente y decreciente pueden extenderse a *cualquier* función. Se dice que una función $f$ es

- **creciente** sobre un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (10)
- **decreciente** sobre un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (11)

En la FIGURA 2.3.4*a*) la función $f$ es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, mientras $f$ es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ en la figura 2.3.4*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$ crece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 0$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a < 0$.




*a*) $f(x_1) < f(x_2)$




*b*) $f(x_1) > f(x_2)$

FIGURA 2.3.4 Función creciente en *a*); función decreciente en *b*)

Esta suposición significa que $L_1$ y $L_2$ son rectas no verticales.

**Rectas paralelas y perpendiculares** Si $L_1$ y $L_2$ son dos rectas distintas *con pendiente*, entonces necesariamente $L_1$ y $L_2$ son paralelas o se cortan. Si las rectas se cortan formando un ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Es posible determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares al examinar sus pendientes.

## Rectas paralelas y perpendiculares

Suponga que $L_1$ y $L_2$ son rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$, respectivamente. Entonces

- $L_1$ es **paralela** a $L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$, y
- $L_1$ es **perpendicular** a $L_2$ si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

### EJEMPLO 2 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden volver a escribirse en las formas de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = -3x + 2$ y $y = -3x + \frac{15}{2}$, respectivamente. Como se destaca en color, la pendiente de cada recta es $-3$. En consecuencia, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se muestran en la FIGURA 2.3.5. ■

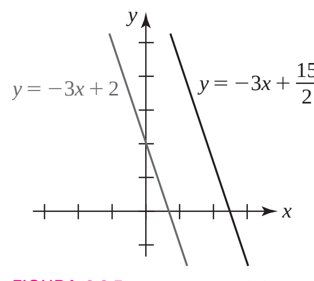



FIGURA 2.3.5 Rectas paralelas en el ejemplo 2

**EJEMPLO 3** Rectas perpendiculares

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

**Solución** Al despejar $y$, la ecuación lineal dada produce la forma de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica se proporciona en la FIGURA 2.3.6, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, a saber: $-\frac{3}{4}$. Puesto que $(0, -3)$ es la intersección $y$ de la recta requerida, por (5) se concluye que su ecuación es $y = -\frac{3}{4}x - 3$. La gráfica de la última ecuación es la recta por $(0, -3)$ en la figura 2.3.6. ■

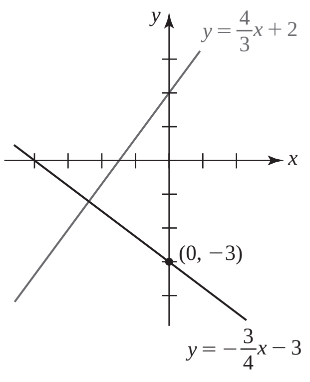



FIGURA 2.3.6 Rectas perpendiculares en el ejemplo 3

**Funciones cuadráticas** La función elevar al cuadrado $y = x^2$ que se abordó en las secciones 2.1 y 2.2 es un elemento de una familia de funciones denominadas **funciones cuadráticas**; es decir, funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, $b$ y $c$ son constantes. Las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**, simplemente son transformaciones rígidas y no rígidas de la gráfica de $y = x^2$ mostrada en la FIGURA 2.3.7.

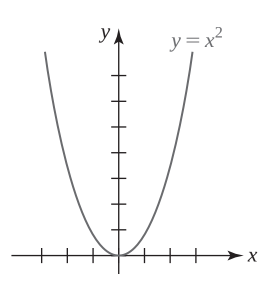



FIGURA 2.3.7 Gráfica de la parábola más simple

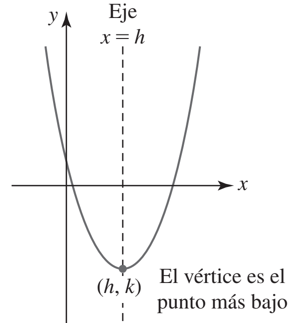
**Vértice y eje** Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba $a > 0$ (o hacia abajo $a < 0$), el punto más bajo (más alto) $(h, k)$ sobre la parábola se denomina **vértice**. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice $(h, k)$. La recta $x = h$ se denomina **eje** de la parábola. Vea la FIGURA 2.3.8.

**Forma normal** El vértice $(h, k)$ de una parábola puede determinarse al volver a plantear la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en **forma normal**

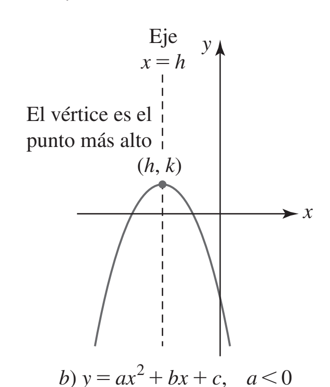
$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{12}$$

La forma (12) se obtiene a partir de $f(x) = ax^2 + bx + c$ al completar el cuadrado en $x$. Con la ayuda del cálculo diferencial es posible encontrar el vértice de la parábola sin completar el cuadrado.

Como se muestra con el siguiente ejemplo, al trazar las intersecciones y el vértice puede obtenerse un bosquejo razonable de la parábola. La forma en (12) indica que su gráfica es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada horizontalmente $|h|$ unidades y desplazada verticalmente $|k|$ unidades.




a) $y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$




b) $y = ax^2 + bx + c, \quad a < 0$

FIGURA 2.3.8 Vértice y eje de una parábola

**EJEMPLO 4** Gráfica usando las intersecciones y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

**Solución** Puesto que $a = 1 > 0$, se sabe que la parábola se abre hacia arriba. A partir de $f(0) = -3$ obtenemos la intersección $(0, -3)$. Para averiguar si hay alguna intersección $x$, resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ por factorización o aplicando la fórmula cuadrática. Con base en $(x + 1)(x - 3) = 0$ encontramos las soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones $x$ son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. Para localizar el vértice, se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

Así, la forma estándar es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Al comparar la última ecuación con (12) se identifica $h = 1$ y $k = -4$. Podemos concluir que el vértice se encuentra en el punto $(1, -4)$. Al usar esta información se traza una parábola que pasa por estos cuatro puntos como se muestra en la FIGURA 2.3.9.

Al encontrar el vértice de una parábola, de manera automática se determina el rango de la función cuadrática. Como se muestra claramente en la figura 2.3.9, el rango de $f$ es el intervalo $[-4, \infty)$ sobre el eje $y$. En la figura 2.3.9 también se muestra que $f$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 1]$, pero creciente sobre $[1, \infty)$. ■

**Funciones polinomiales de orden superior** La gráfica de *toda* función lineal $f(x) = ax + b$ es una recta y la gráfica de *toda* función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Estas declaraciones descriptivas definitivas no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de orden superior. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas posibles. En general, graficar una función polinomial $f$ de grado $n \geq 3$ demanda el uso

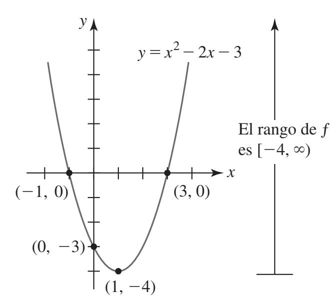



FIGURA 2.3.9 Parábola en el ejemplo 4

de un instrumento de cálculo o graficado. No obstante, al tener en cuenta el desplazamiento, el comportamiento extremo, las intersecciones y la simetría, es posible en muchos casos trazar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de orden superior a la vez que el trazado de puntos se mantiene en un mínimo.

**Comportamiento final** En términos aproximados, el **comportamiento final** de *cualquier* función $f$ es simplemente la forma en que $f$ se comporta para valores muy grandes de $|x|$. En el caso de una función polinomial $f$ de grado $n$, su gráfica semeja la gráfica de $y = a_n x^n$ para valores grandes de $|x|$. Para ver por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica de la función polinomial con un solo término $y = -2x^3$ cuando $|x|$ es grande, se factorizará la potencia más alta de $x$; es decir, $x^3$:

estos dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande

$$f(x) = x^3\left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right). \tag{13}$$

Al dejar que $|x|$ crezca sin límite, tanto $4/x$ como $5/x^3$ pueden aproximarse a cero tanto como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función $f$ en (13) son muy bien aproximados por los valores de $y = -2x^3$. En general, sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento extremo para funciones polinomiales. Para interpretar las flechas en la FIGURA 2.3.10 se analizarán las flechas en, por ejemplo, la figura 2.3.10*c*), donde se supone que $n$ es impar y que $a_n > 0$. La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indica que cuando $x$ se vuelve no acotada en la dirección negativa, los valores de $f(x)$ son decrecientes. Planteado en otros términos, la gráfica está apuntando hacia abajo. En forma semejante, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indica que cuando $x$ se vuelve no acotada en la dirección positiva, los valores de $f(x)$ son crecientes (la gráfica apunta hacia arriba). El comportamiento extremo ilustrado en las figuras 2.3.10*a*) y 2.3.10*c*) puede verse en las gráficas que se muestran en la FIGURA 2.3.11 y FIGURA 2.3.12, respectivamente. Las gráficas de las funciones $y = -x$, $y = -x^2$, $y = -x^3$, . . . , $y = -x^8$ son las gráficas en las figuras 2.3.11 y 2.3.12 reflejadas en el eje $x$, de modo que su comportamiento extremo es como se muestra en las figuras 2.3.10*b*) y 2.3.10*d*).

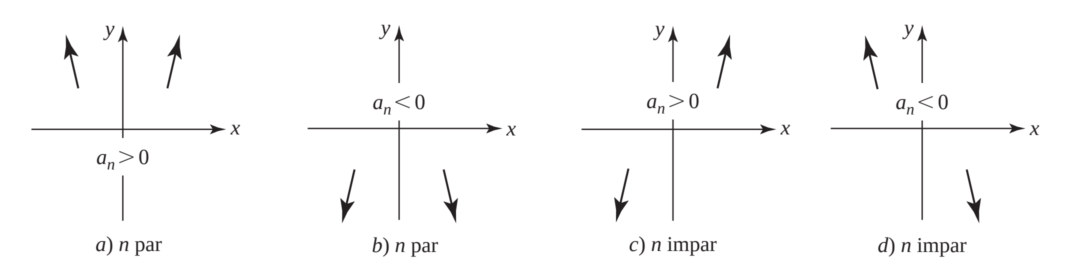



FIGURA 2.3.10 El comportamiento extremo de una función polinomial $f$ depende de su grado $n$ y el signo de su coeficiente principal

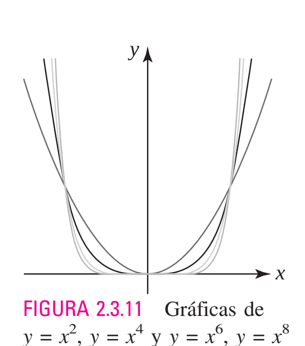


FIGURA 2.3.11 Gráficas de $y = x^2$, $y = x^4$ y $y = x^6$, $y = x^8$

FIGURA 2.3.12 Gráficas de $y = x$, $y = x^3$ y $y = x^5$, $y = x^7$

**Simetría de las funciones polinomiales** Resulta fácil identificar por inspección las funciones polinomiales cuyas gráficas poseen **simetría** con respecto al eje $y$ o al origen. La palabras *par* e *impar* tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$ se cumplen para funciones polinomiales donde todas las potencias de $x$ son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

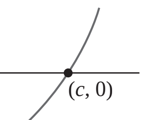
potencias pares — potencias impares — potencias mixtas

$$\underbrace{f(x) = 5x^4 - 7x^2}_{\text{función par}} \qquad \underbrace{f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x}_{\text{función impar}} \qquad \underbrace{f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2}_{\text{ni par ni impar}}$$

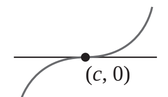
Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es una función par porque todas las potencias son enteros pares; el término constante 6 es en realidad $6x^0$, y 0 es un entero no negativo par.

**Intersecciones de las funciones polinomiales** La gráfica de toda función polinomial $f$ pasa por el eje $y$ puesto que $x = 0$ está en el dominio de la función. La intersección $y$ es el punto

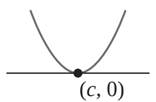
$(0, f(0))$. Los **ceros** reales de una función polinomial son las coordenadas $x$ de las **intersecciones $x$** de su gráfica. Un número $c$ es un cero de una función polinomial $f$ de grado $n$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f$; es decir, $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $(x - c)^m$ es un factor de $f$, donde $m > 1$ es un entero positivo, y $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de $f$, entonces se dice que $c$ es un **cero repetido** o **cero de multiplicidad $m$**. Cuando $m = 1$, $c$ se denomina **cero simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son ceros simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$ puesto que $f$ puede escribirse como $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, mientras que 5 es un cero repetido o un cero de multiplicidad 2 para $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. El comportamiento de la gráfica de $f$ en una intersección $x$ $(c, 0)$ depende de si $c$ es un cero simple o un cero de multiplicidad $m > 1$, donde $m$ es un entero impar o par. Vea la FIGURA 2.3.13.




*a*) Cero simple




*b*) Cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$




*c*) Cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$

FIGURA 2.3.13 Intersecciones $x$ de una función polinomial $f$

## Intersecciones $x$ de polinomios

- Si $c$ es un cero simple, entonces la gráfica de $f$ pasa directamente por el eje $x$ en $(c, 0)$. Vea la figura 2.3.13*a*).
- Si $c$ es un cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, entonces la gráfica de $f$ pasa directamente por el eje $x$ pero se achata en $(c, 0)$. Vea la figura 2.3.13*b*).
- Si $c$ es un cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, entonces la gráfica de $f$ no pasa por el eje $x$, sino que es tangente a éste, o lo toca, el eje $x$ en $(c, 0)$. Vea la figura 2.3.13*c*).

En el caso en que $c$ es un cero simple o un cero de multiplicidad impar, $f(x)$ cambia de signo en $(c, 0)$, mientras que si $c$ es un cero de multiplicidad par, $f(x)$ no cambia de signo en $(c, 0)$. Observamos que dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio, las gráficas en la figura 2.3.13 pueden estar reflejadas en el eje $x$.

FIGURA 2.3.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

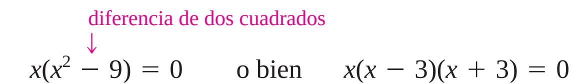
## EJEMPLO 5 Gráficas de funciones polinomiales

Grafique

***a***) $f(x) = x^3 - 9x$ ***b***) $g(x) = (1 - x)(x + 1)^2$ ***c***) $h(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

**Solución**

***a***) Al ignorar todos los términos menos el primero observamos que la gráfica de $f$ semeja la gráfica de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de $f$ se muestra en la figura 2.3.10*c*). Puesto que todas las potencias son enteros impares, $f$ es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. Al hacer $f(x) = 0$, a partir de




$$x(x^2 - 9) = 0 \quad \text{o bien} \quad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

notamos que los ceros de $f$ son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Puesto que estos números son ceros simples, la gráfica pasa directamente por las intersecciones $x$ en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ como se muestra en la FIGURA 2.3.14.

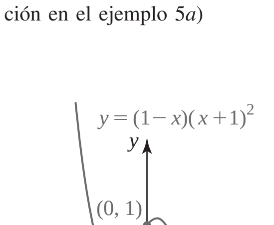


FIGURA 2.3.15 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

***b***) Al distribuir la multiplicación de los factores, $g$ es la misma que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ de modo que se observa que la gráfica de $g$ semeja la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo opuesto del comportamiento final de la función en el inciso *a*). Debido a que hay potencias pares e impares de $x$, $g$ no es par ni impar; su gráfica no posee simetría con respecto al eje $y$ o al origen. En virtud de que $-1$ es un cero de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje $x$ en $(-1, 0)$. Puesto que 1 es un cero simple, la gráfica pasa directamente por el eje $x$ en $(1, 0)$. Vea la FIGURA 2.3.15.

***c***) Al inspeccionar $h$ se observa que su gráfica semeja la gráfica de $y = -x^4$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de $h$ se muestra en la figura 2.3.10*b*). La función $h$ no es par ni impar. A partir de la forma factorizada de $h(x)$, se ve que $-4$ es un cero simple y así la gráfica de $h$ pasa directamente por el eje $x$ en $(-4, 0)$. Puesto que 2 es un cero de multiplicidad 3, su gráfica se achata cuando pasa por la intersección $x$ $(2, 0)$. Vea la FIGURA 2.3.16. ■

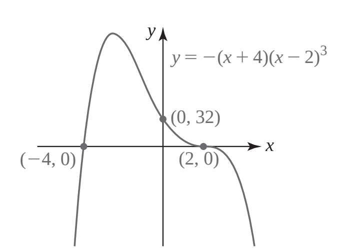



FIGURA 2.3.16 Gráfica de la función en el ejemplo 5*c*)

**Funciones racionales** Graficar una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es un poco más complicado que graficar una función polinomial porque además de estar atento a las intersecciones, simetría y desplazamiento/reflexión/estiramiento de gráficas conocidas, también es necesario prestar atención al dominio de $f$ y los grados de $p(x)$ y $q(x)$. Estas dos últimas cuestiones son importantes para determinar si la gráfica de una función racional posee *asíntotas*.

**Intersecciones de funciones racionales** La **intersección *y*** de la gráfica de $f(x) = p(x)/q(x)$ es el punto $(0, f(0))$ en el supuesto de que 0 está en el dominio de $f$. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje $y$ puesto que $f(0)$ no está definido. Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las **intersecciones *x*** de la gráfica de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ son los puntos cuyas coordenadas $x$ son los ceros reales del numerador $p(x)$. En otras palabras, la única forma en que es posible que $f(x) = p(x)/q(x) = 0$ es cuando $p(x) = 0$. Así, para $f(x) = (1 - x)/x$, $1 - x = 0$ se obtiene $x = 1$ y entonces $(1, 0)$ es una intersección $x$ de la gráfica de $f$.

**Asíntotas** La gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener asíntotas. Para los objetivos de este libro, las asíntotas pueden ser una recta horizontal, una recta vertical o una recta inclinada. En un nivel práctico, las asíntotas vertical y horizontal de la gráfica de una función racional $f$ pueden determinarse por inspección. Así, por el bien del análisis se supondrá que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0,\ b_m \neq 0, \tag{14}$$

representa una función racional general. El grado de $p(x)$ es $n$ y el grado de $q(x)$ es $m$.

### Asíntotas de gráficas de funciones racionales

Suponga que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) *no tienen factores comunes*.

- Si $a$ es un cero real de $q(x)$, entonces $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de $f$.
- Si $n = m$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los coeficientes principales) es una **asíntota horizontal** para la gráfica de $f$.
- Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de $f$.
- Si $n > m$, entonces la gráfica de $f$ *no* tiene **asíntota horizontal**.
- Si $n = m + 1$, entonces el cociente $y = mx + b$ de $p(x)$ y $q(x)$ es una **asíntota inclinada** para la gráfica de $f$.

Con base en la lista anterior observamos que las asíntotas horizontal e inclinada son mutuamente excluyentes. En otras palabras, la gráfica de una función racional $f$ no puede tener una asíntota inclinada $y$ una asíntota horizontal.

**EJEMPLO 6** Gráficas de funciones racionales

Grafique

***a***) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$  ***b***) $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

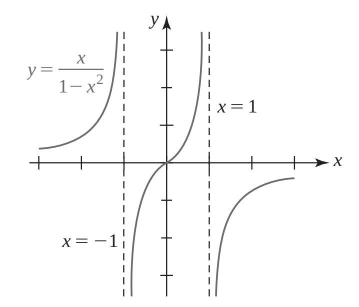


FIGURA 2.3.17 Gráfica de la función en el ejemplo 6*a*)

**Solución**

***a***) Se empieza con la observación de que el numerador $p(x) = x$ y el denominador $q(x) = 1 - x^2$ no tienen factores comunes. También, puesto que $f(-x) = -f(x)$, la función $f$ es impar. En consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Debido a que $f(0) = 0$, la intersección $y$ es $(0, 0)$. Además, $p(x) = x = 0$ implica $x = 0$, de modo que la única intersección es $(0, 0)$. Los ceros del denominador $q(x) = 1 - x^2$ son $\pm 1$. Así, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Puesto que el grado del numerador $x$ es 1 y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), se concluye que $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f$. La gráfica consta de tres *ramas* distintas: una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y una a la derecha de la recta $x = 1$. Vea la FIGURA 2.3.17.

*b*) De nuevo, observe que el numerador $p(x) = x^2 - x - 6$ y el denominador $q(x) = x - 5$ de $g$ no tienen factores comunes. Asimismo, $f$ no es impar ni par. A partir de $f(0) = \frac{6}{5}$ se obtiene la intersección $y$ $\left(0, \frac{6}{5}\right)$. Con base en $p(x) = x^2 - x - 6 = 0$ o $(x + 2)(x - 3) = 0$ observamos que $-2$ y $3$ son ceros de $p(x)$. Las intersecciones $x$ son $(-2, 0)$ y $(3, 0)$. Resulta evidente que el cero de $q(x) = x - 5$ es 5, de modo que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical. Por último, a partir del hecho de que el grado de $p(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) *es exactamente mayor por uno* que el grado de $q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota inclinada. Para encontrarla, $p(x)$ se divide entre $q(x)$. Ya sea por división larga o división sintética, el resultado

$y = x + 4$ es la asíntota inclinada
↓
$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = x + 4 + \frac{14}{x - 5}$$

muestra que la asíntota inclinada es $y = x + 4$. La gráfica consta de dos ramas: una a la izquierda de la recta $x = 5$ y otra a la derecha de la recta $x = 5$. Vea la FIGURA 2.3.18. ■

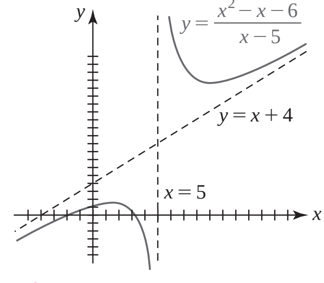



FIGURA 2.3.18 Gráfica de la función en el ejemplo 6*b*)

**Posdata: Gráfica con un hueco** En todo el análisis de las asíntotas se supuso que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) no tenían factores comunes. Se sabe que si $q(a) = 0$ y $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ necesariamente es una asíntota vertical para la gráfica de $f$. Sin embargo, cuando $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces $x = a$ *puede no ser* una asíntota; en la gráfica puede haber simplemente un **hueco**.

◀ Si $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces por el teorema de factorización del álgebra, $x - a$ es un factor tanto de $p$ como de $q$.

## EJEMPLO 7 Gráfica con un hueco

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

**Solución** Aunque los ceros de $x^2 - 1 = 0$ son $\pm 1$, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Observe que el numerador $p(x)$ y el denominador $q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que puede cancelarse en el supuesto de que $x \neq -1$:

la igualdad se cumple para $x \neq -1$
↓
$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x - 3}{x - 1}. \tag{15}$$

Graficamos $y = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $x \neq -1$, al observar que la intersección $y$ es $(0, 3)$, una intersección $x$ es $(3, 0)$, una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. Aunque $x = -1$ no es una asíntota vertical, el hecho de que $f$ no está definida en ese número se representa al dibujar un círculo o hueco abierto en la gráfica en el punto correspondiente a $(-1, 2)$. Vea la FIGURA 2.3.19. ■

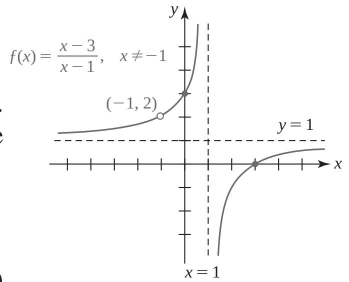



FIGURA 2.3.19 Gráfica de la función en el ejemplo 7

◀ La coordenada $y$ del hueco es el valor de la fracción reducida (15) en $x = -1$.

### $f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

En las dos últimas secciones hemos trabajado principalmente con funciones polinomiales. Las funciones polinomiales constituyen los objetos fundamentales de una clase conocida como **funciones algebraicas**. En esta sección vimos que una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. En general, una función algebraica implica un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas de funciones polinomiales. Así,

$$y = 2x^2 - 5x, \quad y = \sqrt[3]{x^2}, \quad y = x^4 + \sqrt{x^2 + 5} \quad \text{y} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x^2 + 7}$$

son funciones algebraicas. Empezando con la siguiente sección consideraremos funciones que pertenecen a una clase diferente conocida como **funciones trascendentes**. Una función trascendente $f$ se define como una función que *no* es algebraica. Las seis funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica son ejemplos de funciones trascendentes.

## 2.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación de la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente indicada.

**1.** $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{1}{10}$
**3.** 0 **4.** $-2$
**5.** $-1$ **6.** indefinida

En los problemas 7-10, encuentre la pendiente y las intersecciones *x* y *y* de la recta dada. Grafique la recta.

**7.** $3x - 4y + 12 = 0$ **8.** $\frac{1}{2}x - 3y = 3$
**9.** $2x - 3y = 9$ **10.** $-4x - 2y + 6 = 0$

En los problemas 11-16, encuentre una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

**11.** Pasa por (2, 3) y (6, −5)
**12.** Pasa por (5, −6) y (4, 0)
**13.** Pasa por (−2, 4) y es paralela a $3x + y - 5 = 0$
**14.** Pasa por (5, −7) y es paralela al eje *y*.
**15.** Pasa por (2, 3) y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$
**16.** Pasa por (−5, −4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 11).

En los problemas 17 y 18, encuentre una función lineal $f(x) = ax + b$ que cumpla las dos condiciones dadas.

**17.** $f(-1) = 5, f(1) = 6$
**18.** $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 19 y 20, encuentre una ecuación de la recta *L* que se muestra en la figura dada.

**19.**

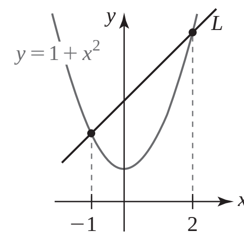



FIGURA 2.3.20 Gráfica para el problema 19

**20.**

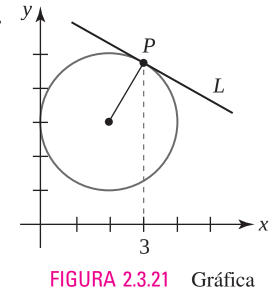



FIGURA 2.3.21 Gráfica para el problema 20

En los problemas 21-26, considere la función cuadrática *f*.

*a*) Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de *f*.
*b*) Exprese la función *f* en forma normal.
*c*) Encuentre el vértice y el eje de simetría.
*d*) Trace la gráfica de *f*.
*e*) ¿Cuál es el rango de *f*?
*f*) ¿En qué intervalo es creciente *f*? ¿Y decreciente?

**21.** $f(x) = x(x + 5)$ **22.** $f(x) = -x^2 + 4x$
**23.** $f(x) = (3 - x)(x + 1)$ **24.** $f(x) = (x - 2)(x - 6)$
**25.** $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **26.** $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

En los problemas 27-32, describa con palabras la forma en que es posible obtener la gráfica de la función dada a partir de $y = x^2$ por medio de transformaciones rígidas o no rígidas.

**27.** $f(x) = (x - 10)^2$ **28.** $f(x) = (x + 6)^2$
**29.** $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$ **30.** $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$
**31.** $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$ **32.** $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 33-42, proceda como en el ejemplo 5 y trace la gráfica de la función polinomial dada *f*.

**33.** $f(x) = x^3 - 4x$ **34.** $f(x) = 9x - x^3$
**35.** $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$ **36.** $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$
**37.** $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$
**38.** $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$
**39.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ **40.** $f(x) = x^2(x - 2)^2$
**41.** $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ **42.** $f(x) = x^5 - 4x^3$

En los problemas 43-48, relacione la gráfica dada con una de las funciones polinomiales en *a*)-*f*).

*a*) $f(x) = x^2(x - 1)^2$ *b*) $f(x) = -x^3(x - 1)$
*c*) $f(x) = x^3(x - 1)^3$ *d*) $f(x) = -x(x - 1)^3$
*e*) $f(x) = -x^2(x - 1)$ *f*) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

**43.**

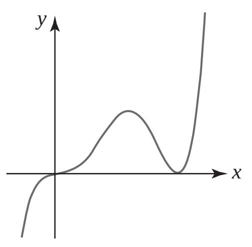



FIGURA 2.3.22 Gráfica para el problema 43

**44.**

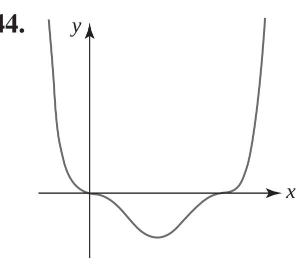



FIGURA 2.3.23 Gráfica para el problema 44

**45.**

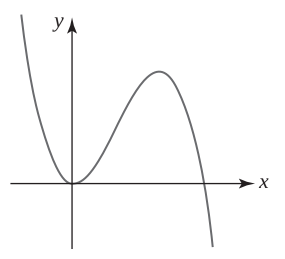



FIGURA 2.3.24 Gráfica para el problema 45

**46.**

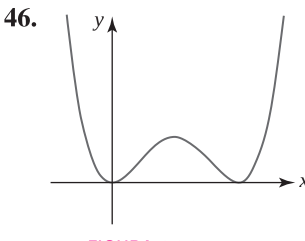



FIGURA 2.3.25 Gráfica para el problema 46

**47.**

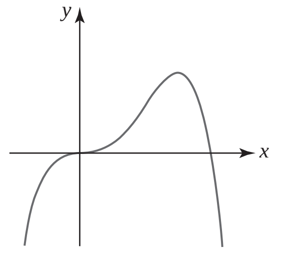



FIGURA 2.3.26 Gráfica para el problema 47

**48.**

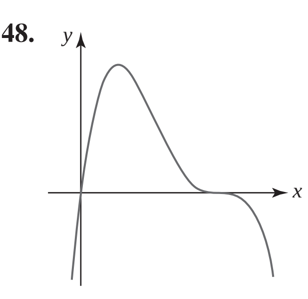



FIGURA 2.3.27 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49-62, encuentre todas las asíntotas para la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones $x$ y $y$ de la gráfica. Trace la gráfica de $f$.

**49.** $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

**50.** $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

**51.** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

**52.** $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

**53.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

**54.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

**55.** $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

**56.** $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

**57.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

**58.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

**59.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

**60.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

**61.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

**62.** $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

**63.** Determine si los números $-1$ y 2 están en el rango de la función racional $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 4}$.

**64.** Determine los puntos donde la gráfica de $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$ corta su asíntota horizontal.

## ≡ Modelos matemáticos

**65. Temperaturas relacionadas** La relación funcional entre grados Celsius $T_C$ y grados Fahrenheit $T_F$ es lineal. Exprese $T_F$ como una función de $T_C$ si (0 °C, 32 °F) y (60 °C, 140 °F) están en la gráfica de $T_F$. Muestre que 100 °C es equivalente al punto de ebullición Fahrenheit 212 °F. Vea la FIGURA 2.3.28.

**66. Temperaturas relacionadas** La relación funcional entre grados Celsius $T_C$ y unidades kelvin $T_K$ es lineal. Exprese $T_K$ como una función de $T_C$ dado que (0 °C, 273 K) y (27 °C, 300 K) están en la gráfica de $T_K$. Exprese el punto de ebullición 100 °C en unidades kelvin. El cero absoluto se define como 0 K. ¿A qué es igual esto en grados Celsius? Exprese $T_K$ como una función lineal de $T_F$. ¿A qué es igual 0 K en grados Fahrenheit? Vea la figura 2.3.28.

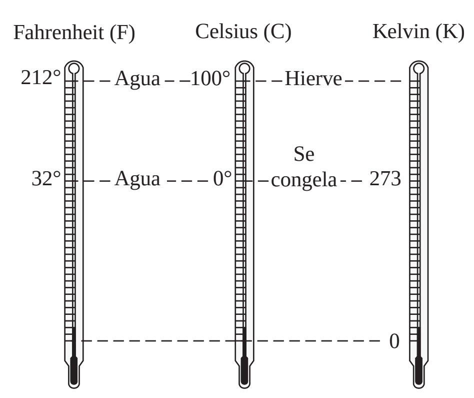



FIGURA 2.3.28 Termómetros para los problemas 65 y 66

**67. Interés simple** En interés simple la cantidad $A$ devengada con el paso del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde $P$ es el capital, $t$ se mide en años y $r$ es la tasa de interés anual (expresada como un decimal). Calcule $A$ al cabo de 20 años si el capital es $P = 1\,000$ y la tasa de interés anual es 3.4%. ¿En qué instante se cumple que $A = 2\,200$?

**68. Depreciación lineal** La depreciación de línea recta, o depreciación lineal, consta de un artículo que pierde toda su utilidad inicial de $A$ dólares a lo largo de un periodo de $n$ años por una cantidad $A/n$ anual. Si un artículo que cuesta $20 000 cuando está nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine la función lineal que proporciona el valor $V$ después de $x$ años, donde $0 \le x \le 25$. ¿Cuál es el valor del artículo al cabo de 10 años?

**69.** Una pelota se lanza hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 96 pies/s. La altura que alcanza la pelota con respecto al suelo está dada por la función cuadrática $s(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instante la pelota está en el suelo? Grafique $s$ sobre el intervalo de tiempo para el cual $s(t) \ge 0$.

**70.** En el problema 69, ¿en qué instante la pelota está a 80 pies por arriba del piso? ¿Cuán alto asciende la pelota?

## ≡ Piense en ello

**71.** Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si $x$ se cambia por 1 unidad, ¿cuántas unidades cambia $y$? ¿Si $x$ se cambia por 2 unidades? ¿Si $x$ se cambia por $n$ unidades ($n$ un entero positivo)?

**72.** Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geométricamente para $a > 0$.

**73.** ¿Cómo encontraría una ecuación de la recta que es perpendicular a la bisectriz del segmento de recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$?

**74.** Usando sólo los conceptos presentados en esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el triángulo con vértices (2, 3), $(-1, -3)$ y (4, 2) es rectángulo?

# 2.4 Funciones trascendentes

**Introducción** En las dos primeras secciones de esta unidad analizamos varias propiedades y gráficas de **funciones algebraicas**. En las tres secciones siguientes estudiaremos las **funciones trascendentes**. Básicamente, una función trascendente $f$ es una función que no es algebraica. Una función trascendente puede ser tan simple como la función potencia $y = x^n$, donde la potencia es un número irracional, pero las conocidas funciones trascendentes de precálculo en matemáticas son las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponencial y logarítmica. En esta sección se analizan las seis funciones trigonométricas y sus gráficas. En la sección 2.5 se considerarán las funciones trigonométricas inversas y en la sección 2.6, las funciones exponencial y logarítmica.

Para un repaso de las bases de la circunferencia unitaria y trigonometría de triángulos rectángulos, vea las *Páginas de recursos* al final del texto.

**Gráficas del seno y coseno** Recuerde de precálculo en matemáticas que las funciones trigonométricas seno y coseno tienen **periodo** $2\pi$:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{1}$$

Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica sobre un intervalo de longitud igual a su periodo es un **ciclo** de su gráfica. La gráfica de una función periódica se obtiene fácilmente al trazar de manera repetida un ciclo de su gráfica. En la FIGURA 2.4.1 se muestra un ciclo de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$; la gráfica de $f$ sobre, por ejemplo, el intervalo $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$ es exactamente la misma que la gráfica sobre $[0, 2\pi]$. Debido a que $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$, la función seno es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

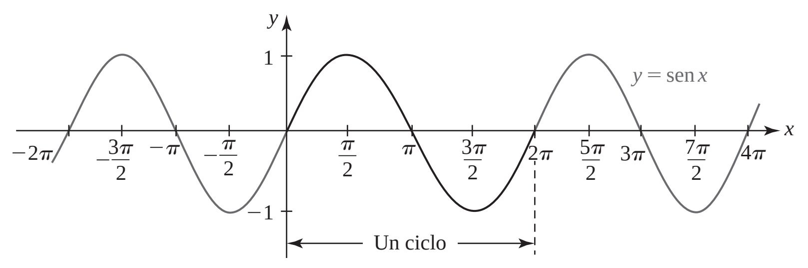



FIGURA 2.4.1 Gráfica de $y = \operatorname{sen} x$

La FIGURA 2.4.2 muestra un ciclo de $g(x) = \cos x$ sobre $[0, 2\pi]$ junto con la extensión de ese ciclo hacia los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, para la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La función coseno es una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$, de modo que en la figura 2.4.2 puede verse que su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$.

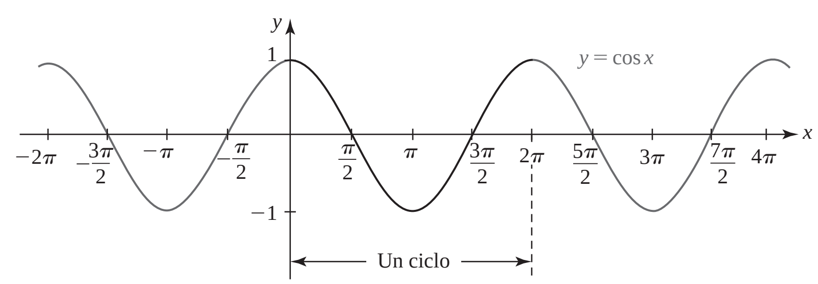



FIGURA 2.4.2 Gráfica de $y = \cos x$

Las funciones seno y coseno están definidas para todos los números reales $x$. También, resulta evidente en las figuras 2.4.1 y 2.4.2 que

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \le \cos x \le 1, \tag{2}$$

o bien, de manera equivalente, $|\operatorname{sen} x| \le 1$ y $|\cos x| \le 1$. En otras palabras,

- el dominio de sen $x$ y cos $x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango de sen $x$ y cos $x$ es $[-1, 1]$.

**Intersecciones** En este curso y en cursos subsecuentes de matemáticas es importante conocer las coordenadas $x$ de las intersecciones $x$ de las gráficas seno y coseno; en otras palabras, los ceros de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$. A partir de la gráfica seno de la figura 2.4.1 observamos que los ceros de la función seno, o los números para los cuales sen $x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros de $\pi$. A partir de la gráfica coseno de la figura 2.4.2 notamos que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si $n$ representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. En consecuencia, los **ceros** de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ pueden escribirse en forma breve como:

- $\text{sen } x = 0$ para $x = n\pi$, $n$ un entero, (3)
- $\cos x = 0$ para $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $n$ un entero. (4)

Valores numéricos adicionales importantes de las funciones seno y coseno sobre el intervalo $[0, \pi]$ se proporcionan en la tabla siguiente.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

(5)

Usted debe poder discernir los valores sen $x$ y $\cos x$ sobre $[\pi, 2\pi]$ a partir de esta tabla usando el concepto de circunferencia unitaria y un ángulo de referencia. Por supuesto, fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ es posible determinar valores funcionales correspondientes usando periodicidad.

**Otras funciones trigonométricas** Cuatro funciones trigonométricas adicionales se definen en términos de cocientes o recíprocos de las funciones seno y coseno. La **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se definen, respectivamente, por

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \tag{6}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}. \tag{7}$$

El dominio de cada función en (6) y (7) es el conjunto de números reales excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. A partir de (4) se observa que

- el dominio de $\tan x$ y de $\sec x$ es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

De manera semejante, a partir de (3) se concluye que

- el dominio de $\cot x$ y de $\csc x$ es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Además, a partir de (2),

$$|\sec x| = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \tag{8}$$

y

$$|\csc x| = \left|\frac{1}{\text{sen } x}\right| = \frac{1}{|\text{sen } x|} \geq 1. \tag{9}$$

Recuerde que una desigualdad con valor absoluto como (8) significa $\sec x \geq 1$ o $\sec x \leq -1$. Por tanto, el rango de las funciones secante y cosecante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las funciones tangente y cotangente tienen el mismo rango: $(-\infty, \infty)$. Al usar (5) pueden determinarse algunos valores numéricos de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$. Por ejemplo,

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \frac{\text{sen}(2\pi/3)}{\cos(2\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}.$$

**Gráficas** Los números que hacen cero los denominadores de tan $x$, cot $x$, sec $x$ y csc $x$ corresponden a asíntotas verticales de sus gráficas. En virtud de (4), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Por otra parte, a partir de (3), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estas asíntotas son las rectas discontinuas en las FIGURAS 2.4.3-2.4.6.

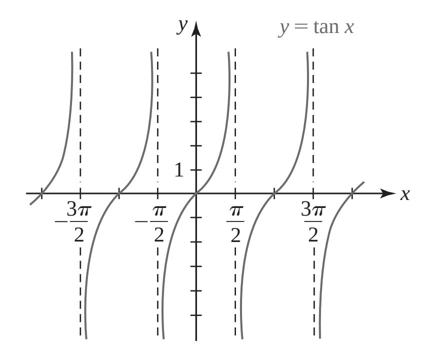



FIGURA 2.4.3 Gráfica de $y = \tan x$

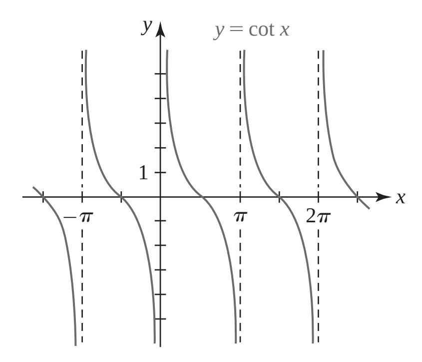



FIGURA 2.4.4 Gráfica de $y = \cot x$

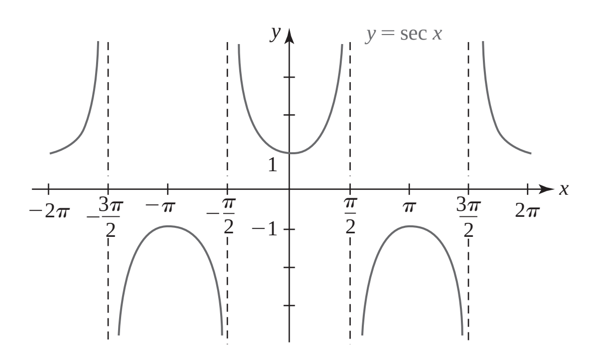



FIGURA 2.4.5 Gráfica de $y = \sec x$

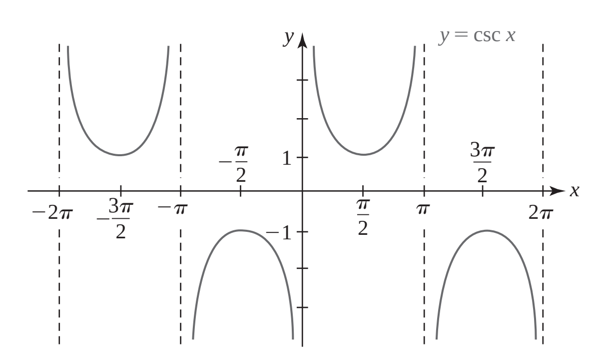



FIGURA 2.4.6 Gráfica de $y = \csc x$

Porque las funciones seno y coseno son periódicas con periodo $2\pi$, sec $x$ y csc $x$ también son periódicas con periodo $2\pi$. Pero a partir de las figuras 2.4.3 y 2.4.4 debe resultar evidente que el periodo de las funciones tangente y cotangente es $\pi$:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{y} \quad \cot(x + \pi) = \cot x. \tag{10}$$

También, tan $x$, cot $x$ y csc $x$ son funciones impares; sec $x$ es una función par.

**Transformación y gráficas** Es posible obtener variaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas por medio de transformaciones rígidas y no rígidas. Gráficas de funciones de la forma

$$y = D + A\,\text{sen}(Bx + C) \quad \text{o bien,} \quad y = D + A\cos(Bx + C), \tag{11}$$

donde $A$, $B > 0$, $C$ y $D$ son constantes reales, representan desplazamientos, compresiones y estiramientos de las gráficas seno y coseno básicas. Por ejemplo,

$$y = \overset{\substack{\text{desplazamiento vertical}\\ \downarrow}}{D} + \overset{\substack{\text{estiramiento/compresión/reflexión vertical}\\ \downarrow}}{A}\,\text{sen}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{estiramiento/compresión}\\ \text{horizontal al cambiar el periodo}}}{B}x + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{desplazamiento horizontal}}}{C}).$$

El número $|A|$ se denomina **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. El **periodo** de cada función en (11) es $2\pi/B$, $B > 0$, y la porción de la gráfica de cada función en (11) sobre el intervalo $[0, 2\pi/B]$ se denomina un **ciclo**.

**EJEMPLO 1** Periodos

***a***) El periodo de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$, y en consecuencia un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$.

***b***) Antes de determinar el periodo de $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ primero es necesario que volvamos a escribir la función como $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ (el seno es una función impar). Ahora, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$, y por consiguiente un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, 4\pi]$. ■

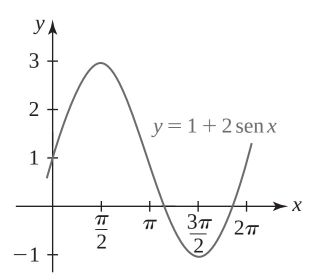



FIGURA 2.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 2*a*)

**EJEMPLO 2** Gráficas de transformaciones verticales

Grafique

***a***) $y = -\dfrac{1}{2}\cos x$ ***b***) $y = 1 + 2 \text{ sen } x$.

**Solución**

***a***) La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de 2, y el signo menos indica que luego la gráfica es reflejada en el eje $x$. Con la identificación $A = -\frac{1}{2}$ se observa que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en la FIGURA 2.4.7.

***b***) La gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ es la gráfica de $y = \text{sen } x$ estirada verticalmente por un factor de 2. La amplitud de la gráfica es $|A| = |2| = 2$. La gráfica de $y = 1 + 2 \text{ sen } x$ es la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ desplazada una unidad hacia arriba. Vea la FIGURA 2.4.8. ■

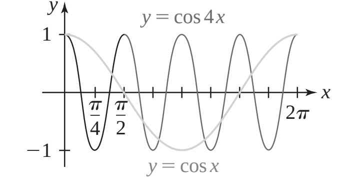



FIGURA 2.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 2*b*)

**EJEMPLO 3** Gráfica coseno comprimida horizontalmente

Encuentre el periodo de $y = \cos 4x$ y grafique la función.

**Solución** Con la identificación de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se concluye que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función, se traza un ciclo de la gráfica coseno con amplitud 1 sobre el intervalo $[0, \pi/2]$ y luego se usa la periodicidad para extender la gráfica. La FIGURA 2.4.9 muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico y la gráfica extendida) y un ciclo de $y = \cos x$ sobre $[0, 2\pi]$. Observe que $y = \cos 4x$ alcanza su mínimo en $x = \pi/4$ puesto que $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$ y su máximo en $x = \pi/2$ puesto que $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ■

FIGURA 2.4.9 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Por la sección 2.2 se sabe que la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica coseno básica desplazada hacia la derecha. En la FIGURA 2.4.10 la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades a la derecha. En forma semejante, las gráficas de $y = \text{sen}(x + \pi/2)$ y $y = \text{sen}(x - \pi/2)$ son las gráficas seno básicas desplazadas horizontalmente $\pi/2$ unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Vea la FIGURA 2.4.11 y la FIGURA 2.4.12.

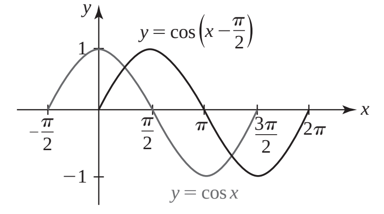



FIGURA 2.4.10 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

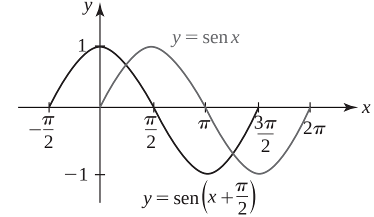



FIGURA 2.4.11 Gráfica seno desplazada horizontalmente

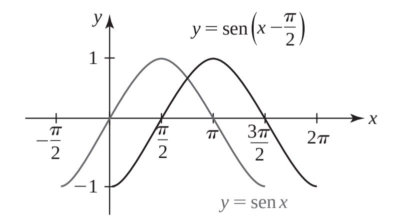



FIGURA 2.4.12 Gráfica seno desplazada horizontalmente

Al comparar las gráficas en las figuras 2.4.10-2.4.12 con las gráficas en las figuras 2.4.1 y 2.4.2 se observa que

- la gráfica coseno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica seno,
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda es la gráfica coseno, y
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica coseno reflejada en el eje $x$.

En otras palabras, se han comprobado gráficamente las siguientes identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \tag{12}$$

Suponga que $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$. Entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \tag{13}$$

El resultado en (13) muestra que la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ puede obtenerse al desplazar la gráfica de $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ horizontalmente una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se denomina **desplazamiento de fase** de las gráficas de las funciones en (3).

## EJEMPLO 4 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades a la derecha. Encuentre su ecuación.

**Solución** Al escribir $f(x) = 10 \cos 4x$ y usar (13) encontramos

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{o bien,} \qquad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identifica $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ■

**Nota:** Como cuestión práctica, el desplazamiento de fase para $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ o $y = A \cos(Bx + C)$ puede obtenerse al factorizar el número $B$ a partir de $Bx + C$. Por ejemplo,

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

## EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas horizontalmente

Grafique

***a***) $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ ***b***) $y = 2\cos(\pi x + \pi)$.

**Solución**

***a***) Para efectos de comparación, primero graficaremos $y = 3 \operatorname{sen} 2x$. La amplitud de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ es $|A| = 3$ y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ se completa sobre el intervalo $[0, \pi]$. Luego, extendemos esta gráfica hacia al intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$ como se muestra en la FIGURA 2.4.13. A continuación, volvemos a escribir $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ al factorizar 2 de $2x - \pi/3$:

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

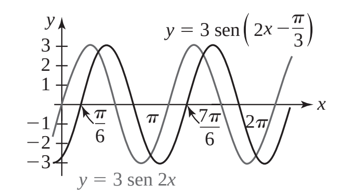


FIGURA 2.4.13 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

A partir de la forma de la última expresión vemos que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, mostrada en la figura 2.4.13, se obtiene al desplazar la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ $\pi/6$ unidades a la derecha.

***b***) La amplitud de $y = 2 \cos \pi x$ es $|A| = 2$ y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Así, un ciclo de $y = 2 \cos \pi x$ se completa sobre el intervalo $[0, 2]$. En la FIGURA 2.4.14 se muestran dos ciclos de la gráfica de $y = 2 \cos \pi x$. Las intersecciones $x$ de esta gráfica corresponden a los valores de $x$ para los que $\cos \pi x = 0$. Por (4), esto implica $\pi x = (2n + 1)\pi/2$ o $x = (2n + 1)/2$, con $n$ un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ obtenemos $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Luego, al volver a escribir la función dada como

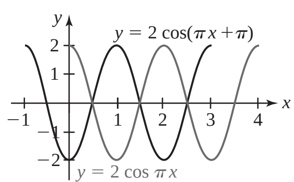


FIGURA 2.4.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

$$y = 2 \cos \pi(x + 1)$$

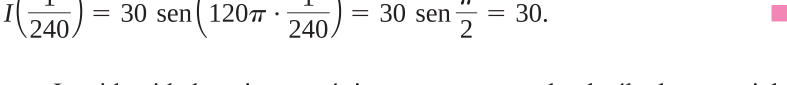
observamos que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2 \cos(\pi x + \pi)$ mostrada en la figura 2.4.14 se obtiene al desplazar 1 unidad a la izquierda la gráfica de $y = 2 \cos \pi x$. Esto significa que las intersecciones $x$ son las mismas para ambas gráficas. ■

En matemáticas aplicadas, las funciones trigonométricas sirven como modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos.

**EJEMPLO 6** Corriente alterna

Un modelo matemático para la corriente $I$ (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alterna está dado por $I(t) = 30 \text{ sen } 120\pi t$, donde $t$ es el tiempo medido en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

**Solución** La gráfica tiene una amplitud 30 y periodo $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. En consecuencia, trazamos un ciclo de la curva seno básica sobre el intervalo $\left[0, \frac{1}{60}\right]$, como se muestra en la FIGURA 2.4.15. A partir de la figura, resulta evidente que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes y ocurre en el intervalo $\left[0, \frac{1}{60}\right]$ en $t = \frac{1}{240}$ puesto que



$$I\left(\frac{1}{240}\right) = 30 \text{ sen}\left(120\pi \cdot \frac{1}{240}\right) = 30 \text{ sen } \frac{\pi}{2} = 30.$$

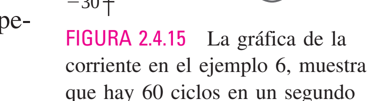



FIGURA 2.4.15 La gráfica de la corriente en el ejemplo 6, muestra que hay 60 ciclos en un segundo

**Para referencia futura** Las identidades trigonométricas se usan en todo el cálculo, especialmente en el estudio del cálculo integral. Para facilitar las referencias, a continuación se enumeran algunas identidades que revisten particular importancia.

**Identidades pitagóricas**

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{14}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{15}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \tag{16}$$

**Fórmulas de suma y diferencia**

$$\text{sen}(x_1 \pm x_2) = \text{sen } x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \text{ sen } x_2 \tag{17}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \text{sen } x_1 \text{ sen } x_2 \tag{18}$$

**Fórmulas para el doble de un ángulo**

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x \tag{19}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \tag{20}$$

**Fórmulas para la mitad de un ángulo**

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x) \tag{21}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \tag{22}$$

Identidades adicionales pueden encontrarse en las *Páginas de recursos* al final de este texto.

## 2.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-5.

### Fundamentos

En los problemas 1-6, use técnicas de desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión para dibujar por lo menos un ciclo de la gráfica de la función dada.

**1.** $y = \frac{1}{2} + \cos x$

**2.** $y = -1 + \cos x$

**3.** $y = 2 - \text{sen } x$

**4.** $y = 3 + 3 \text{ sen } x$

**5.** $y = -2 + 4 \cos x$

**6.** $y = 1 - 2 \text{ sen } x$

En los problemas 7-14, encuentre la amplitud y el periodo de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

**7.** $y = 4 \text{ sen } \pi x$

**8.** $y = -5 \text{ sen } \frac{x}{2}$

**9.** $y = -3 \cos 2\pi x$

**10.** $y = \frac{5}{2} \cos 4x$

**11.** $y = 2 - 4 \text{ sen } x$

**12.** $y = 2 - 2 \text{ sen } \pi x$

**13.** $y = 1 + \cos \frac{2x}{3}$

**14.** $y = -1 + \text{sen } \frac{\pi x}{2}$

En los problemas 15-18, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine $A$ y $D$ y escriba una ecuación de la forma $y = D + A$ sen $x$ o $y = D + A \cos x$ para la gráfica.

**15.**

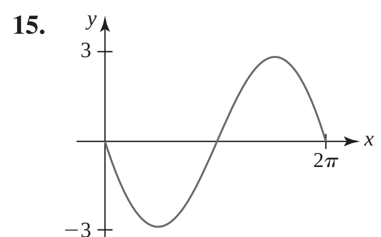



FIGURA 2.4.16 Gráfica para el problema 15

**16.**

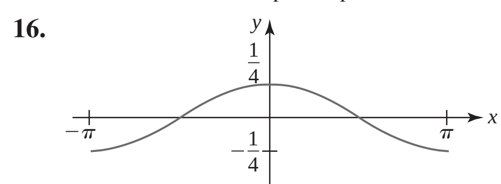



FIGURA 2.4.17 Gráfica para el problema 16

**17.**

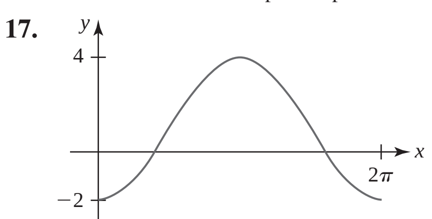



FIGURA 2.4.18 Gráfica para el problema 17

**18.**

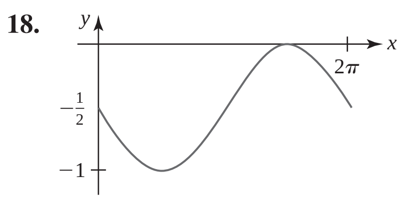



FIGURA 2.4.19 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-24, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine $A$ y $B$ y escriba una ecuación de la forma $y = A$ sen $Bx$ o $y = A \cos Bx$ para la gráfica.

**19.** **20.**

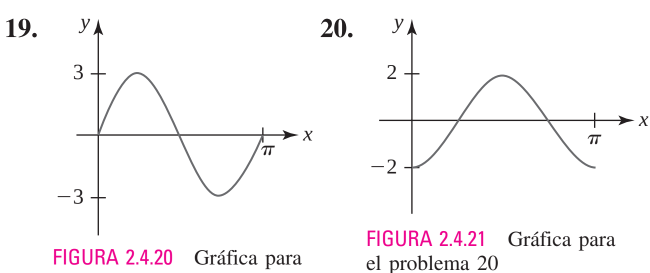



FIGURA 2.4.20 Gráfica para el problema 19

FIGURA 2.4.21 Gráfica para el problema 20

**21.** **22.**

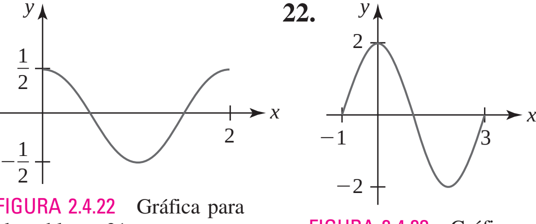



FIGURA 2.4.22 Gráfica para el problema 21

FIGURA 2.4.23 Gráfica para el problema 22

**23.** **24.**

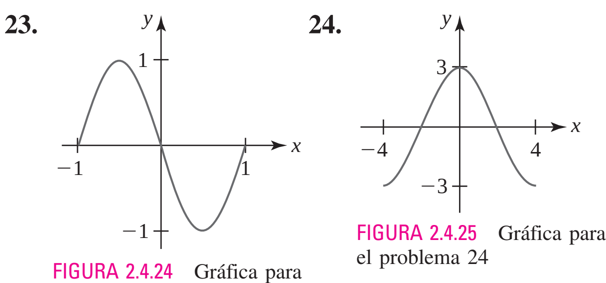



FIGURA 2.4.24 Gráfica para el problema 23

FIGURA 2.4.25 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-34, encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

**25.** $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **26.** $y = \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

**27.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **28.** $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

**29.** $y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$ **30.** $y = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

**31.** $y = 3\,\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ **32.** $y = -\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

**33.** $y = -4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ **34.** $y = 2\cos\left(-2\pi x - \frac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 35 y 36, escriba una ecuación de la función cuya gráfica se describe con palabras.

**35.** La gráfica de $y = \text{sen}\,\pi x$ está estirada verticalmente hacia arriba por un factor de 5 y está desplazada $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha.

**36.** La gráfica de $y = 4\cos\frac{x}{2}$ está desplazada 8 unidades hacia abajo y está desplazada $2\pi/3$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 37 y 38, encuentre las intersecciones $x$ de la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, use periodicidad para encontrar todas las intersecciones.

**37.** $y = -1 + \text{sen}\,x$ **38.** $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 39-44, encuentre las intersecciones $x$ de la gráfica de la función dada. No grafique.

**39.** $y = \text{sen}\,\pi x$ **40.** $y = -\cos 2x$

**41.** $y = 10\cos\frac{x}{2}$ **42.** $y = 3\,\text{sen}(-5x)$

**43.** $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **44.** $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 45-52, encuentre el periodo, las intersecciones $x$ y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

**45.** $y = \tan \pi x$ **46.** $y = \tan\frac{x}{2}$

**47.** $y = \cot 2x$ **48.** $y = -\cot\frac{\pi x}{3}$

**49.** $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ **50.** $y = \frac{1}{4}\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

**51.** $y = -1 + \cot \pi x$ **52.** $y = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 53-56, encuentre el periodo y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

**53.** $y = 3 \csc \pi x$

**54.** $y = -2 \csc \frac{x}{3}$

**55.** $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

**56.** $y = \csc(4x + \pi)$

## ☰ Modelos matemáticos

**57. Profundidad del agua** La profundidad del agua $d$ a la entrada de un puerto pequeño en el instante $t$ es modelada por una función de la forma

$$d(t) = D + A \operatorname{sen} B\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

donde $A$ es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, $2\pi/B$, $B > 0$ es el periodo de mareas y $D$ es la profundidad media. Suponga que el periodo de mareas es 12 horas, la profundidad media en la marea alta es 18 pies y que la profundidad en la marea baja es 6 pies. Dibuje dos ciclos de la gráfica de $d$.

**58. Temperatura Fahrenheit** Suponga que

$$T(t) = 50 + 10 \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}(t - 8), \quad 0 \le t \le 24$$

es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las $t$ horas después de medianoche durante un cierto día de la semana.

***a***) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
***b***) ¿A qué hora(s) se cumple $T(t) = 60$?
***c***) Trace la gráfica de $T$.
***d***) Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas a que ocurren.

## ☰ Problemas con calculadora/SAC

**59. Aceleración debida a la gravedad** Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la forma de ésta no es esférica, sino que se elonga en el ecuador y se achata en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad no es la constante 980 cm/s$^2$, sino que varía con la latitud $\theta$. Estudios satelitales han sugerido que la aceleración debida a la gravedad $g$ es aproximada por el modelo matemático

$$g = 978.0309 + 5.18552 \operatorname{sen}^2 \theta - 0.00570 \operatorname{sen}^2 2\theta.$$

Encuentre $g$

***a***) en el ecuador ($\theta = 0°$),
***b***) en el polo norte y
***c***) a 45° latitud norte.

**60. Lanzamiento de bala** El alcance de una bala soltada desde una altura $h$ por arriba del nivel del piso con una velocidad inicial $v_0$ a un ángulo $\phi$ con respecto a la horizontal puede aproximarse por el modelo matemático

$$R = \frac{v_0 \cos \phi}{g}\left[v_0 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \phi + 2gh}\right],$$

donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad. Vea la FIGURA 2.4.26.

***a***) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.8$ m/s$^2$, compare los alcances que se obtienen para las alturas $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.
***b***) Explique por qué un incremento en $h$ produce un incremento en el alcance $R$ si los otros parámetros se mantienen fijos.
***c***) ¿Qué implica lo anterior respecto a la ventaja que la altura otorga a un lanzador de bala?

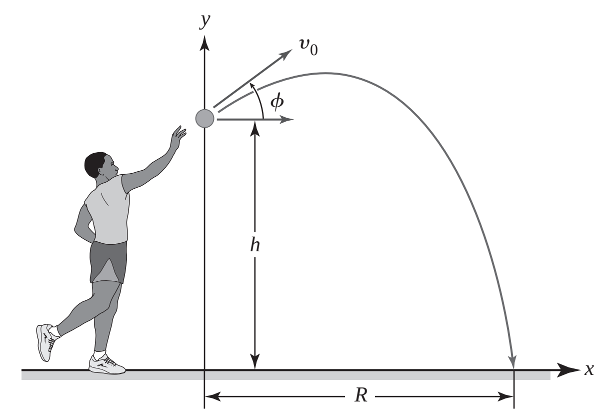



FIGURA 2.4.26 Proyectil en el problema 60

## ☰ Piense en ello

**61.** La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} 2x$ es periódica. ¿Cuál es el periodo de $f$?

**62.** Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\operatorname{sen} x|$ y $y = |\cos x|$.

**63.** Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.

**64.** ¿Es posible que la solución de la ecuación dada sea un número real?

***a***) $9 \csc x = 1$
***b***) $7 + 10 \sec x = 0$
***c***) $\sec x = -10.5$

En los problemas 65 y 66, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para encontrar números $A$ y $C$ para los que se cumpla la igualdad dada.

**65.** $\cot x = A \tan(x + C)$

**66.** $\csc x = A \sec(x + C)$

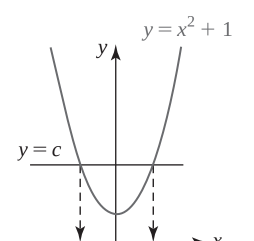
# 2.5 Funciones inversas

**Introducción** En la sección 2.1 vimos que una función $f$ es una regla de correspondencia que a cada valor $x$ en su dominio $X$ asigna un solo valor o un valor único $y$ en su rango. Esta regla no excluye el hecho de que el mismo número $y$ se asocie con varios valores *diferentes* de $x$. Por ejemplo, para $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, el valor $y = 4$ en el rango de $f$ ocurre en $x = 0$ o en $x = 2$ en el

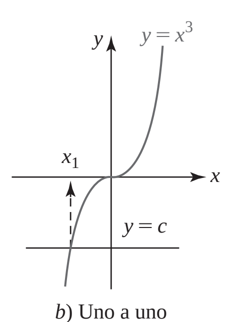
dominio de $f$. Por otra parte, para la función $f(x) = 2x + 3$, el valor $y = 4$ sólo ocurre en $x = \frac{1}{2}$. En efecto, para cada valor $y$ en el rango de $f(x) = 2x + 3$, corresponde sólo un valor de $x$ en el dominio. A las funciones de este último tipo se ha asignado el nombre especial de **uno a uno**.

**Definición 2.5.1** Función uno a uno

Se dice que una función es **uno a uno** si cada número en el rango de $f$ se asocia con exactamente un número en su dominio $X$.



*a*) No es uno a uno



*b*) Uno a uno

FIGURA 2.5.1 Dos tipos de funciones en el ejemplo 1

**Prueba de la recta horizontal** Cuando la definición 2.5.1 se interpreta geométricamente, significa que una recta horizontal ($y$ = constante) puede cortar la gráfica de una función uno a uno en cuanto mucho un punto. Además, si *toda* recta horizontal que corta la gráfica de una función lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la función necesariamente es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

**EJEMPLO 1** Prueba de la recta horizontal

***a***) En la FIGURA 2.5.1*a*) se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ y una recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica. La figura indica claramente que hay dos números $x_1$ y $x_2$ en el dominio de $f$ para los cuales $f(x_1) = f(x_2) = c$. Por tanto, la función $f$ no es uno a uno.

***b***) Al analizar la figura 2.5.1*b*) se encuentra que para toda recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica de $f(x) = x^3$, sólo hay un número $x_1$ en el dominio de $f$ tal que $f(x_1) = c$. La función $f$ es uno a uno.

**Inversa de una función uno a uno** Suponga que $f$ es una función uno a uno con dominio $X$ y rango $Y$. Puesto que todo número $y$ en $Y$ corresponde a precisamente un número $x$ en $X$, la función $f$ debe realmente determinar una función "reversa" $g$ cuyo dominio es $Y$ y cuyo rango es $X$. Como se muestra en la FIGURA 2.5.2, $f$ y $g$ deben satisfacer

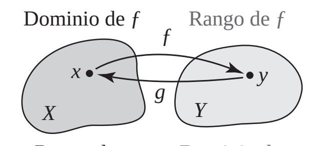


FIGURA 2.5.2 Una función $f$ y su función inversa $g$

$$f(x) = y \quad \text{y} \quad g(y) = x. \tag{1}$$

Las ecuaciones en (1) son en realidad composiciones de las funciones $f$ y $g$:

$$f(g(y)) = y \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x. \tag{2}$$

La función $g$ se denomina **inversa** de $f$ o **función inversa** de $f$. Al seguir la convención de que cada elemento del dominio se denota por el símbolo $x$, la primera ecuación en (2) vuelve a escribirse como $f(g(x)) = x$. A continuación se resumen los resultados proporcionados en (2).

**Definición 2.5.2** Función inversa

Sea $f$ una función uno a uno con dominio $X$ y rango $Y$. La **inversa** de $f$ es la función $g$ con dominio $Y$ y rango $X$ para la cual

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y \tag{3}$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X. \tag{4}$$

Por supuesto, si una función no es uno a uno, entonces no tiene función inversa.

**Notación** La inversa de una función $f$ suele escribirse como $f^{-1}$ y se lee "$f$ inversa". Esta última notación, aunque es estándar, es algo desafortunada. De inmediato se señala que en el símbolo $f^{-1}(x)$ el "$-1$" *no es* un exponente. En términos de la nueva notación, (3) y (4) se vuelven, respectivamente,

En (3) y (4), el símbolo $g$ desempeña la parte del símbolo $f^{-1}$.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{5}$$

**Propiedades** Antes de analizar un método para encontrar la inversa de una función uno a uno $f$, se enumeran algunas propiedades importantes sobre $f$ y su inversa $f^{-1}$.

**Teorema 2.5.1** Propiedades de la función inversa

*i*) Dominio de $f^{-1}$ = rango de $f$.
*ii*) Rango de $f^{-1}$ = dominio de $f$.
*iii*) Una función inversa $f^{-1}$ es uno a uno.
*iv*) La inversa de $f^{-1}$ es $f$.
*v*) La inversa de $f$ es única.

**Método para encontrar $f^{-1}$** Si $f^{-1}$ es la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, entonces por (1), $x = f^{-1}(y)$. Por tanto, basta hacer las dos cosas siguientes para encontrar $f^{-1}$.

### Directrices para encontrar la función inversa

Suponga que $y = f(x)$ es una función uno a uno. Entonces para encontrar $f^{-1}$:

- Se resuelve $y = f(x)$ para el símbolo $x$ en términos de $y$ (en caso de ser posible). Así se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- La variable $x$ vuelve a etiquetarse como $y$ y la variable $y$ como $x$. Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

**Nota:** Algunas veces resulta conveniente intercambiar los pasos en las directrices anteriores:

- Volver a etiquetar $x$ y $y$ en la ecuación $y = f(x)$ y despejar (de ser posible) $x = f(y)$ para $y$. Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

**EJEMPLO 2** Inversa de una función

Encuentre la inversa de $f(x) = x^3$.

**Solución** En el ejemplo 1 se vio que esta función es uno a uno. Para empezar, la función se vuelve a escribir como $y = x^3$. Al despejar $x$ se obtiene $x = y^{1/3}$. Luego las variables vuelven a etiquetarse para obtener $y = x^{1/3}$. Así $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ o, de manera equivalente, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ■

Encontrar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$ algunas veces es difícil y otras imposible. Por ejemplo, la FIGURA 2.5.3 sugiere (y es posible demostrar) que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno, por lo que tiene una inversa $f^{-1}$. Pero al despejar $x$ en la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todo mundo (incluyendo su profesor). Puesto que $f$ es una función polinomial, su dominio es $(-\infty, \infty)$ y, debido a que su comportamiento extremo es el de $y = x^3$, el rango de $f$ es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el rango de $f^{-1}$ son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando $f^{-1}$ no se conoce explícitamente, tiene perfecto sentido hablar sobre los valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, observe que $f(0) = 3$. Esto significa que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Puede imaginar el valor de $f^{-1}(5)$?

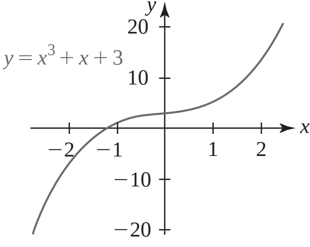


FIGURA 2.5.3 La gráfica sugiere que $f$ es uno a uno

**Gráficas de $f$ y $f^{-1}$** Suponga que $(a, b)$ representa cualquier punto sobre la gráfica de una función uno a uno $f$. Entonces $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que $(b, a)$ es un punto sobre la gráfica de $f^{-1}$. Como se muestra en la FIGURA 2.5.4*a*), los puntos $(a, b)$ y $(b, a)$ son reflexiones uno del otro en la recta $y = x$. Esto significa que la recta $y = x$ es la bisectriz perpendicular del segmento de recta que va de $(a, b)$ a $(b, a)$. Debido a que cada punto sobre una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente sobre la otra gráfica, en la figura 2.5.4*b*) se observa que las gráficas de $f^{-1}$ y $f$ son **reflexiones** entre sí con respecto a la recta $y = x$. Además se dice que las gráficas de $f^{-1}$ y $f$ son **simétricas** con respecto a la recta $y = x$.

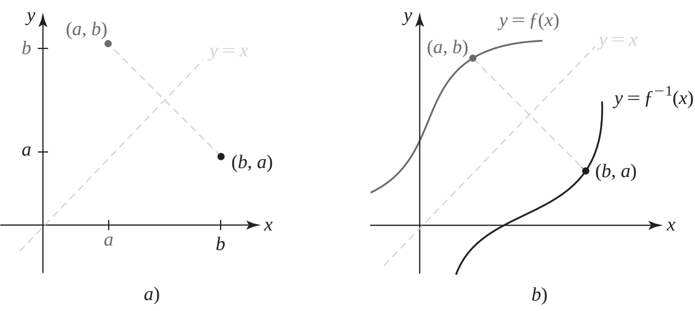



FIGURA 2.5.4 Las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ son reflexiones en la recta $y = x$

## EJEMPLO 3 Gráficas de $f$ y $f^{-1}$

En el ejemplo 2 vimos que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las FIGURAS 2.5.5*a*) y 2.5.5*b*) se muestran las gráficas de estas funciones; en la figura 2.5.5*c*), las gráficas están superpuestas en el mismo sistema de coordenadas para ilustrar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.

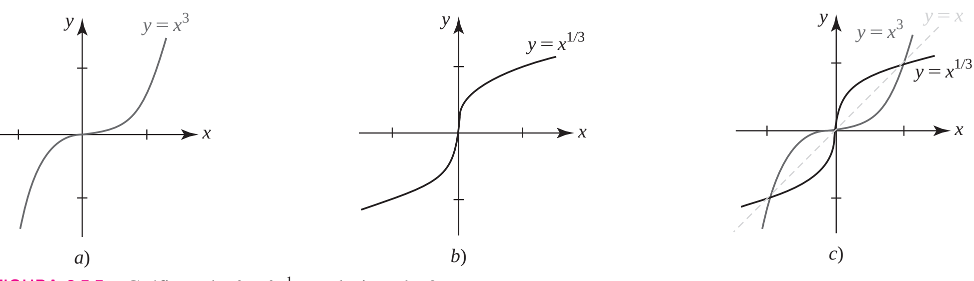



FIGURA 2.5.5 Gráficas de $f$ y $f^{-1}$ en el ejemplo 3 ■

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es uno a uno.

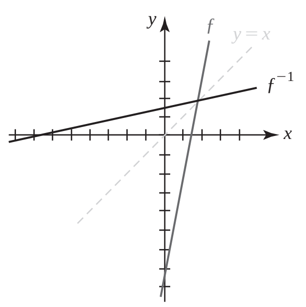



FIGURA 2.5.6 Gráficas de $f$ y $f^{-1}$ en el ejemplo 4

## EJEMPLO 4 Inversa de una función

Encuentre la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

**Solución** Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, por la prueba de la recta horizontal se concluye que $f$ es una función uno a uno. Para encontrar $f^{-1}$, $x$ se despeja en $y = 5x - 7$:

$$5x = y + 7 \qquad \text{implica} \qquad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al reetiquetar las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. En consecuencia, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ se comparan en la FIGURA 2.5.6. ■

Ninguna función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *no* es uno a uno.

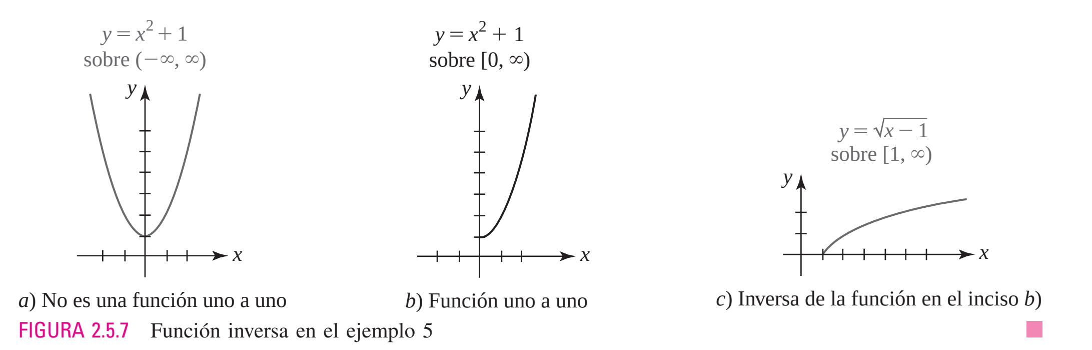
**Dominios restringidos** Para una función $f$ que no es uno a uno, puede ser posible restringir su dominio de modo que la nueva función que consta de $f$ definida sobre este dominio restringido sea uno a uno y así tenga una inversa. En la mayor parte de los casos es aconsejable restringir el dominio de modo que la nueva función retenga su rango original. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

## EJEMPLO 5 Dominio restringido

En el ejemplo 1 se demostró gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de $f$ es $(-\infty, \infty)$, y como se observa en la FIGURA 2.5.7*a*), el rango de $f$ es $[1, \infty)$. Luego, al definir $f(x) = x^2 + 1$ sólo en el intervalo $[0, \infty)$, vemos dos cosas en la figura 2.5.7*b*): el rango de $f$ se preserva y $f(x) = x^2 + 1$ confinada al dominio $[0, \infty)$ pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene como de costumbre. Al despejar $x$ de $y = x^2 + 1$ y volviendo a etiquetar las variables se obtiene

$$x = \pm\sqrt{y - 1} \qquad \text{y así} \qquad y = \pm\sqrt{x - 1}.$$

El signo algebraico idóneo en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y rango de $f^{-1}$ son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Esto obliga a escoger $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ como la inversa de *f*. Vea la figura 2.5.7*c*).




*a*) No es una función uno a uno *b*) Función uno a uno *c*) Inversa de la función en el inciso *b*)

FIGURA 2.5.7 Función inversa en el ejemplo 5

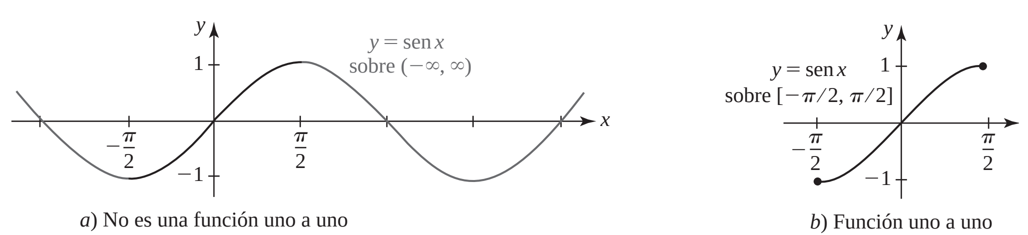
**Funciones trigonométricas inversas** Aunque ninguna de las funciones trigonométricas es uno a uno, al restringir convenientemente cada uno de sus dominios es posible definir seis funciones trigonométricas inversas.

**Función seno inverso** A partir de la FIGURA 2.5.8*a*) se observa que la función $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su rango $[-1, 1]$. Observe que cualquier recta horizontal trazada para cortar la porción entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ de la gráfica puede hacerlo a lo sumo una vez. Por tanto, la función seno sobre este dominio restringido es uno a uno y tiene una inversa. Entre los matemáticos hay dos notaciones de uso común para denotar la inversa de la función que se muestra en la figura 2.5.8*b*):

$$\text{sen}^{-1}\, x \qquad \text{o} \qquad \text{arcsen}\, x,$$

que se leen **seno inverso de *x*** y **arcseno de *x***, respectivamente.

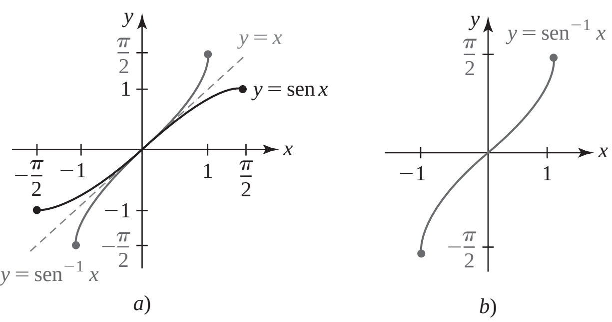
◀ El sistema algebraico computacional *Mathematica* usa la notación arcsin.




*a*) No es una función uno a uno *b*) Función uno a uno

FIGURA 2.5.8 Restricción del dominio de $y = \text{sen}\, x$ para obtener una función uno a uno

En la FIGURA 2.5.9*a*) se ha reflejado la porción de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (figura 2.5.8*b*) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}\, x$. Por razones de claridad, esta gráfica se ha reproducido en la figura 2.5.9*b*). Como se muestra en esta gráfica, el dominio de la función seno inverso es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.




*a*) *b*)

FIGURA 2.5.9 Gráfica de la función seno inverso

**Definición 2.5.3** Función seno inverso

La **función seno inverso**, o **función arcseno**, se define por

$$y = \text{sen}^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \text{sen}\, y, \tag{6}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

En palabras:

- El seno inverso del número $x$ es el número $y$ (o ángulo medido en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es $x$.

Los símbolos $y = \text{arcsen}\, x$ y $y = \text{sen}^{-1} x$ son sinónimos en matemáticas y sus aplicaciones, de modo que se alternará su uso para que usted se sienta cómodo con ambas notaciones.

## EJEMPLO 6 Evaluación de la función seno inverso

Encuentre

***a***) $\text{arcsen}\,\frac{1}{2}$ ***b***) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y ***c***) $\text{sen}^{-1}(-1)$.

**Solución**

***a***) Si se hace $y = \text{arcsen}\,\frac{1}{2}$, entonces por (6) es necesario encontrar el número $y$ (o ángulo medido en radianes) que satisface $\text{sen}\, y = \frac{1}{2}$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Puesto que $\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ satisface la desigualdad $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se concluye que

$$y = \frac{\pi}{6}.$$

***b***) Si se hace $y = \text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$, entonces $\text{sen}\, y = -\frac{1}{2}$. Puesto que es necesario escoger $y$ tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, encontramos que $y = -\pi/6$.

***c***) Al hacer $y = \text{sen}^{-1}(-1)$, tenemos que $\text{sen}\, y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por tanto, $y = -\pi/2$. ■

Lea este párrafo varias veces.

En los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 6 se tuvo cuidado para escoger $y$ de modo que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por ejemplo, un error común suele ser pensar que como $\text{sen}(3\pi/2) = -1$, entonces necesariamente $\text{sen}^{-1}(-1)$ puede tomarse como $3\pi/2$. Recuerde: si $y = \text{sen}^{-1} x$, entonces $y$ está sujeto a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, y $3\pi/2$ no satisface esta desigualdad.

## EJEMPLO 7 Evaluación de una composición

Sin usar calculadora, encuentre $\tan\left(\text{sen}^{-1}\,\frac{1}{4}\right)$.

**Solución** Es necesario encontrar la tangente del ángulo de $t$ radianes con seno igual a $\frac{1}{4}$, es decir, $\tan t$ donde $t = \text{sen}^{-1}\frac{1}{4}$. El ángulo $t$ se muestra en la FIGURA 2.5.10. Puesto que

$$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

queremos determinar el valor de $\cos t$. A partir de la figura 2.5.10 y la identidad pitagórica $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, vemos que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Por tanto,
$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así
$$\tan\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$ ■

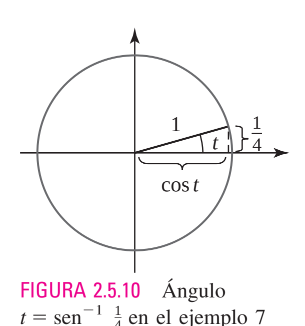


FIGURA 2.5.10 Ángulo $t = \text{sen}^{-1}\,\frac{1}{4}$ en el ejemplo 7

El procedimiento que se ilustra en el ejemplo 10 constituye un método alterno para resolver el ejemplo 7.

**Función coseno inverso** Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno y entonces tiene una inversa. Esta inversa se denota por

$$\cos^{-1} x \qquad \text{o bien,} \qquad \text{arccos } x,$$

lo cual proporciona la siguiente definición.

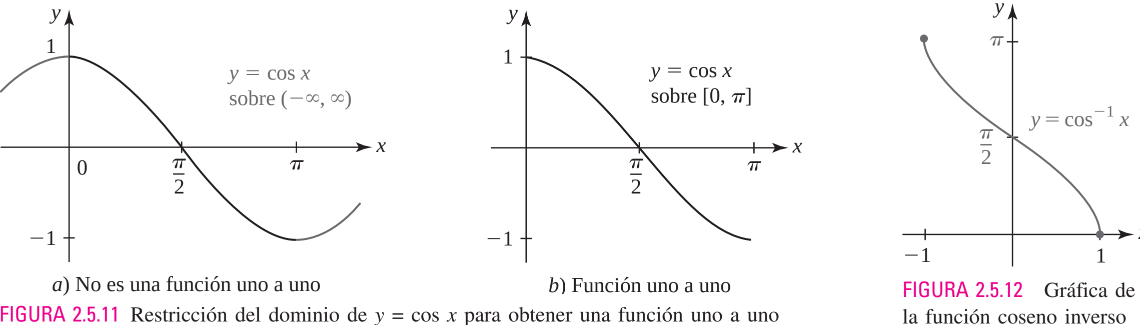
**Definición 2.5.4** Función coseno inverso

La **función coseno inverso**, o **función arccoseno**, se define por

$$y = \cos^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \cos y, \tag{7}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

La gráfica mostrada en la FIGURA 2.5.11 ilustra la forma en que la función $y = \cos x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$ se vuelve una función uno a uno.




*a*) No es una función uno a uno

*b*) Función uno a uno

FIGURA 2.5.11 Restricción del dominio de $y = \cos x$ para obtener una función uno a uno

FIGURA 2.5.12 Gráfica de la función coseno inverso

Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 2.5.11*b*) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ mostrada en la FIGURA 2.5.12. La figura muestra con toda claridad que el dominio y el rango de $y = \cos^{-1} x$ son $[-1, 1]$ y $[0, \pi]$, respectivamente.

## EJEMPLO 8 Evaluación de la función coseno inverso

Evalúe $\text{arccos}(-\sqrt{3}/2)$.

**Solución** Si $y = \text{arccos}(-\sqrt{3}/2)$, entonces $\cos y = -\sqrt{3}/2$. El único número en $[0, \pi]$ para el cual se cumple esto es $y = 5\pi/6$. Es decir,

$$\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

## EJEMPLO 9 Evaluación de composición de funciones

Escriba $\text{sen}(\cos^{-1} x)$ como una expresión algebraica en $x$.

**Solución** En la FIGURA 2.5.13 se ha construido un ángulo de $t$ radianes cuyo coseno es igual a $x$. Así, $t = \cos^{-1} x$, o $x = \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$. Luego, para encontrar $\text{sen}(\cos^{-1} x) = \text{sen } t$, usamos la identidad $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Así

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 t + x^2 &= 1 \\ \text{sen}^2 t &= 1 - x^2 \\ \text{sen } t &= \sqrt{1 - x^2} \\ \text{sen}(\cos^{-1} x) &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada positiva de $1 - x^2$, puesto que el rango de $\cos^{-1} x$ es $[0, \pi]$, y el seno del ángulo $t$ en los cuadrantes primero o segundo es positivo.

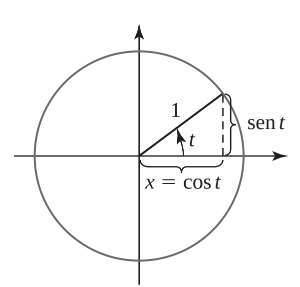



FIGURA 2.5.13 Ángulo $t = \cos^{-1} x$ en el ejemplo 9

**Función tangente inversa** Si el dominio de tan $x$ se restringe al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces la función resultante es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Ésta se denota por

$$\tan^{-1} x \qquad \text{o bien,} \qquad \arctan x.$$

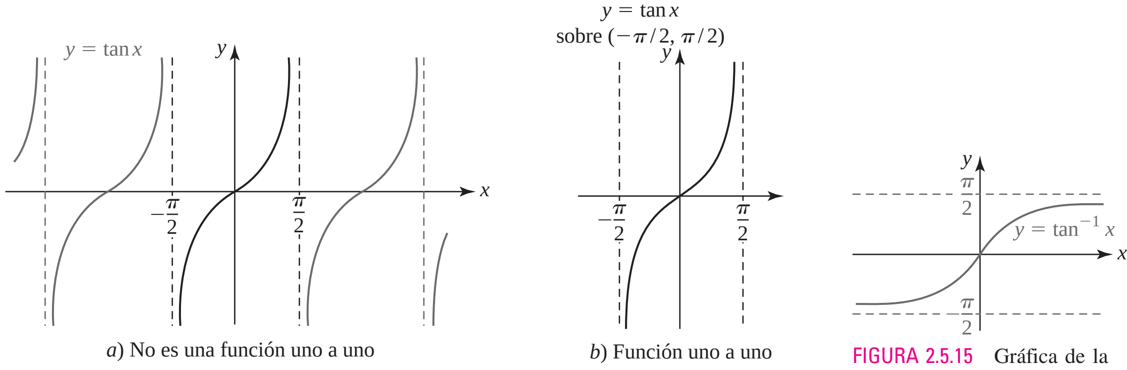
**Definición 2.5.5** Función arctangente

La **función tangente inversa**, o **función arctangente**, se define por

$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \tan y, \tag{8}$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas mostradas en la FIGURA 2.5.14 ilustran cómo la función $y = \tan x$ restringida al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se vuelve una función uno a uno. Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 2.5.14*b*) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ mostrada en la FIGURA 2.5.15. En la figura se observa que el dominio y el rango de $y = \tan^{-1} x$ son, respectivamente, los intervalos $(-\infty, \infty)$ y $(-\pi/2, \pi/2)$. Por ejemplo, $y = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$ puesto que $-\pi/4$ es el único número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para el cual $\tan(-\pi/4) = -1$.




*a*) No es una función uno a uno

*b*) Función uno a uno

FIGURA 2.5.14 Restricción del dominio de $y = \tan x$ para obtener una función uno a uno

FIGURA 2.5.15 Gráfica de la función tangente inversa

**EJEMPLO 10** Evaluación de composiciones de funciones

Sin usar calculadora, encuentre $\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$.

**Solución** Si se hace $y = \arctan\frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Al usar el triángulo rectángulo en la FIGURA 2.5.16 como ayuda, se ve que

$$\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \cos y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$\sqrt{13}$ 2 $y$ 3

FIGURA 2.5.16 Triángulo en el ejemplo 10

**Propiedades de las inversas** Recuerde por (5) que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ se cumplen para cualquier función $f$ y su inversa si hay restricciones idóneas sobre $x$. Por tanto, para las funciones trigonométricas inversas tenemos las siguientes propiedades.

**Teorema 2.5.2** Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

*i*) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ si $-\pi/2 \le x \le \pi/2$
*ii*) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$
*iii*) $\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x$ si $0 \le x \le \pi$
*iv*) $\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$
*v*) $\tan^{-1}(\tan x) = \arctan(\tan x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$
*vi*) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

**EJEMPLO 11** Aplicación de las propiedades inversas

Sin usar calculadora, evalúe

*a*) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ *b*) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

**Solución**

*a*) Por el teorema 2.5.2*iv*), $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

*b*) En este caso *no es posible* aplicar la propiedad *v*), puesto que $3\pi/4$ no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Si primero se evalúa $\tan(3\pi/4) = -1$, entonces se tiene

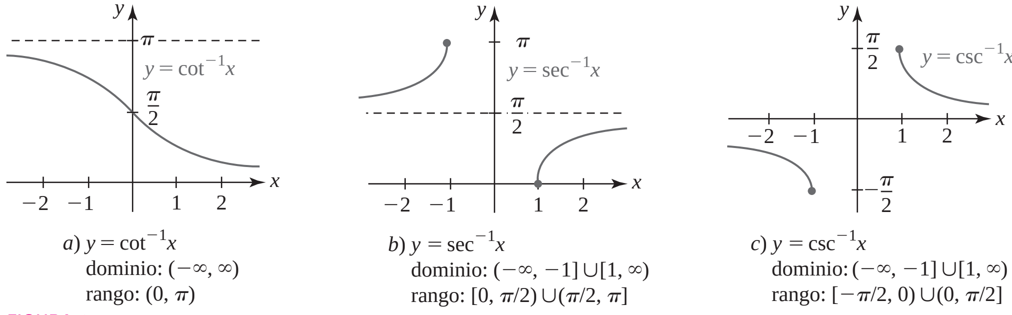
$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

**Inversas de otras funciones trigonométricas** Con los dominios restringidos de manera conveniente, las funciones trigonométricas restantes $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ también tienen inversas.

**Definición 2.5.6** Otras funciones trigonométricas inversas

*i*) $y = \cot^{-1} x$ si y sólo si $x = \cot y$, $-\infty < x < \infty$ y $0 < y < \pi$
*ii*) $y = \sec^{-1} x$ si y sólo si $x = \sec y$, $|x| \geq 1$ y $0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2$
*iii*) $y = \csc^{-1} x$ si y sólo si $x = \csc y$, $|x| \geq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0$

Las gráficas de $y = \cot^{-1} x$, $y = \sec^{-1} x$ y $y = \csc^{-1} x$, así como sus dominios y rangos, se resumen en la FIGURA 2.5.17.




*a*) $y = \cot^{-1} x$
dominio: $(-\infty, \infty)$
rango: $(0, \pi)$

*b*) $y = \sec^{-1} x$
dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

*c*) $y = \csc^{-1} x$
dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

FIGURA 2.5.17 Gráficas de las funciones cotangente inversa, secante inversa y cosecante inversa

## *f*(*x*) NOTAS DESDE EL AULA

Los rangos especificados en las definiciones 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5 y 2.5.6*i*) son reconocidos internacionalmente y surgieron de la limitación más lógica y conveniente de la función original. Así, cuando vemos arccos $x$ o $\tan^{-1} x$ en cualquier contexto, sabemos que $0 \leq \arccos x \leq \pi$ y $-\pi/2 < \tan^{-1} x < \pi/2$. Estas convenciones son las mismas que las usadas en calculadoras cuando se usan las teclas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$. Sin embargo, no existe ningún acuerdo universal sobre los rangos de $y = \sec^{-1} x$ o $y = \csc^{-1} x$. Los rangos especificados en *ii*) y *iii*) en la definición 2.5.6 son cada vez más populares porque se trata de los rangos empleados en sistemas algebraicos computacionales como *Mathematica* y *Maple*. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que hay textos conocidos de cálculo que definen el dominio y el rango de $y = \sec^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \text{rango: } [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2),$$

y el dominio y el rango de $y = \csc^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \text{rango: } (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2].$$

## 2.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

### Fundamentos

En los problemas 1 y 2, vuelva a leer la introducción de esta sección. Luego explique por qué la función $f$ dada no es uno a uno.

**1.** $f(x) = 1 + x(x - 5)$ **2.** $f(x) = x^4 + 2x^2$

En los problemas 3-8, determine si la función dada es uno a uno al analizar su gráfica.

**3.** $f(x) = 5$ **4.** $f(x) = 6x - 9$

**5.** $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ **6.** $f(x) = |x + 1|$

**7.** $f(x) = x^3 - 8$ **8.** $f(x) = x^3 - 3x$

En los problemas 9-12, la función $f$ dada es uno a uno. Encuentre $f^{-1}$.

**9.** $f(x) = 3x^3 + 7$

**10.** $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$

**11.** $f(x) = \dfrac{2 - x}{1 - x}$

**12.** $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x}$

En los problemas 13 y 14, compruebe que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

**13.** $f(x) = 5x - 10,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

**14.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 1},\ f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

En los problemas 15-18, la función $f$ dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el dominio y el rango de $f^{-1}$.

**15.** $f(x) = \sqrt{x + 2}$

**16.** $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$

**17.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

**18.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 4}$

En los problemas 19 y 20, la función $f$ dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el punto sobre la gráfica de $f^{-1}$ correspondiente al valor indicado de $x$ en el dominio de $f$.

**19.** $f(x) = 2x^3 + 2x;\quad x = 2$

**20.** $f(x) = 8x - 3;\quad x = 5$

En los problemas 21 y 22, la función $f$ dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre $x$ en el dominio de $f^{-1}$ que satisface la ecuación indicada.

**21.** $f(x) = x + \sqrt{x};\quad f^{-1}(x) = 9$

**22.** $f(x) = \dfrac{4x}{x + 1};\quad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 23 y 24, trace la gráfica de $f^{-1}$ a partir de la gráfica de $f$.

**23.**

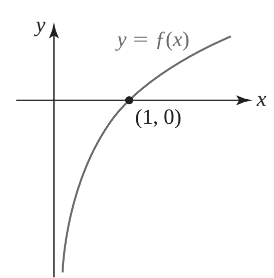



FIGURA 2.5.18 Gráfica para el problema 23

**24.**

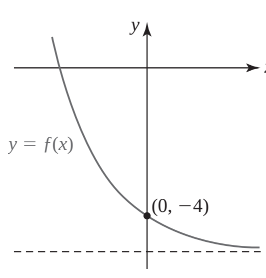



FIGURA 2.5.19 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25 y 26, trace la gráfica de $f$ a partir de la gráfica de $f^{-1}$.

**25.**

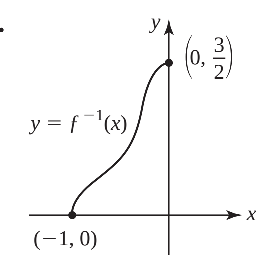



FIGURA 2.5.20 Gráfica para el problema 25

**26.**

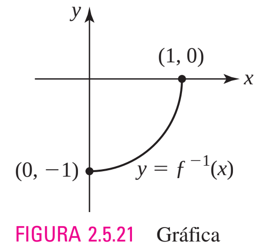



FIGURA 2.5.21 Gráfica para el problema 26

En los problemas 27-30, encuentre una función inversa $f^{-1}$ cuyo rango sea el mismo que el de la función dada al restringir de manera conveniente el dominio de $f$.

**27.** $f(x) = (5 - 2x)^2$ **28.** $f(x) = 3x^2 + 9$

**29.** $f(x) = x^2 + 2x + 4$ **30.** $f(x) = -x^2 + 8x$

**31.** Si las funciones $f$ y $g$ tienen inversas, puede demostrarse que

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Compruebe esto para $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x + 5$.

**32.** La ecuación $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ define una función uno a uno $y = f(x)$. Encuentre $f^{-1}(x)$.

En los problemas 33-44, obtenga el valor exacto de la expresión dada. No use calculadora.

**33.** $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **34.** $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}$

**35.** $\arctan(1)$ **36.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$

**37.** $\cot^{-1}(-1)$ **38.** $\sec^{-1}(-1)$

**39.** $\text{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **40.** $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

**41.** $\text{sen}\left(\arctan\dfrac{4}{3}\right)$ **42.** $\cos\left(\text{sen}^{-1}\dfrac{2}{5}\right)$

**43.** $\tan\left(\cot^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ **44.** $\csc\left(\tan^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$

En los problemas 45-48, evalúe la expresión dada por medio de una identidad trigonométrica idónea.

**45.** $\text{sen}\left(2\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$ **46.** $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$

**47.** $\text{sen}\left(\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$ **48.** $\cos(\tan^{-1} 4 - \tan^{-1} 3)$

En los problemas 49-52, escriba la expresión dada como una cantidad algebraica en $x$.

**49.** $\cos(\text{sen}^{-1} x)$ **50.** $\tan(\text{sen}^{-1} x)$

**51.** $\sec(\tan^{-1} x)$ **52.** $\text{sen}(\sec^{-1} x), x \geq 1$

En los problemas 53 y 54, compruebe gráficamente las identidades por una reflexión y un desplazamiento vertical.

**53.** $\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

**54.** $\text{arccot}\, x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

**55.** Demuestre que $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

**56.** Demuestre que $\csc^{-1} x = \text{sen}^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

**57.** Si $t = \text{sen}^{-1}(-2/\sqrt{5})$, encuentre los valores exactos de $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

**58.** Si $\theta = \arctan\frac{1}{2}$, encuentre los valores exactos de $\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

La mayoría de las calculadoras carece de teclas para $\csc^{-1} x$ y $\sec^{-1} x$. En los problemas 59 y 60, use una calculadora y las identidades en los problemas 55 y 56 para calcular la cantidad dada.

**59.** ***a)*** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ ***b)*** $\csc^{-1} 2$

**60.** ***a)*** $\sec^{-1}(3.5)$ ***b)*** $\csc^{-1}(-1.25)$

**61.** Use una calculadora para comprobar:

***a)*** $\tan(\tan^{-1} 1.3) = 1.3$ y $\tan^{-1}(\tan 1.3) = 1.3$
***b)*** $\tan(\tan^{-1} 5) = 5$ y $\tan^{-1}(\tan 5) = -1.2832$

Explique por qué $\tan^{-1}(\tan 5) \neq 5$.

**62.** Sea $x = 1.7$ radianes. Compare, de ser posible, los valores de $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$ y $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$. Explique las diferencias.

## ≡ Aplicaciones

**63.** Considere una escalera de longitud $L$ apoyada en un muro con una carga en el punto $P$ como se muestra en la FIGURA 2.5.22. El ángulo $\beta$, al que la escalera está al borde de deslizarse, está definido por

$$\frac{x}{L} = \frac{c}{1 + c^2}(c + \tan\beta),$$

donde $c$ es el coeficiente de fricción entre la escalera y el piso.

***a)*** Encuentre $\beta$ cuando $c = 1$ y la carga está en la parte superior de la escalera.

***b)*** Encuentre $\beta$ cuando $c = 0.5$ y la carga está a $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera empezando desde el piso.

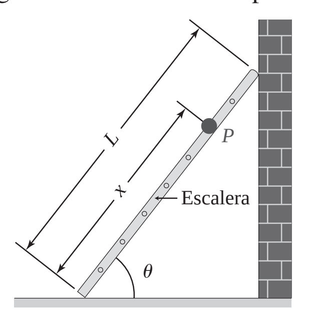



FIGURA 2.5.22 Escalera en el problema 63

**64.** Un avión se desplaza hacia el oeste a velocidad constante $v_1$ cuando sopla viento desde el norte a velocidad constante $v_2$. El rumbo del avión al sur del oeste está dado por $\theta = \tan^{-1}(v_2/v_1)$. Vea la FIGURA 2.5.23. Encuentre el rumbo de un avión que se desplaza hacia el oeste a 300 km/h si sopla viento desde el norte a 60 km/h.

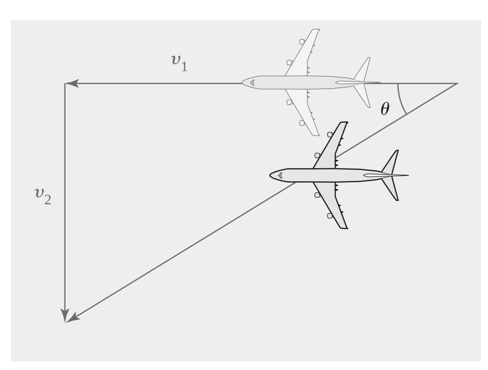



FIGURA 2.5.23 Avión en el problema 64

## ≡ Piense en ello

En los problemas 65 y 66, use calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de la función dada donde $x$ es cualquier número real. Explique por qué las gráficas no violan los teoremas 2.5.2*i*) y 2.5.2*iii*).

**65.** $f(x) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$ **66.** $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$

**67.** Analice: ¿es posible que una función uno a uno sea periódica?

**68.** ¿Cómo están relacionadas las funciones uno a uno $y = f(x)$ en las FIGURAS 2.5.24*a*) y 2.5.24*b*) con las funciones inversas $y = f^{-1}(x)$? Encuentre por lo menos tres funciones explícitas con esta propiedad.

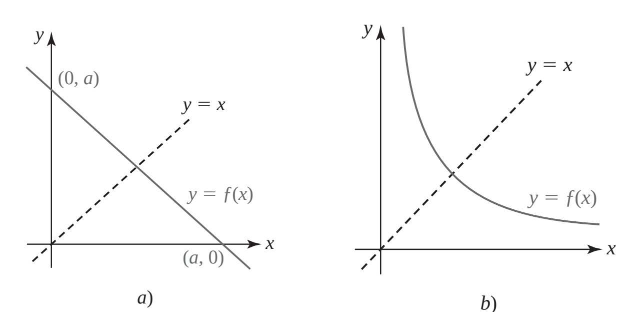



FIGURA 2.5.24 Gráfica para el problema 68

# 2.6 Funciones exponencial y logarítmica

**Introducción** En las secciones precedentes se consideraron funciones como $f(x) = x^2$; es decir, una función con una base variable $x$ y una potencia o exponente constante 2. A continuación abordaremos funciones como $f(x) = 2^x$ con una base constante 2 y exponente variable $x$.

En (1), la base $b$ se restringe a números positivos para garantizar que $b^x$ sea un número real. También, $b = 1$ carece de interés puesto que $f(x) = 1^x = 1$.

**Definición 2.6.1** Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces una **función exponencial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = b^x. \tag{1}$$

El número $b$ se denomina **base** y $x$ se denomina **exponente**.

El **dominio** de una función exponencial $f$ definida en (1) es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

**Exponentes** Debido a que el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de números reales, el exponente $x$ puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base $b = 3$ y el exponente $x$ es un *número racional*, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \qquad \text{y} \qquad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

La función (1) también está definida para todo *número irracional* $x$. El siguiente procedimiento ilustra una forma para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. A partir de la representación decimal $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ se observa que los números racionales

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots$$

Una definición de $b^x$, para $x$ irracional, está dada por

$$b^x = \lim_{t \to x} b^t,$$

donde $t$ es racional. Esto se lee "$b^x$ es el **límite** de $b^t$ cuando $t$ tiende a $x$". Los límites se estudiarán en detalle en la unidad 3.

son sucesivamente mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Al usar estos números racionales como exponentes, es de esperar que los números

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \ldots$$

sean sucesivamente mejores aproximaciones a $3^{\sqrt{2}}$. De hecho, puede demostrarse que esto es cierto con una definición precisa de $b^x$ para un valor irracional de $x$. Pero a nivel práctico es posible usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora para obtener la aproximación 4.728804388 para $3^{\sqrt{2}}$.

**Leyes de los exponentes** Puesto que $b^x$ está definido para todos los números reales $x$ cuando $b > 0$, puede demostrarse que las leyes de los exponentes se cumplen para todos los exponentes que sean números reales. Si $a > 0$, $b > 0$ y $x$, $x_1$ y $x_2$ denotan números reales, entonces

*i)* $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2}$ *ii)* $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$ *iii)* $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

*iv)* $\dfrac{1}{b^{x_2}} = b^{-x_2}$ *v)* $(ab)^x = a^x b^x$ *vi)* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

**Gráficas** Para (1) se distinguen dos tipos de gráficas, dependiendo de si la base $b$ satisface $b > 1$ o $0 < b < 1$. El siguiente ejemplo ilustra las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Antes de graficar es posible hacer algunas observaciones intuitivas sobre ambas funciones. Puesto que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de $3^x$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ son positivos para todo número real $x$. Además, ni $3^x$ ni $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ pueden ser 0 para ninguna $x$, de modo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ no tienen intersecciones $x$. También, $3^0 = 1$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ significan que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ tienen la misma intersección $y$ (0, 1).

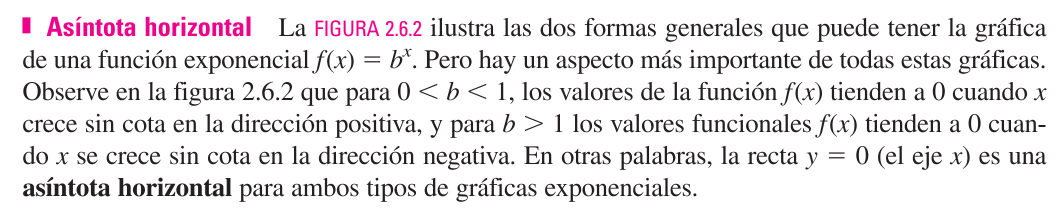
**EJEMPLO 1** Gráficas de funciones exponenciales

Grafique las funciones

***a)*** $f(x) = 3^x$, ***b)*** $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

**Solución**

***a***) Primero se elabora una tabla de algunos valores funcionales correspondientes a valores de $x$ seleccionados de antemano. Como se muestra en la FIGURA 2.6.1*a*), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla



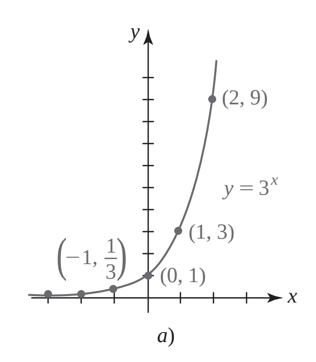
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $3$ | $9$ |

y se unen con una curva continua. La gráfica muestra que $f$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

***b***) Procediendo como en el inciso *a*), se elabora una tabla de algunos valores

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $27$ | $9$ | $3$ | $1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |

de la función correspondientes a valores de $x$ seleccionados de antemano. Observe, por ejemplo, por las leyes de los exponentes $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$. Como se muestra en la figura 2.6.1*b*), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla y se unen con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que $f$ es una función decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. ■



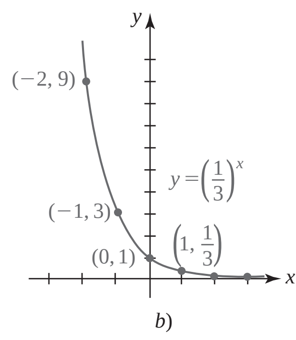




FIGURA 2.6.1 Gráfica de las funciones en el ejemplo 1

**Nota:** Las funciones exponenciales con bases que satisfacen $0 < b < 1$, como $b = \frac{1}{3}$, a menudo se escriben en forma alterna. Al escribir $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ como $y = (3^{-1})^x$ y usando *iii*) de las leyes de los exponentes se observa que $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$.

**Asíntota horizontal** La FIGURA 2.6.2 ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Pero hay un aspecto más importante de todas estas gráficas. Observe en la figura 2.6.2 que para $0 < b < 1$, los valores de la función $f(x)$ tienden a 0 cuando $x$ crece sin cota en la dirección positiva, y para $b > 1$ los valores funcionales $f(x)$ tienden a 0 cuando $x$ se crece sin cota en la dirección negativa. En otras palabras, la recta $y = 0$ (el eje $x$) es una **asíntota horizontal** para ambos tipos de gráficas exponenciales.

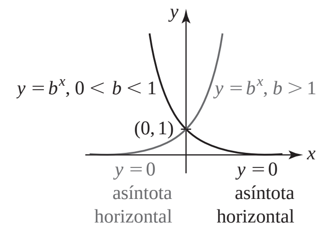



FIGURA 2.6.2 $f$ creciente para $b > 1$; $f$ decreciente para $0 < b < 1$

**Propiedades de una función exponencial** La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial $f$ con base $b$. Vuelva a analizar las gráficas en la figura 2.6.2 mientras lee la lista.

- El dominio de $f$ es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de $f$ es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- La intersección $y$ de $f$ es $(0, 1)$. La gráfica no tiene intersección $x$.
- La función $f$ es creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje $x$, es decir $y = 0$, es una asíntota horizontal para la gráfica de $f$.
- La función $f$ es uno a uno.

Aunque todas las gráficas de $y = b^x$ cuando $b > 1$ comparten la misma forma básica y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras más grande es la base $b$, el ascenso de la gráfica es más pronunciado cuando $x$ crece. En la FIGURA 2.6.3 se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$, sobre los mismos ejes de coordenadas. A partir de esta gráfica observamos que los valores de $y = (1.2)^x$ crecen lentamente cuando $x$ crece.

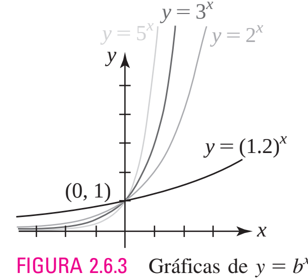



FIGURA 2.6.3 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3, 5$

El hecho de que (1) es una función uno a uno se concluye a partir de la prueba de la recta horizontal que se analizó en la sección 2.5.

**El número *e*** La mayoría de los estudiantes de matemáticas ha escuchado acerca del famoso número irracional $\pi = 3.141592654\ldots$, y quizás haya trabajado con él. En cálculo y matemáticas aplicadas, podría decirse que el número irracional

$$e = 2.718281828459\ldots \tag{2}$$

desempeña un papel más importante que el número $\pi$. La definición usual del número $e$ es que se trata del número al que se acerca la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando se deja que $x$ crezca sin cota en la dirección positiva. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la expresión *se acerca*, entonces el hecho de que $f(x) \rightarrow e$ cuando $x \rightarrow \infty$ es evidente en la tabla de valores numéricos de $f$

| $x$ | 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1 + 1/x)^x$ | 2.704814 | 2.716924 | 2.718146 | 2.718268 | 2.718280 |

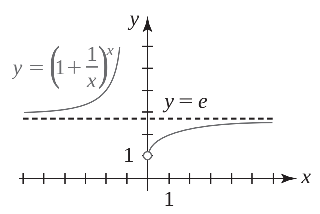


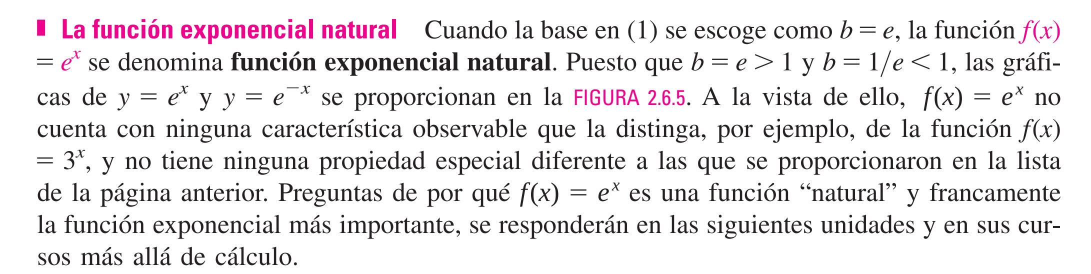

FIGURA 2.6.4 $y = e$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f$

y a partir de la gráfica en la FIGURA 2.6.4. En la figura, la recta horizontal discontinua $y = e$ es un asíntota horizontal de la gráfica de $f$. También se dice que $e$ es el *límite* de $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando $x \rightarrow \infty$ y se escribe

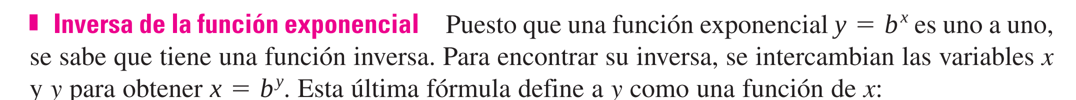
$$e = \lim_{x\rightarrow\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{3}$$

A menudo observará una definición alterna del número $e$. Si en (3) se hace $h = 1/x$, entonces cuando $x \rightarrow \infty$ tendremos simultáneamente $h \rightarrow 0$. Por tanto, una forma equivalente de (3) es

$$e = \lim_{h\rightarrow 0}(1 + h)^{1/h}. \tag{4}$$



**La función exponencial natural** Cuando la base en (1) se escoge como $b = e$, la función $f(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Puesto que $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ se proporcionan en la FIGURA 2.6.5. A la vista de ello, $f(x) = e^x$ no cuenta con ninguna característica observable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene ninguna propiedad especial diferente a las que se proporcionaron en la lista de la página anterior. Preguntas de por qué $f(x) = e^x$ es una función "natural" y francamente la función exponencial más importante, se responderán en las siguientes unidades y en sus cursos más allá de cálculo.



**Inversa de la función exponencial** Puesto que una función exponencial $y = b^x$ es uno a uno, se sabe que tiene una función inversa. Para encontrar su inversa, se intercambian las variables $x$ y $y$ para obtener $x = b^y$. Esta última fórmula define a $y$ como una función de $x$:

- $y$ es el exponente de la base $b$ que produce $x$.

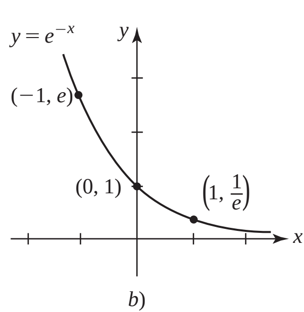



FIGURA 2.6.5 Función exponencial natural en *a*)

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, la línea precedente puede volver a escribirse como:

- $y$ es el logaritmo de la base $b$ que produce $x$.

La última línea se abrevia usando la notación $y = \log_b x$ y se denomina **función logarítmica**.

**Definición 2.6.2** Función logarítmica

La **función logarítmica** con base $b > 0, b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y. \tag{5}$$

Para $b > 0$ no hay ningún número real $y$ para el cual $b^y$ sea 0 o negativo. Así, a partir de $x = b^y$ se concluye que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de números reales positivos $(0, \infty)$.

Para enfatizar, todo lo que se ha dicho en las frases precedentes es:

- La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes.

es decir, significan lo mismo. Como una consecuencia, dentro de un contexto específico como al resolver un problema, es posible usar cualquier forma que sea la más conveniente. La lista siguiente ilustra varios ejemplos de declaraciones logarítmicas y exponenciales equivalentes:

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_3 9 = 2$ | $9 = 3^2$ |
| $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ | $2 = 8^{1/3}$ |
| $\log_{10} 0.001 = -3$ | $0.001 = 10^{-3}$ |
| $\log_b 5 = -1$ | $5 = b^{-1}$ |

**Gráficas** Debido a que una función logarítmica es la inversa de una función exponencial, es posible obtener la gráfica de la primera al reflejar la gráfica de la segunda en la recta $y = x$. A medida que inspeccione las dos gráficas en la FIGURA 2.6.6, recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se vuelven, a su vez, el rango $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. Observe que la intersección $y$ (0, 1) de la función exponencial se vuelve la intersección $x$ (1, 0) de la función logarítmica. También, cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ para la gráfica de $y = b^x$ se vuelve una asíntota vertical para la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 2.6.6 se observa que para $b > 1$, $x = 0$, que es la ecuación del eje $y$, es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = \log_b x$.

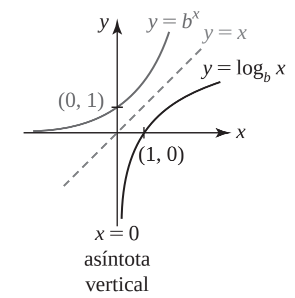



FIGURA 2.6.6 Gráfica de la función logarítmica con base $b > 1$

**Propiedades de la función logarítmica** En la lista siguiente se resumen algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$:

- El dominio de $f$ es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- El rango de $f$ es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- La intersección $x$ de $f$ es (1, 0). La gráfica de $f$ no tiene intersección $y$.
- La función $f$ es creciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje $y$, es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para la gráfica de $f$.
- La función $f$ es uno a uno.

Se pide su atención especial para el tercer elemento de la lista anterior

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad b^0 = 1. \tag{6}$$

También,

$$\log_b b = 1 \quad \text{puesto que} \quad b^1 = b. \tag{7}$$

El resultado en (7) significa que además de (1, 0), la gráfica de cualquier función logarítmica (5) con base $b$ también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también produce dos identidades útiles algunas veces. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y luego $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{y} \quad y = \log_b b^y. \tag{8}$$

Por ejemplo, a partir de $2^{\log_2 10} = 10$ y $\log_3 3^7 = 7$.

**Logaritmo natural** Los logaritmos con base $b = 10$ se denominan **logaritmos comunes** y los logaritmos con base $b = e$ se llaman **logaritmos naturales**. Además, suele ser costumbre escribir el logaritmo natural $\log_e x$ como $\ln x$. Puesto que $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma logarítmica característica que se muestra en la figura 2.6.6. Para la base $b = e$, (5) se vuelve

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y. \tag{9}$$

Los análogos de (6) y (7) para el logaritmo natural son

$$\ln 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad e^0 = 1. \tag{10}$$

$$\ln e = 1 \quad \text{puesto que} \quad e^1 = e. \tag{11}$$

Las identidades en (8) se vuelven

$$x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y. \tag{12}$$

Por ejemplo, a partir de (12), $e^{\ln 25} = 25$.

**Leyes de los logaritmos** Las leyes de los exponentes pueden volver a plantearse de manera equivalente como las leyes de los logaritmos. Por ejemplo, si $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$, entonces por (5), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$. Por *i*) de las leyes de los exponentes, $MN = b^{x_1+x_2}$. Esto, expresado como un logaritmo, es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Al sustituir $x_1$ y $x_2$ se obtiene $\log_b M + \log_b N = \log_b MN$. Las partes restantes del siguiente teorema pueden demostrarse de la misma manera.

**Teorema 2.6.1** Leyes de los logaritmos

Para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, y números enteros positivos $M$ y $N$:

*i*) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

*ii*) $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

*iii*) $\log_b M^c = c\log_b M$, para cualquier número real $c$.

## EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplifique y escriba $\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4$ como un logaritmo único.

**Solución** Por *iii*) de las leyes de los logaritmos, puede escribirse

$$\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 = \ln (36)^{1/2} + \ln 4^2 = \ln 6 + \ln 16.$$

Entonces, por *i*) de las leyes de los logaritmos,

$$\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 = \ln 6 + \ln 16 = \ln (6 \cdot 16) = \ln 96.$$ ■

## EJEMPLO 3 Reescribir expresiones logarítmicas

Use las leyes de los logaritmos para volver a escribir cada expresión y evalúe.

***a***) $\ln\sqrt{e}$  ***b***) $\ln 5e$  ***c***) $\ln\dfrac{1}{e}$

**Solución**

***a***) Puesto que $\sqrt{e} = e^{1/2}$ por *iii*) de las leyes de los logaritmos se tiene:

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{a partir de (11), } \ln e = 1$$

***b***) Por *i*) de las leyes de los logaritmos y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094. \quad \leftarrow \text{a partir de (11), } \ln e = 1$$

***c***) Por *ii*) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1. \quad \leftarrow \text{a partir de (10) y (11)}$$

Observe que *iii*) de las leyes de los logaritmos también puede usarse aquí:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1.$$ ■

## EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones

***a***) Resuelva la ecuación logarítmica $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para $x$.
***b***) Resuelva la ecuación exponencial $e^{10k} = 7$ para $k$.

**Solución**

***a***) Por *i*) de las leyes de los logaritmos, el miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Entonces, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) - \ln(2x + 5) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \ln \frac{8x - 2}{2x + 5} = 0.$$

Por (9) se concluye que

$$\frac{8x - 2}{2x + 5} = e^0 = 1 \qquad \text{o bien} \qquad 8x - 2 = 2x + 5.$$

A partir de la última ecuación encontramos que $x = \frac{7}{6}$.

***b***) Se usa (9) para volver a escribir la expresión exponencial $e^{10k} = 7$ como la expresión logarítmica $10k = \ln 7$. En consecuencia, con ayuda de una calculadora

$$k = \frac{1}{10} \ln 7 \approx 0.1946.$$

■

**Cambio de base** La gráfica de $y = 2^x - 5$ es la gráfica de $y = 2^x$ desplazada 5 unidades hacia abajo. Como se observa en la FIGURA 2.6.7, la gráfica tiene una intersección $x$. Al hacer $y = 0$ vemos que $x$ es la solución de la ecuación $2^x - 5 = 0$ o $2^x = 5$. Así, una solución perfectamente válida es $x = \log_2 5$. Pero desde un punto de vista computacional (es decir, el hecho de expresar $x$ como un número), la última respuesta no es aconsejable porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica con base 2. Podemos calcular la respuesta al cambiar $\log_2 5$ al logaritmo natural al tomar simplemente el log natural de ambos miembros de la ecuación exponencial $2^x = 5$:



FIGURA 2.6.7 Intersección $x$ de $y = 2^x - 5$

$$\ln 2^x = \ln 5$$
$$x \ln 2 = \ln 5$$

*Nota*: En realidad dividimos los logaritmos aquí →

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219.$$

Por cierto, puesto que se empezó con $x = \log_2 5$, el último resultado también demuestra la igualdad $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$. Entonces, la intersección $x$ de la gráfica es $(\log_2 5, 0) = (\log 5/\ln 2, 0) \approx (2.32, 0)$.

En general, para convertir un logaritmo con cualquier base $b > 0$ en logaritmo natural, primero reescribimos la expresión logarítmica $x = \log_b N$ como una expresión exponencial equivalente $b^x = N$. Luego se toma el logaritmo natural a ambos miembros de la última igualdad $x \ln b = \ln N$ y se despeja $x$. Esto produce la **fórmula general de cambio de base**:

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}. \qquad (13)$$

## 2.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

### Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función dada. Encuentre la intersección $y$ y la asíntota horizontal de la gráfica.

**1.** $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

**2.** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

**3.** $f(x) = -2^x$

**4.** $f(x) = -2^{-x}$

**5.** $f(x) = -5 + e^x$

**6.** $f(x) = 2 + e^{-x}$

En los problemas 7-10, encuentre una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de $f$ pase por el punto dado.

**7.** $(3, 216)$

**8.** $(-1, 5)$

**9.** $(-1, e^2)$

**10.** $(2, e)$

En los problemas 11-14, use una gráfica para resolver la desigualdad dada para $x$.

**11.** $2^x > 16$

**12.** $e^x \leq 1$

**13.** $e^{x-2} < 1$

**14.** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$

En los problemas 15 y 16, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función dada es par. Trace la gráfica de $f$.

**15.** $f(x) = e^{x^2}$

**16.** $f(x) = e^{-|x|}$

En los problemas 17 y 18, use la gráfica obtenida en los problemas 15 y 16 como ayuda para trazar la gráfica de la función $f$ dada.

**17.** $f(x) = 1 - e^{x^2}$

**18.** $f(x) = 2 + 3e^{-|x|}$

**19.** Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de $f$.

**20.** Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de $f$.

En los problemas 21 y 22, trace la gráfica de la función $f$ dada definida por partes.

**21.** $f(x)\begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

**22.** $f(x)\begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 23-26, vuelva a escribir la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica equivalente.

**23.** $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

**24.** $9^0 = 1$

**25.** $10^4 = 10\,000$

**26.** $10^{0.3010} = 2$

En los problemas 27-30, vuelva a escribir la expresión logarítmica dada como una expresión exponencial equivalente.

**27.** $\log_2 128 = 7$

**28.** $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

**29.** $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

**30.** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

En los problemas 31 y 32, encuentre una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de $f$ pase por el punto dado.

**31.** $(49, 2)$

**32.** $\left(4, \frac{1}{3}\right)$

En los problemas 33-38, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

**33.** $\ln e^e$

**34.** $\ln(e^4 e^9)$

**35.** $10^{\log_{10} 6^2}$

**36.** $25^{\log_5 8}$

**37.** $e^{-\ln 7}$

**38.** $e^{\frac{1}{2}\ln \pi}$

En los problemas 39-42, encuentre el dominio de la función $f$ dada. Encuentre la intersección $x$ y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de $f$.

**39.** $f(x) = -\ln x$

**40.** $f(x) = -1 + \ln x$

**41.** $f(x) = -\ln(x + 1)$

**42.** $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

En los problemas 43 y 44, encuentre el dominio de la función $f$ dada.

**43.** $f(x) = \ln(9 - x^2)$

**44.** $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

**45.** Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de $f$. Encuentre las intersecciones $x$ y la asíntota vertical de la gráfica.

**46.** Use la gráfica obtenida en el problema 45 para trazar la gráfica de $y = \ln|x - 2|$. Encuentre las intersecciones $x$ y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 47-50, use las leyes de los logaritmos para volver a escribir la expresión dada como un logaritmo.

**47.** $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$

**48.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$

**49.** $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

**50.** $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$

En los problemas 51-54, use las leyes de los logaritmos de modo que $\ln y$ no contenga productos, cocientes ni potencias.

**51.** $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$

**52.** $y = \sqrt{\dfrac{(2x + 1)(3x + 2)}{4x + 3}}$

**53.** $y = \dfrac{(x^3 - 3)^5(x^4 + 3x^2 + 1)^8}{\sqrt{x}(7x + 5)^9}$

**54.** $y = 64x^6\sqrt{x + 1}\sqrt[3]{x^2 + 2}$

En los problemas 55 y 56, use el logaritmo natural para encontrar $x$ en el dominio de la función dada para el que $f$ asume el valor indicado.

**55.** $f(x) = 6^x$; $f(x) = 51$

**56.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f(x) = 7$

En los problemas 57-60, use el logaritmo natural para despejar $x$.

**57.** $2^{x+5} = 9$

**58.** $4 \cdot 7^{2x} = 9$

**59.** $5^x = 2e^{x+1}$

**60.** $3^{2(x-1)} = 2^{x-3}$

En los problemas 61 y 62, despeje $x$.

**61.** $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$

**62.** $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

## ≡ Modelos matemáticos

**63. Crecimiento exponencial** Un modelo exponencial para el número de bacterias en un cultivo en el instante $t$ está dado por $P(t) = P_0e^{kt}$, donde $P_0$ es la población inicial y $k > 0$ es la constante de crecimiento.

***a)*** Después de 2 horas, se observa que el número inicial de bacterias en un cultivo se ha duplicado. Encuentre un modelo de crecimiento exponencial $P(t)$.

***b)*** Según el modelo del inciso *a*), ¿cuál es el número de bacterias presentes en el cultivo al cabo de 5 horas?

***c)*** Encuentre el tiempo necesario para que el cultivo crezca hasta 20 veces su tamaño inicial.

**64. Desintegración exponencial** Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante $t$ está dado por $A(t) = A_0e^{kt}$, donde $A_0$ es la cantidad inicial y $k < 0$ es la constante de desintegración.

***a)*** Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había decrecido 3%. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de $t$ horas.

*b*) Encuentre la cantidad remanente después de 24 horas.

*c*) Encuentre el instante en que $A(t) = \frac{1}{2}A_0$ se denomina **vida media** de la sustancia. ¿Cuál es la vida media de la sustancia en el inciso *a*)?

**65. Crecimiento logístico** Un estudiante contagiado con el virus de influenza vuelve a un campus aislado de una universidad donde hay 2 000 estudiantes. El número de estudiantes infectados después de *t* días del regreso del estudiante se pronostica por medio de la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

*a*) Según este modelo matemático, ¿cuántos estudiantes estarán contagiados por la influenza después de 5 días?

*b*) ¿En cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población de estudiantes?

*c*) ¿Cuántos estudiantes pronostica el modelo que estarán infectados al cabo de un muy largo periodo?

*d*) Trace la gráfica de $P(t)$.

**66. Ley de enfriamiento de Newton** Si un objeto o cuerpo se coloca en un medio (como aire, agua, etc.) que se mantiene a temperatura constante $T_m$, y si la temperatura inicial del objeto es $T_0$, entonces la ley de enfriamiento de Newton pronostica que la temperatura del objeto en el instante *t* está dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt},\ k < 0.$$

*a*) Un pastel se retira de un horno donde la temperatura era 350 °F y se coloca en una cocina donde la temperatura es constante a 75 °F. Un minuto después se mide que la temperatura del pastel es 300 °F. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 6 minutos?

*b*) ¿En qué instante la temperatura del pastel es 80 °F?

## ≡ Piense en ello

**67.** Analice: ¿cómo es posible obtener las gráficas de las funciones dadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ por medio de una transformación rígida (desplazamiento o reflexión)?

*a*) $y = \ln 5x$ *b*) $y = \ln \frac{x}{4}$

*c*) $y = \ln x^{-1}$ *d*) $y = \ln(-x)$

**68.** *a*) Use un instrumento de graficado para obtener la gráfica de la función $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

*b*) Demuestre que *f* es una función impar; es decir, $f(-x) = -f(x)$.

# 2.7 De las palabras a las funciones

**Introducción** En la unidad 5 hay varias instancias en las que se espera que usted traduzca las palabras que describen una *función* o una *ecuación* en símbolos matemáticos.

En esta sección el centro de atención lo constituyen problemas que implican funciones. Se empieza con una descripción verbal sobre el producto de dos números.

**EJEMPLO 1** Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números.

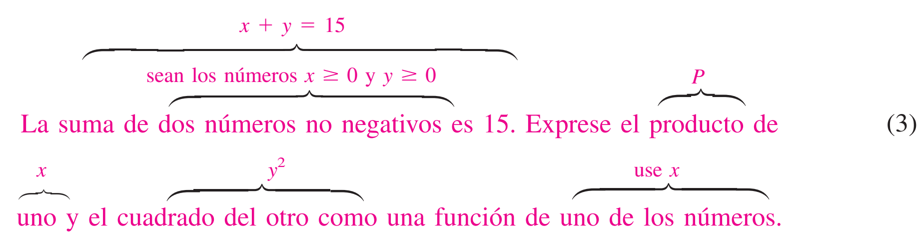
**Solución** Primero, los números se representan por los símbolos *x* y *y* y se recuerda que *no negativos* significa que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Al usar estos símbolos, las palabras "la suma. . . es 5" se traduce en la ecuación $x + y = 5$; ésta *no* es la función que se busca. La palabra *producto* en la segunda oración sugiere el uso del símbolo *P* para denotar la función que se quiere. Así, *P* es el producto de uno de los números; por ejemplo, *x* y el cuadrado del otro, por ejemplo, $y^2$:

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, aún no hemos terminado porque se supone que *P* "es una función de *uno* de los números". Ahora usamos el hecho de que los números *x* y *y* están relacionados por $x + y = 5$. A partir de esta última ecuación, sustituimos $y = 5 - x$ en (1) para obtener el resultado deseado:

$$P(x) = x(5 - x)^2. \tag{2}$$ ■

A continuación se muestra un diagrama simbólico del análisis del problema dado en el ejemplo 1:



Observe que la segunda oración es vaga respecto a cuál número se eleva al cuadrado. Esto implica que en realidad no importa: (1) también podría escribirse como $P = yx^2$. También hubiéramos podido usar $x = 5 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (5 - y)y^2$. En un entorno de cálculo no importaría si trabajamos con $P(x)$ o $P(y)$ porque al encontrar *uno* de los números automáticamente hallamos el otro a partir de la ecuación $x + y = 5$. Esta última ecuación se denomina **restricción**. Una restricción no sólo define una relación entre las variables $x$ y $y$, sino que a menudo impone una limitación sobre la forma en que pueden variar $x$ y $y$. Como veremos en el siguiente ejemplo, las restricciones ayudan a determinar el dominio de la función.

## EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

**Solución** Tomado fuera del contexto del planteamiento del problema en el ejemplo 1, podría concluirse que puesto que

$$P(x) = x(5 - x)^2 = 25x - 10x^2 + x^3$$

es una función polinomial, su dominio es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números eran no negativos. A partir del requerimiento de que $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ se obtiene $x \geq 0$ y $x \leq 5$, lo cual significa que $x$ debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 5$. Al usar notación de intervalos, el dominio de la función producto $P$ en (2) es el intervalo cerrado [0, 5]. ■

Si se permite $x > 5$, entonces $y = 5 - x < 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $y > 0$.

A menudo en problemas que requieren la traducción de palabras en una función, una buena idea es trazar una curva o imagen e identificar cantidades dadas en el dibujo. Éste debe ser sencillo.

## EJEMPLO 3 Cantidad de valla

Un ranchero desea cercar un terreno rectangular cuya área es de 1 000 m². El terreno será cercado y dividido en porciones iguales mediante una cerca paralela a dos lados del terreno. Exprese la cantidad de valla usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno.

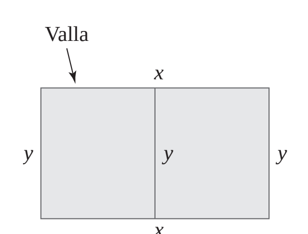



FIGURA 2.7.1 Terreno rectangular en el ejemplo 3

**Solución** El dibujo debe ser un rectángulo con una recta trazada en su parte media, semejante a la FIGURA 2.7.1. Como se muestra en la figura, sea $x > 0$ la longitud del terreno rectangular y sea $y > 0$ su ancho. La función que se busca es la "cantidad de valla". Si el símbolo $F$ representa esta cantidad, entonces la suma de las longitudes de las *cinco* porciones —dos horizontales y tres verticales— de la valla es

$$F = 2x + 3y. \tag{4}$$

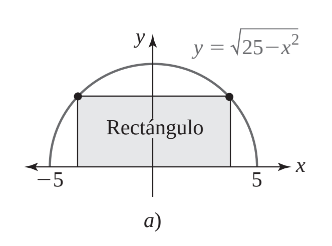
Pero el área del terreno cercado debe ser de 1 000 m², de modo que $x$ y $y$ deben estar relacionados por la restricción $xy = 1\,000$. A partir de la última ecuación se obtiene $y = 1\,000/x$, que puede usarse para eliminar $y$ en (4). Así, la cantidad de valla $F$ como una función de la longitud $x$ es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, o bien,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \tag{5}$$

Puesto que $x$ representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, se concluye que es positiva. Pero además de esta restricción, sobre $x$ no hay ninguna otra. Entonces, a diferencia del ejemplo previo, la función (5) no está definida sobre un intervalo cerrado. El dominio de $F(x)$ es el intervalo $(0, \infty)$. ■

## EJEMPLO 4 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje $x$ y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$. Vea la FIGURA 2.7.2*a*). Exprese el área del rectángulo como una función de $x$.



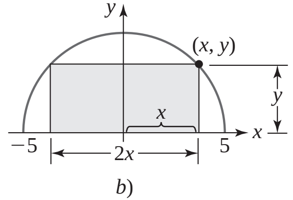




FIGURA 2.7.2 Rectángulo en el ejemplo 4

**Solución** Si $(x, y), x > 0, y > 0$, denota el vértice de un rectángulo sobre el círculo en el primer cuadrante, entonces como se muestra en la figura 2.7.2*b*), el área $A$ es longitud × ancho, o bien,

$$A = (2x) \times y = 2xy. \tag{6}$$

La ecuación del semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ es la restricción en este problema. Esta ecuación se usa para eliminar $y$ en (6) y obtener el área del rectángulo como una función de $x$,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}. \tag{7}$$

El dominio implícito de (7) es el intervalo cerrado $[-5, 5]$, pero debido a que asumimos que $(x, y)$ era un punto sobre el semicírculo en el primer cuadrante, debemos tener $x > 0$. Así, el dominio de (7) es el intervalo $(0, 5)$. ■

## EJEMPLO 5 Distancia

Exprese la distancia de un punto $(x, y)$ en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ hasta el punto $(2, 4)$ como una función de $x$.

**Solución** Sea $(x, y)$ un punto en el primer cuadrante sobre el círculo y sea $d$ la distancia de $(x, y)$ a $(2, 4)$. Vea la FIGURA 2.7.3. Entonces, a partir de la fórmula de la distancia,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{8}$$

La restricción en este problema es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. A partir de esta ecuación es posible sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (8) por el número 1. Además, al usar la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ es posible eliminar el símbolo $y$ en (8). Así, la distancia $d$ como una función de $x$ es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \tag{9}$$

Puesto que $(x, y)$ es un punto sobre el círculo en el primer cuadrante, la variable $x$ puede variar entre 0 y 1; es decir, el dominio de la función en (9) es el intervalo abierto $(0, 1)$. ■

FIGURA 2.7.3 Distancia $d$ en el ejemplo 5

◀ Se considera que un punto en el eje $x$ o en el eje $y$ no está en ningún cuadrante.

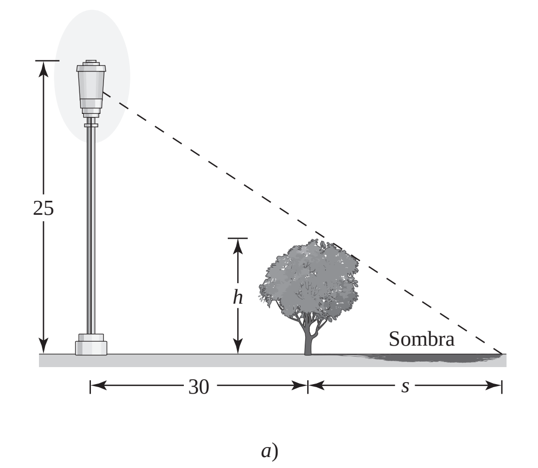
Si un problema en lenguaje coloquial implica triángulos, es necesario estudiar el problema con cuidado y determinar qué es aplicable: el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría con triángulos rectángulos.

## EJEMPLO 6 Longitud de una sombra

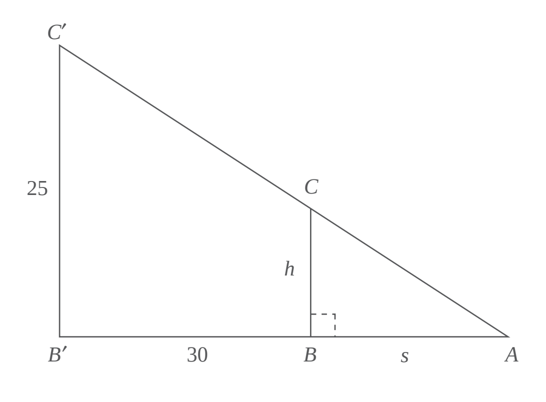
Un árbol se planta a 30 pies de la base de un poste que mide 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.

**Solución** Como se muestra en la FIGURA 2.7.4*a*), $h$ y $s$ denotan la altura del árbol y la longitud de su sombra, respectivamente. Debido a que los triángulos mostrados en la figura 2.7.4*b*) son rectángulos, podría pensarse en utilizar el teorema de Pitágoras. Para este problema, no obstante, el teorema de Pitágoras llevaría por mal camino. La cuestión importante que debe observarse aquí es que los triángulos $ABC$ y $AB'C'$ son semejantes. Luego aplicamos el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales para escribir

$$\frac{h}{s} = \frac{25}{s + 30} \quad \text{o bien} \quad (s + 30)h = 25s.$$




*a*)




*b*)

FIGURA 2.7.4 Poste y árbol en el ejemplo 6

Al despejar $s$ en la última ecuación en términos de $h$ se obtiene la función racional

$$s(h) = \frac{30h}{25 - h}. \tag{10}$$

Tiene sentido físico tomar el dominio de la función (10) definido por $0 \leq h < 25$. Si $h > 25$, entonces $s(h)$ es negativo, lo cual no tiene sentido en el contexto físico del problema. ■

## EJEMPLO 7 Longitud de una escalera

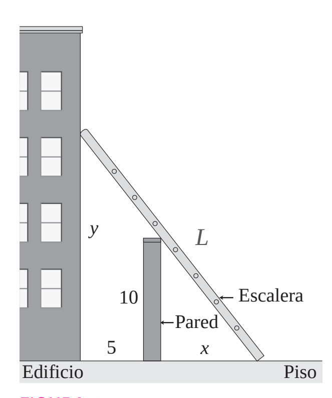



FIGURA 2.7.5 Escalera en el ejemplo 7

Una pared de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio. Una escalera, sostenida por la pared, se coloca en el piso como se muestra en la FIGURA 2.7.5. Exprese la longitud de la escalera en términos de la distancia $x$ entre la base de la pared y la base de la escalera.

**Solución** Sea $L$ la longitud de la escalera. Con las variables $x$ y $y$ definidas en la figura 2.7.5, de nuevo se observa que hay dos triángulos rectángulos; el mayor tiene tres lados con longitudes $L$, $y$ y $x + 5$, y el menor tiene dos lados de longitudes $x$ y 10. La escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, de modo que por el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2. \tag{11}$$

Los triángulos rectángulos en la figura 2.7.5 son semejantes porque ambos contienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo común que la escalera forma con el piso. De nuevo se usa el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Esto permite escribir lo siguiente:

$$\frac{y}{x+5} = \frac{10}{x} \qquad \text{de modo que} \qquad y = \frac{10(x+5)}{x}.$$

Al usar el último resultado, (11) se vuelve

$$\begin{aligned} L^2 &= (x+5)^2 + \left[\frac{10(x+5)}{x}\right]^2 \\ &= (x+5)^2\left[1 + \frac{100}{x^2}\right] \\ &= (x+5)^2\left[\frac{x^2+100}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

Al tomar la raíz cuadrada se obtiene $L$ como una función de $x$,

$$L(x) = \frac{x+5}{x}\sqrt{x^2 + 100}. \tag{12}$$ ■

## EJEMPLO 8 Distancia

Un avión vuela a una altura constante de 3 000 pies sobre el nivel del suelo alejándose de un observador que está en tierra. Exprese la distancia horizontal entre el avión y el observador como una función del ángulo de elevación del plano medido por el observador.

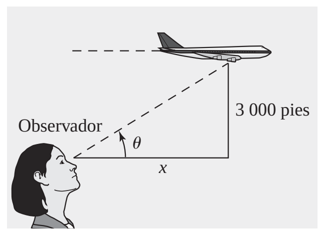



FIGURA 2.7.6 Avión en el ejemplo 8

**Solución** Como se muestra en la FIGURA 2.7.6, sea $x$ la distancia horizontal entre el avión y el observador, y sea $\theta$ el ángulo de elevación. El triángulo en la figura es rectángulo. Así, por trigonometría de triángulos rectos, el cateto opuesto a $\theta$ está relacionado con el cateto adyacente a $\theta$ por $\tan\theta = \text{op}/\text{ady}$. En consecuencia,

$$\tan\theta = \frac{3\,000}{x} \qquad \text{o bien} \qquad x(\theta) = 3\,000\cot\theta, \tag{13}$$

donde $0 < \theta < \pi/2$. ■

## 2.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

### Fundamentos

En los problemas 1-32, traduzca las palabras en una función idónea. Proporcione el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.
2. Exprese la suma de dos números diferentes de cero y su recíproco como una función del número.
3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro como una función de uno de los números.
4. Sean $m$ y $n$ enteros positivos. La suma de dos números no negativos es $S$. Exprese el producto de la $m$-ésima potencia de uno y la $n$-ésima potencia del otro como una función de uno de los números.
5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.
6. El área de un rectángulo es 400 pulg$^2$. Exprese el perímetro del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.
7. Exprese el área del rectángulo sombreado en la FIGURA 2.7.7 como una función de $x$.

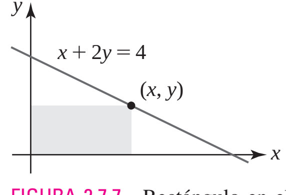



FIGURA 2.7.7 Rectángulo en el problema 7

8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto (2, 4) mostrado en la FIGURA 2.7.8 como una función de $x$.

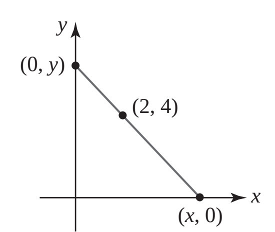



FIGURA 2.7.8 Segmento de recta en el problema 8

9. Exprese como una función de $x$ la distancia de un punto $(x, y)$ sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto (2, 3).
10. Exprese como una función de $x$ la distancia de un punto $(x, y)$ sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ al punto (0, 1).
11. Exprese el perímetro de un cuadrado como una función de su área $A$.
12. Exprese el área de un círculo como una función de su diámetro $d$.
13. Exprese el diámetro de un círculo como una función de su circunferencia $C$.
14. Exprese el volumen de un cubo como una función del área $A$ de su base.
15. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de su altura $h$.
16. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud $s$ de uno de sus lados.
17. Un alambre de longitud $x$ se dobla en forma de círculo. Exprese el área del círculo como una función de $x$.
18. A un alambre de longitud $L$ se cortan $x$ unidades desde un extremo. Una parte del alambre se dobla en forma de cuadrado y la otra parte se dobla en forma de círculo. Exprese la suma de las áreas como una función de $x$.
19. Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1 000 pies$^2$ usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta $4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta $1.60 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta $4 por pie.
20. El marco de un cometa consta de seis partes de plástico ligero. El marco externo del cometa consta de cuatro partes cortadas de antemano; dos partes de longitud 2 pies y dos partes de longitud 3 pies. Exprese el área del cometa como una función de $x$, donde $2x$ es la longitud de la barra transversal horizontal mostrada en la FIGURA 2.7.9.

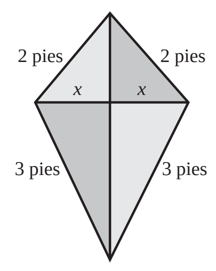



FIGURA 2.7.9 Cometa en el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta con un volumen de 450 pulg$^3$, de modo que la longitud de su base sea tres veces su ancho. Exprese el área superficial de la caja como una función de su ancho.
22. Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, tiene un radio de 5 pies y una altura de 15 pies. Vea la FIGURA 2.7.10. Hacia el tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua como una función de su profundidad. [*Sugerencia*: El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

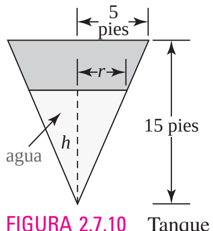



FIGURA 2.7.10 Tanque cónico en el problema 22

**23.** El automóvil $A$ pasa por el punto $O$ en dirección al este a velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil $B$ pasa por el mismo punto 1 hora después en dirección al norte a velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los automóviles como una función del tiempo $t$, donde $t$ se mide empezando cuando el automóvil $B$ pasa por el punto $O$. Vea la FIGURA 2.7.11.

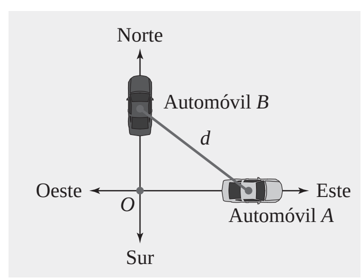
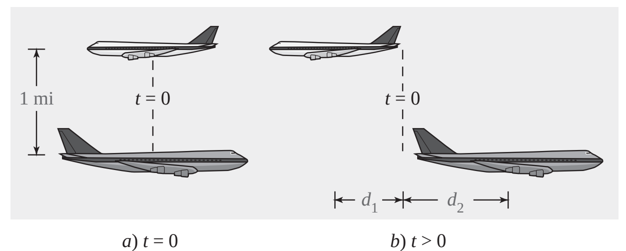



FIGURA 2.7.11 Automóviles en el problema 23

**24.** En el instante $t = 0$ (medido en horas), dos aviones con una separación vertical de 1 mi pasan uno encima del otro, volando en direcciones opuestas. Vea la FIGURA 2.7.12. Los aviones vuelan horizontalmente a velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h.

***a***) Exprese la distancia horizontal entre los aviones como una función de $t$. [*Sugerencia*: Distancia = velocidad $\times$ tiempo.]

***b***) Exprese la distancia diagonal entre los aviones como una función de $t$.




*a*) $t = 0$ *b*) $t > 0$

FIGURA 2.7.12 Aviones en el problema 24

**25.** La piscina que se muestra en la FIGURA 2.7.13 mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura $h$ del agua por arriba del extremo profundo. [*Sugerencia*: El volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leq h \leq 8$.]

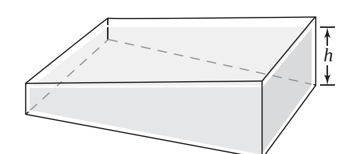



FIGURA 2.7.13 Piscina en el problema 25

**26.** Las regulaciones del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el envío de paquetes postales estipulan que la longitud más la circunferencia (el perímetro de un extremo) de un paquete no debe exceder 108 pulg. Exprese el volumen del paquete como una función del ancho $x$ mostrado en la FIGURA 2.7.14.

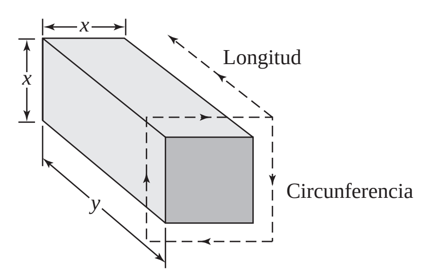



FIGURA 2.7.14 Paquete en el problema 26

**27.** Exprese la altura del globo mostrado en la FIGURA 2.7.15 como una función de su ángulo de elevación.

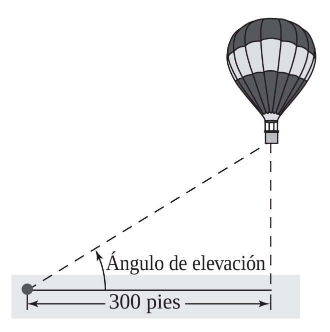



FIGURA 2.7.15 Globo en el problema 27

**28.** A una gran plancha metálica de 40 pulg de ancho se da forma de V al doblarla por la mitad a lo largo de su longitud. Exprese el área de la sección transversal triangular del canal como una función del ángulo $\theta$ en el vértice de la V. Vea la FIGURA 2.7.16.

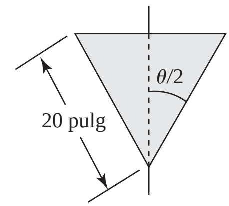



FIGURA 2.7.16 Sección transversal triangular en el problema 28

**29.** Como se muestra en la FIGURA 2.7.17, un tablón está apoyado en un burro, de modo que un extremo está apoyado en el suelo y el otro contra una construcción. Exprese la longitud $L$ del tablón como una función del ángulo $\theta$ indicado. [*Sugerencia*: Use dos triángulos rectángulos.]

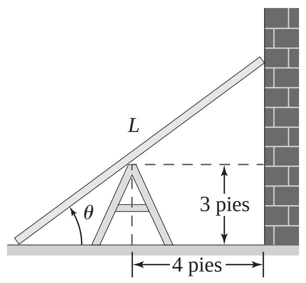



FIGURA 2.7.17 Tablón en el problema 29

**30.** Un ranchero desea cercar un terreno de pasto en forma de triángulo rectángulo usando 2 000 pies de valla a la mano. Vea la FIGURA 2.7.18. Exprese el área de ese terreno como una función del ángulo $\theta$. [*Sugerencia*: Use los símbolos en la figura para formar $\cot \theta$ y $\csc \theta$.]

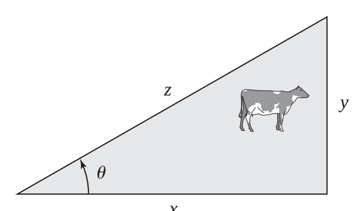



FIGURA 2.7.18 Terreno de pasto en el problema 30

**31.** Una estatua se coloca en un pedestal como se muestra en la FIGURA 2.7.19. Exprese el ángulo de visión $\theta$ como una función de la distancia $x$ desde el pedestal.

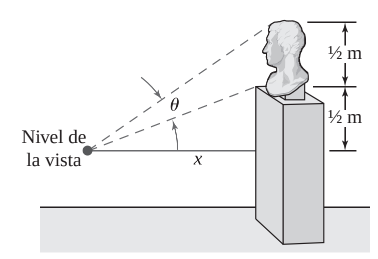



FIGURA 2.7.19 Estatua en el problema 31

**32.** Una mujer en una isla desea llegar a un punto $R$ en una costa recta desde un punto $P$ en la isla. El punto $P$ está a 9 mi de la costa y a 15 mi del punto $R$. Vea la FIGURA 2.7.20. Si la mujer rema en un bote a una velocidad de 3 mi/h hacia un punto $Q$ en tierra, y luego camina el resto del camino a una velocidad de 5 mi/h, exprese el tiempo total necesario para que la mujer llegue al punto $R$ como una función del ángulo $\theta$ indicado. [*Sugerencia*: Distancia = velocidad $\times$ tiempo.]

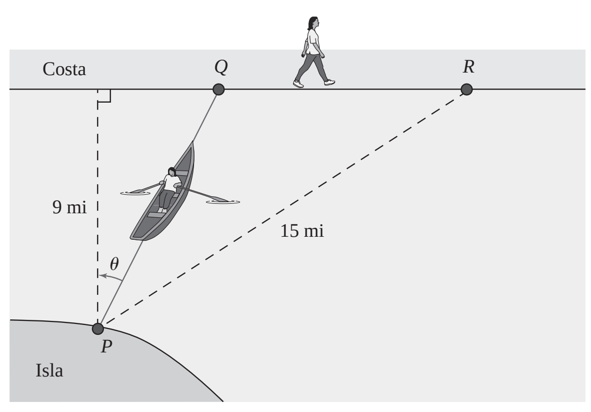



FIGURA 2.7.20 Mujer remando hacia la costa en el problema 32

## Piense en ello

**33.** Suponga que la altura en el ejemplo 7 es 60 pies. ¿Cuál es el dominio de la función $L(x)$ dada en (12)?

**34.** En un texto de ingeniería, el área del octágono mostrado en la FIGURA 2.7.21 está dada por $A = 3.31r^2$. Demuestre que esta fórmula es en realidad una aproximación al área; es decir, encuentre el área exacta $A$ del octágono como una función de $r$.

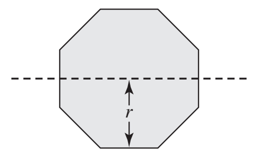



FIGURA 2.7.21 Octágono en el problema 34

# Competencia final de la unidad 2

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

## A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

**1.** Si $f$ es una función y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _____

**2.** La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar. _____

**3.** La gráfica de la función $f(x) = 5x^2 \cos x$ es simétrica con respecto al eje $y$. _____

**4.** La gráfica de la función $y = f(x + 3)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha. _____

**5.** La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ no tiene intersección $x$. _____

**6.** Una asíntota es una recta a la que tiende la gráfica de una función pero sin cruzarla jamás. _____

**7.** La gráfica de una función puede tener cuanto mucho dos asíntotas horizontales. _____

**8.** Si $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional y $q(a) = 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f$. _____

**9.** La función $y = -10 \sec x$ tiene amplitud 10. _____

**10.** El rango de la función $f(x) = 2 + \cos x$ es $[1, 3]$. _____

**11.** Si $f(x) = 1 + x + 2e^x$ es uno a uno, entonces $f^{-1}(3) = 0$. _____
**12.** Si $\tan(5\pi/4) = -1$, entonces $\tan^{-1}(-1) = 5\pi/4$. _____
**13.** Ninguna función par puede ser uno a uno. _____
**14.** Un punto de intersección de las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ debe estar sobre la recta $y = x$. _____
**15.** La gráfica de $y = \sec x$ no corta el eje $x$. _____
**16.** La función $f(x) = \text{sen}^{-1} x$ no es periódica. _____
**17.** $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. _____
**18.** $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ _____
**19.** $\ln \frac{e^b}{e^a} = b - a$ _____
**20.** El punto $(b, 1)$ está sobre la gráfica de $f(x) = \log_b x$. _____

## B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

**1.** El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x + 2}/x$ es ________.
**2.** Si $f(x) = 4x^2 + 7$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(f \circ g)(1) =$ ________, $(g \circ f)(1) =$ ________ y $(f \circ f)(1) =$ ________.
**3.** El vértice de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 16x + 70$ es ________.
**4.** Las intersecciones $x$ de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 35$ son ________.
**5.** La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^3(x - 1)^2(x - 5)$ es tangente al eje $x$ en ________ y pasa por el eje $x$ en ________.
**6.** El rango de la función $f(x) = 10/(x^2 + 1)$ es ________.
**7.** La intersección $y$ de la gráfica de $f(x) = (2x - 4)/(5 - x)$ es ________.
**8.** Una función racional cuya gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 1$ e intersección $x$ $(3, 0)$ es $f(x) =$ ________.
**9.** El periodo de la función $y = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}x$ es ________.
**10.** La gráfica de la función $y = \text{sen}(3x - \pi/4)$ es la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, 3x$ desplazada ________ unidades a la ________.
**11.** $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, \pi) =$ ________.
**12.** Si $f$ es una función uno a uno tal que $f^{-1}(3) = 1$, entonces un punto sobre la gráfica de $f$ es ________.
**13.** Por transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ sobre la gráfica de $y = e^x$ se mueve hacia el punto ________ sobre la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.
**14.** $e^{3\ln 10} =$ ________.
**15.** Si $3^x = 5$, entonces $x =$ ________.
**16.** Si $3e^x = 4e^{-3x}$, entonces $x =$ ________.
**17.** Si $\log_3 x = -2$, entonces $x =$ ________.
**18.** Al escribir $\log_9 27 = 1.5$ como declaración exponencial, se encuentra que es equivalente a ________.
**19.** La inversa de $y = e^x$ es________.
**20.** Si $f(x) = e^x - 3$, entonces $f(-\ln 2) =$ ________.

## C. Ejercicios

**1.** Estime el valor funcional haciendo uso de la gráfica de la función $y = f(x)$ en la FIGURA 2.R.1.

*a)* $f(-4)$ *b)* $f(-3)$
*c)* $f(-2)$ *d)* $f(-1)$
*e)* $f(0)$ *f)* $f(1)$
*g)* $f(1.5)$ *h)* $f(2)$
*i)* $f(3.5)$ *j)* $f(4)$

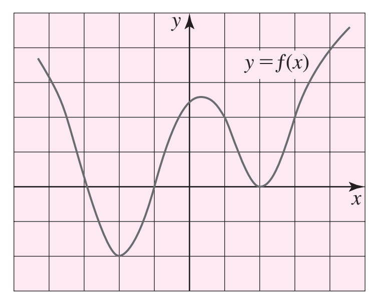



FIGURA 2.R.1 Gráfica para el problema 1

**2.** Dado que

$$g(t)\begin{cases} t^2, & -1 < t \leq 1 \\ 2t, & t \leq -1 \text{ o bien, } t > 1 \end{cases}$$

Encuentre para $0 < a < 1$:

***a***) $g(1 + a)$ ***b***) $g(1 - a)$
***c***) $g(1.5 - a)$ ***d***) $g(a)$
***e***) $g(-a)$ ***f***) $g(2a)$

**3.** Determine si los números 1, 5 y 8 están en el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

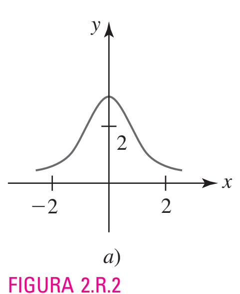
**4.** Suponga que $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = \sqrt{5 - x}$ y $h(x) = x^2$. Encuentre el dominio de cada una de las funciones dadas.

***a***) $f \circ h$ ***b***) $g \circ h$
***c***) $f \circ f$ ***d***) $g \circ g$
***e***) $f + g$ ***f***) $f/g$

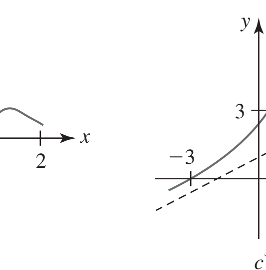
En los problemas 5 y 6, calcule $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, y simplifique.

**5.** $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$ **6.** $f(x) = 1 + 2x - \dfrac{3}{x}$

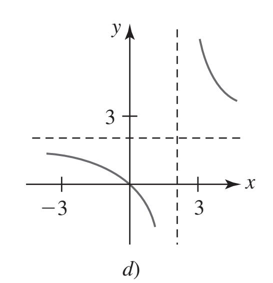
En los problemas 7-16, relacione la función racional dada con una de las gráficas *a*)-*j*).



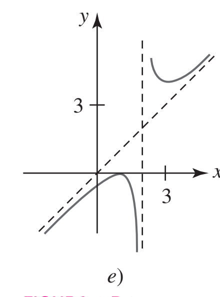

*a*)
FIGURA 2.R.2




*b*)
FIGURA 2.R.3

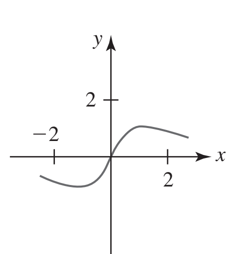



*c*)
FIGURA 2.R.4

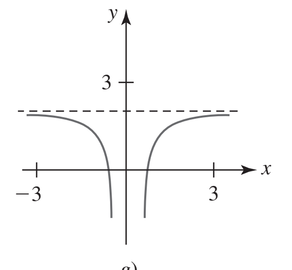



*d*)
FIGURA 2.R.5

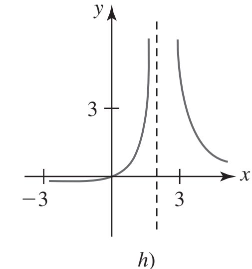
*e*)
FIGURA 2.R.6



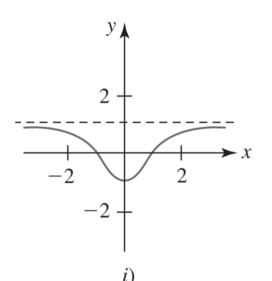

*f*)
FIGURA 2.R.7



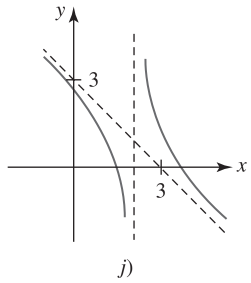

*g*)
FIGURA 2.R.8




*h*)
FIGURA 2.R.9




*i*)
FIGURA 2.R.10




*j*)
FIGURA 2.R.11

**7.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

**8.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

**9.** $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

**10.** $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

**11.** $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$

**12.** $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 2}$

**13.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{2x - 4}$

**14.** $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

**15.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

**16.** $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 17 y 18, encuentre la pendiente de la recta $L$ en cada figura.

**17.**

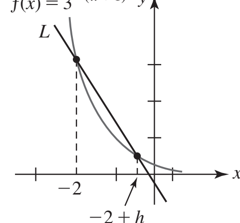



FIGURA 2.R.12 Gráfica para el problema 17

**18.**

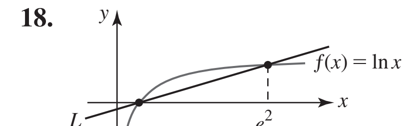



FIGURA 2.R.13 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $2^t = a$ y $6^t = b$. Use las leyes de los exponentes dadas en la sección 2.6 para encontrar el valor de la cantidad dada.

**19.** ***a***) $12^t$ ***b***) $3^t$ ***c***) $6^{-t}$

**20.** ***a***) $6^{3t}$ ***b***) $2^{-3t}2^{7t}$ ***c***) $18^t$

**21.** Encuentre una función $f(x) = ae^{kx}$ si (0, 5) y (6, 1) son puntos sobre la gráfica de $f$.

**22.** Encuentre una función $f(x) = a10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

**23.** Encuentre una función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de $f$ tiene una asíntota horizontal $y = 5$.

**24.** Encuentre una función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de $f$ tiene una asíntota vertical $x = 2$.

En los problemas 25-30, relacione las siguientes funciones con las gráficas dadas.

***a***) $y = \ln(x - 2)$ ***b***) $y = 2 - \ln x$

***c***) $y = 2 + \ln(x + 2)$ ***d***) $y = -2 - \ln(x + 2)$

***e***) $y = -\ln(2x)$ ***f***) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

**25.**

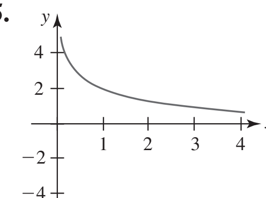



FIGURA 2.R.14 Gráfica para el problema 25

**26.**

FIGURA 2.R.15 Gráfica para el problema 26

**27.**

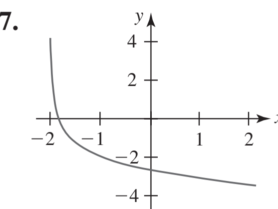



FIGURA 2.R.16 Gráfica para el problema 27

**28.**

FIGURA 2.R.17 Gráfica para el problema 28

**29.**

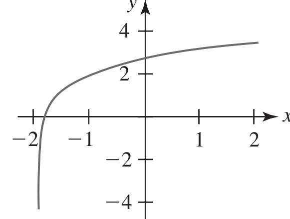



FIGURA 2.R.18 Gráfica para el problema 29

**30.**

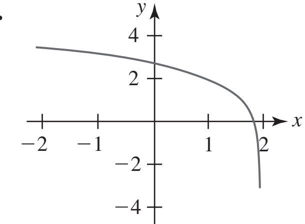



FIGURA 2.R.19 Gráfica para el problema 30

**31.** El ancho de una caja rectangular es tres veces su longitud, y su altura es dos veces su longitud.

***a***) Exprese el volumen $V$ de la caja como una función de su longitud $l$.
***b***) Como una función de su ancho $w$.
***c***) Como una función de su altura $h$.

**32.** Se piensa construir una caja cerrada en forma de cubo usando dos materiales distintos. El material para los lados cuesta 1 centavo por centímetro cuadrado y el material para las caras superior e inferior cuesta 2.5 centavos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total $C$ de construcción como una función de la longitud $x$ de un lado.

**33.** Exprese el volumen $V$ de la caja que se muestra en la FIGURA 2.R.20 como una función del ángulo $\theta$ indicado.

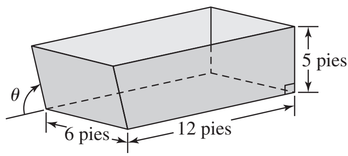



FIGURA 2.R.20 Caja en el problema 33

**34.** Considere el círculo de radio $h$ con centro $(h, h)$ mostrado en la FIGURA 2.R.21. Exprese el área de la región sombreada $A$ como una función de $h$.

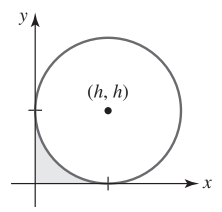



FIGURA 2.R.21 Círculo en el problema 34

**35.** Se construirá un canalón con una lámina metálica de 30 cm de ancho al doblar los bordes de ancho 10 cm a lo largo de cada lado, de modo que los lados formen ángulos $\phi$ con la vertical. Vea la FIGURA 2.R.22. Exprese el área de la sección transversal del canalón como una función del ángulo $\phi$.

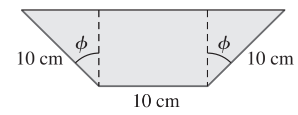



FIGURA 2.R.22 Canalón en el problema 35

**36.** Un tubo metálico se instalará horizontalmente alrededor de una esquina en forma de ángulo recto desde un vestíbulo de 8 pies de ancho hacia un vestíbulo de 6 pies de ancho. Vea la FIGURA 2.R.23. Exprese la longitud $L$ del tubo como una función del ángulo $\theta$ que se muestra en la figura.

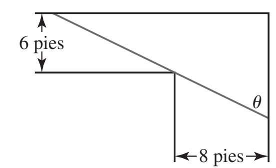



FIGURA 2.R.23 Tubo en el problema 36

**37.** En la FIGURA 2.R.24 se muestra un prisma cuyas caras paralelas son triángulos equiláteros. La base rectangular del prisma es perpendicular al eje $x$ y está inscrita en el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Exprese el volumen $V$ del prisma como una función de $x$.

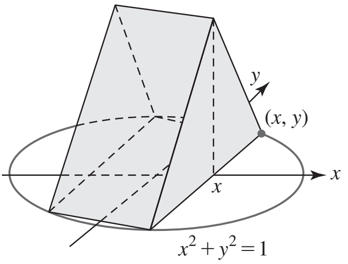



FIGURA 2.R.24 Prisma en el problema 37

**38.** El contenedor que se muestra en la FIGURA 2.R.25 consta de un cono invertido (abierto en su parte superior) sujeto a la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio fijo $R$. El volumen $V$ del contenedor es fijo. Exprese el área superficial total $S$ del contenedor como una función del ángulo $\theta$ indicado. [*Sugerencia*: El área superficial lateral de un cono está dada por $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$.]

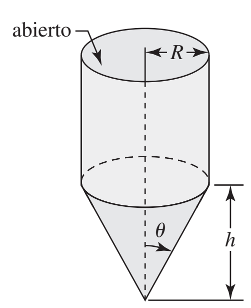
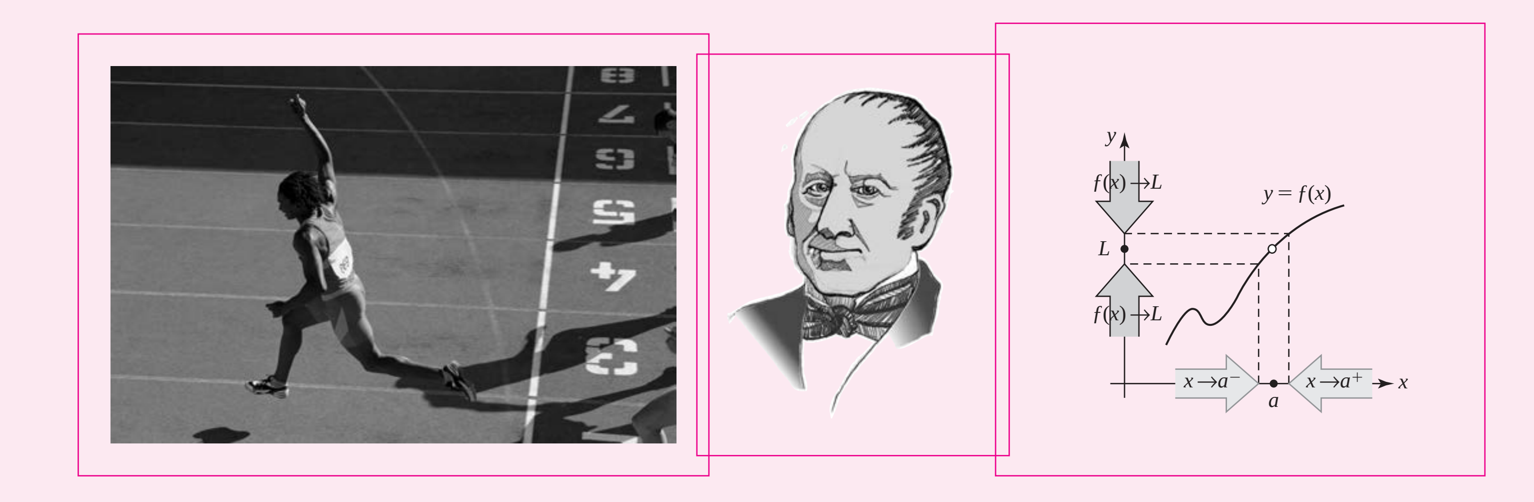



FIGURA 2.R.25 Contenedor en el problema 38

# Unidad 3

# Límite de una función




**En esta unidad** En un curso típico de cálculo se incluyen muchos temas. Sin embargo, los tres temas más importantes en este estudio son los conceptos de *límite*, *derivada* e *integral*. Cada uno de estos conceptos está relacionado con las funciones, razón por la cual empezamos con una revisión de algunos hechos importantes sobre funciones y sus gráficas.

Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del cálculo, se han usado dos problemas: el *problema de la recta tangente* y el *problema del área*. En esta unidad y en unidades posteriores veremos que la solución de ambos problemas implica el concepto de límite.

## Competencia específica

Comprender el concepto de límite de funciones y aplicarlo para determinar de manera analítica la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, y mostrar gráficamente los diferentes tipos de discontinuidad.

# 3.1 Límites: un enfoque informal

**Introducción** Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*, se basan en el concepto fundamental de *límite*. En esta sección, el enfoque que haremos a este importante concepto será intuitivo, centrado en la comprensión de *qué* es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. En la siguiente sección nuestro enfoque será analítico; es decir, usaremos métodos algebraicos para *calcular* el valor del límite de una función.

**Límite de una función: enfoque informal** Considere la función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} \tag{1}$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $-4$. Aunque no es posible evaluar $f$ *en* $-4$ porque al sustituir $-4$ por $x$ se obtiene la cantidad indefinida $0/0$, $f(x)$ puede calcularse en cualquier número $x$ que esté muy *próximo* a $-4$. Las dos tablas

| $x$ | $-4.1$ | $-4.01$ | $-4.001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8.1 | 8.01 | 8.001 |

| $x$ | $-3.9$ | $-3.99$ | $-3.999$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7.9 | 7.99 | 7.999 |

(2)

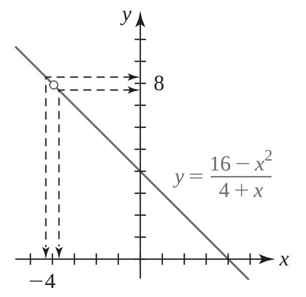



FIGURA 3.1.1 Cuando $x$ está próxima a $-4$, $f(x)$ está cerca de 8

muestran que cuando $x$ tiende a $-4$ por la izquierda o por la derecha, parece que los valores de la función $f(x)$ tienden a 8; en otras palabras, cuando $x$ está próxima a $-4$, $f(x)$ está cerca de 8. Para interpretar de manera gráfica la información numérica en (1), observe que para todo número $x \neq -4$, la función $f$ puede simplificarse por cancelación:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x.$$

Como se ve en la FIGURA 3.1.1, la gráfica de $f$ es esencialmente la gráfica de $y = 4 - x$ con la excepción de que la gráfica de $f$ tiene un *hueco* en el punto que corresponde a $x = -4$. Para $x$ suficientemente cerca de $-4$, representado por las dos puntas de flecha sobre el eje $x$, las dos puntas de flecha sobre el eje $y$, que representan los valores de la función $f(x)$, simultáneamente se aproximan cada vez más al número 8. En efecto, en vista de los resultados numéricos en (2), las puntas de flecha pueden hacerse *tan próximas como se quiera* al número 8. Se dice que 8 es el **límite** de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $-4$.

**Definición informal** Suponga que $L$ denota un número finito. El concepto de $f(x)$ que tiende a $L$ a medida que $x$ tiende a un número $a$ puede definirse informalmente de la siguiente manera.

- Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número $L$ al tomar $x$ suficientemente cerca de, pero diferente de un número $a$, por la izquierda y por la derecha de $a$, entonces el **límite** de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ es $L$.

**Notación** El análisis del concepto de límite se facilita al usar una notación especial. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la palabra *tiende*, entonces el simbolismo

$x \rightarrow a^-$ indica que $x$ tiende al número $a$ por la ***izquierda***,

es decir, a través de los números que son menores que $a$, y

$x \rightarrow a^+$ significa que $x$ tiende a $a$ por la ***derecha***,

es decir, a través de los números que son mayores que $a$. Finalmente, la notación

$x \rightarrow a$ significa que $x$ tiende a $a$ desde ***ambos lados***,

en otras palabras, por la izquierda y por la derecha de $a$ sobre una recta numérica. En la tabla izquierda en (2) se hace $x \rightarrow -4^-$ (por ejemplo, $-4.001$ está a la izquierda de $-4$ sobre la recta numérica), mientras en la tabla derecha $x \rightarrow -4^+$.

**Límites laterales** En general, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número $L_1$ al tomar $x$ suficientemente cerca, pero sin que sea igual, a un número $a$ por la *izquierda*; entonces se escribe

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ cuando } x \rightarrow a^- \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L_1. \tag{3}$$

Se dice que el número $L_1$ es el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$**. De manera semejante, si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número $L_2$ al tomar $x$ suficientemente cerca a, pero diferente de, un número $a$ por la *derecha*, entonces $L_2$ es el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$** y se escribe

$$f(x) \to L_2 \text{ cuando } x \to a^+ \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2. \tag{4}$$

Las cantidades en (3) y (4) también se denominan **límites laterales**.

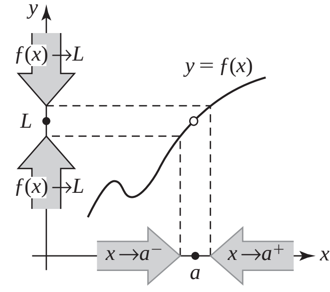


FIGURA 3.1.2 $f(x) \to L$ cuando $x \to a$ si y sólo si $f(x) \to L$ cuando $x \to a^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to a^+$

**Límites por dos lados** Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x\to a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y tienen un valor común $L$,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

entonces se dice que $L$ es el **límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$** y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{5}$$

Se dice que un límite como (5) es **por los dos lados**. Vea la FIGURA 3.1.2. Puesto que las tablas numéricas en (2) sugieren que

$$f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4^- \quad y \quad f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4^+, \tag{6}$$

es posible sustituir las dos declaraciones simbólicas en (6) por la declaración

$$f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4 \quad \text{o, en forma equivalente,} \quad \lim_{x\to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8. \tag{7}$$

**Existencia o no existencia** Por supuesto, un límite (por un lado o por dos lados) no tiene por qué existir. Pero es importante no olvidar lo siguiente:

- La existencia de un límite de una función $f$ cuando $x$ tiende a $a$ (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si $f$ está definida en $a$, sino sólo de si está definida para $x$ cerca del número $a$.

Por ejemplo, si la función en (1) se modifica de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16 - x^2}{4 + x}, & x \neq -4 \\ 5, & x = -4, \end{cases}$$

entonces $f(-4)$ está definida y $f(-4) = 5$, pero $\lim_{x\to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8$. Vea la FIGURA 3.1.3. En general, el límite por los dos lados $\lim_{x\to a} f(x)$ **no existe**

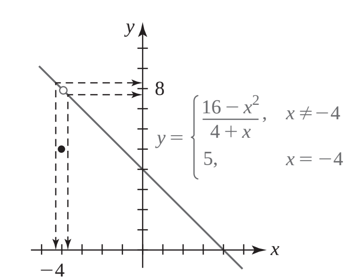


FIGURA 3.1.3 El hecho de que $f$ esté definida o no en $a$ es irrelevante con respecto a la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to a$

- si alguno de los dos límites laterales, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe, o
- si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$, pero $L_1 \neq L_2$.

**EJEMPLO 1** Un límite que existe

La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ se muestra en la FIGURA 3.1.4. Como se observa en la gráfica y en las tablas acompañantes, parece válido que

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -6$$

y, en consecuencia, $\lim_{x\to 4} f(x) = -6$.

| $x \to 4^-$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −5.41000 | −5.94010 | −5.99400 |

| $x \to 4^+$ | 4.1 | 4.01 | 4.001 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −6.61000 | −6.06010 | −6.00600 |

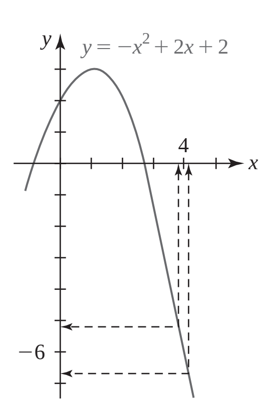
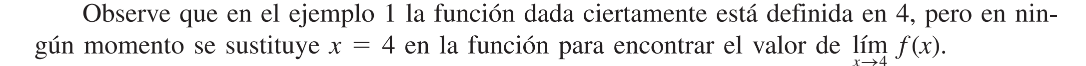


FIGURA 3.1.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1



Observe que en el ejemplo 1 la función dada ciertamente está definida en 4, pero en ningún momento se sustituye $x = 4$ en la función para encontrar el valor de $\lim_{x\to 4} f(x)$.

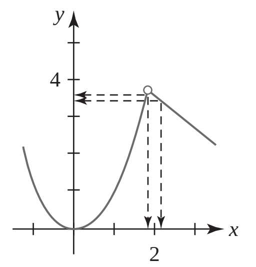


FIGURA 3.1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

**EJEMPLO 2** Un límite que existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 3.1.5. Observe que $f(2)$ no está definido, aunque esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera $\lim_{x \to 2} f(x)$. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes,

| $x \to 2^-$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.61000 | 3.96010 | 3.99600 |

| $x \to 2^+$ | 2.1 | 2.01 | 2.001 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.90000 | 3.99000 | 3.99900 |

observamos que cuando $x$ se hace próxima a 2, $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a 4, y así

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$

Es decir, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. ■

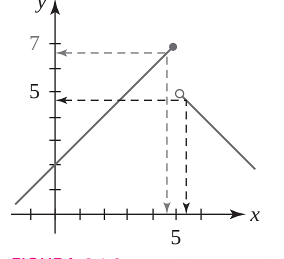


FIGURA 3.1.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

**EJEMPLO 3** Un límite que no existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le 5 \\ -x + 10, & x > 5 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 3.1.6. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes, parece que cuando $x$ se hace próxima a 5 a través de números menores que 5, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 7$. Luego, cuando $x$ tiende a 5 a través de números mayores que 5 parece que $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 5$. Pero puesto que

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) \ne \lim_{x \to 5^+} f(x),$$

se concluye que $\lim_{x \to 5} f(x)$ no existe.

| $x \to 5^-$ | 4.9 | 4.99 | 4.999 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.90000 | 6.99000 | 6.99900 |

| $x \to 5^+$ | 5.1 | 5.01 | 5.001 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4.90000 | 4.99000 | 4.99900 |

■

**EJEMPLO 4** Un límite que no existe

La función entero mayor se analizó en la sección 1.1.

Recuerde que la **función entero mayor** o **parte entera** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se define como el mayor entero que es menor o igual que $x$. El dominio de $f$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. A partir de la gráfica en la FIGURA 3.1.7 vemos que $f(n)$ está definida para todo entero $n$; a pesar de ello, para cada entero $n$, $\lim_{x \to n} f(x)$ no existe. Por ejemplo, cuando $x$ tiende, por ejemplo, al número 3, los dos límites laterales existen pero sus valores son diferentes:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3. \tag{8}$$

En general, para un entero $n$,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to n^+} f(x) = n.$$ ■

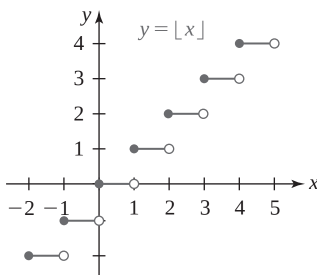


FIGURA 3.1.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

**EJEMPLO 5** Un límite por la derecha

A partir de la FIGURA 3.1.8 debe resultar evidente que $f(x) = \sqrt{x} \to 0$ cuando $x \to 0^+$, es decir,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Sería incorrecto escribir $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ puesto que esta notación implica la connotación de que los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales a 0. En este caso $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$. ■

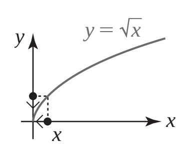


FIGURA 3.1.8 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ nunca existe porque los valores de la función $f(x)$ deben volverse sin límite desde por lo menos un lado de la recta $x = a$.

## EJEMPLO 6 Un límite que no existe

Una asíntota vertical siempre corresponde a una ruptura infinita en la gráfica de la función $f$. En la FIGURA 3.1.9 observamos que el eje $y$ o $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x$. Las tablas

| $x \to 0^-$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10$ | $-100$ | $-1\,000$ |

| $x \to 0^+$ | $0.1$ | $0.01$ | $0.001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $10$ | $100$ | $1\,000$ |

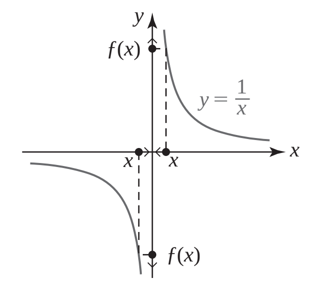



FIGURA 3.1.9 Gráfica de la función en el ejemplo 6

muestran claramente que los valores de la función $f(x)$ se vuelven sin límite en valor absoluto cuando se tiende a 0. En otras palabras, $f(x)$ no tiende a un número real cuando $x \to 0^-$ ni cuando $x \to 0^+$. En consecuencia, ni el límite por la izquierda ni el límite por la derecha existen cuando $x$ tiende a 0. Por tanto, es posible concluir que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. ■

## EJEMPLO 7 Un límite trigonométrico importante

Para calcular las funciones trigonométricas sen $x$, cos $x$, tan $x$, etc., es importante darse cuenta de que la variable $x$ es un número real o un ángulo medido en radianes. Con eso en mente, considere los valores numéricos de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ cuando $x \to 0^+$ dados en la tabla siguiente.

| $x \to 0^+$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.99833416 | 0.99998333 | 0.99999983 | 0.99999999 |

Resulta fácil ver que se cumplen los mismos resultados proporcionados en la tabla cuando $x \to 0^-$. Debido a que sen $x$ es una función impar, para $x > 0$ y $-x < 0$, se tiene $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ y en consecuencia,

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x} = f(x).$$

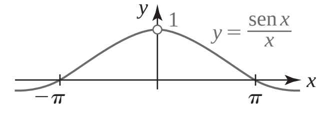



FIGURA 3.1.10 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Como puede verse en la FIGURA 3.1.10, $f$ es una función par. La tabla de valores numéricos, así como la gráfica de $f$ sugieren fuertemente el siguiente resultado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1. \tag{9}$$ ■

El límite en (9) es un resultado muy importante que se usará en la sección 4.4. Otro límite trigonométrico que se le pedirá comprobar como ejercicio está dado por

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \tag{10}$$

Vea el problema 43 en la sección "Desarrolle su competencia 3.1". Debido a su importancia, tanto (9) como (10) se demostrarán en la sección 3.4.

**Una forma indeterminada** Se dice que el límite de un cociente $f(x)/g(x)$, donde tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to a$, tiene una **forma indeterminada 0/0**. El límite (7) en el análisis inicial tenía esta forma indeterminada. Muchos límites importantes, como (9) y (10), y el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

que constituye la columna vertebral del cálculo diferencial, también tienen la forma indeterminada 0/0.

**EJEMPLO 8** Una forma indeterminada

El límite $\lim_{x\to 0} |x|/x$ tiene la forma indeterminada $0/0$, pero, a diferencia de (7), (9) y (10), este límite no existe. Para ver por qué, analizaremos la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. Para $x \neq 0$, $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ y así reconocemos a $f$ como la función definida por partes

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

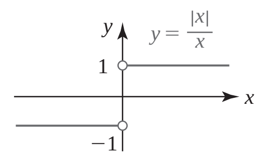



FIGURA 3.1.11 Gráfica de la función en el ejemplo 8

A partir de (11) y de la gráfica de $f$ de la FIGURA 3.1.11 debe resultar evidente que los dos límites de $f$, izquierdo y derecho, existen y

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Debido a que estos límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. ■

$\lim_{x\to a}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Aunque las gráficas y tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, usted ciertamente está enterado de que todas las calculadoras y computadoras funcionan sólo con aproximaciones, y que las gráficas pueden trazarse de manera inexacta. Un uso ciego de las calculadoras también puede conducir a una conclusión falsa. Por ejemplo, se sabe que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$ no existe, pero a partir de los valores tabulares

| $x \to 0$ | $\pm 0.1$ | $\pm 0.01$ | $\pm 0.001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0 | 0 |

podría concluirse en forma natural que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$. Por otra parte, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \qquad (12)$$

existe y es igual a $\frac{1}{4}$. Vea el ejemplo 11 en la sección 3.2. Con calculadora se obtiene

| $x \to 0$ | $\pm 0.00001$ | $\pm 0.000001$ | $\pm 0.0000001$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.200000 | 0.000000 | 0.000000 |

El problema al calcular (12) para toda $x$ próxima a 0 es que en forma correspondiente, $\sqrt{x^2+4}$ está muy próximo a 2. Cuando se restan dos números casi iguales en una calculadora, es posible que ocurra una pérdida de cifras significativas debido al error por redondeo.

## 3.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to 2}(3x+2)$
2. $\lim_{x\to 2}(x^2-1)$
3. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$
7. $\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-x}{x}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}$
10. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$
11. $\lim_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ -x+3, & x \geq 0 \end{cases}$
12. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$
13. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2-6x+8, & x > 2 \end{cases}$

**14.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

***a)*** $f(1)$ ***b)*** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ***c)*** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ***d)*** $\lim_{x\to 1} f(x)$

**15.**

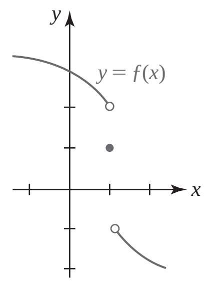



FIGURA 3.1.12 Gráfica para el problema 15

**16.**

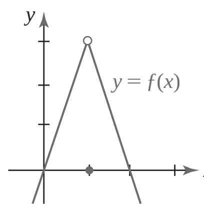



FIGURA 3.1.13 Gráfica para el problema 16

**17.**

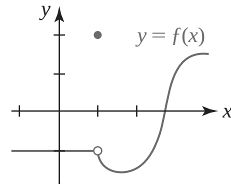



FIGURA 3.1.14 Gráfica para el problema 17

**18.**

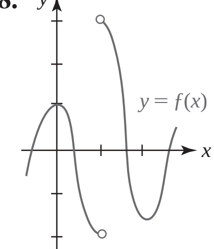



FIGURA 3.1.15 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-28, cada límite tiene el valor 0, pero alguna notación es incorrecta. Si la notación es incorrecta, escriba la declaración correcta.

**19.** $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

**20.** $\lim_{x\to 0} \sqrt[4]{x} = 0$

**21.** $\lim_{x\to 1} \sqrt{1 - x} = 0$

**22.** $\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x + 2} = 0$

**23.** $\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = 0$

**24.** $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = 0$

**25.** $\lim_{x\to \pi} \operatorname{sen} x = 0$

**26.** $\lim_{x\to 1} \cos^{-1} x = 0$

**27.** $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

**28.** $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$

En los problemas 29 y 30, use la gráfica dada para encontrar cada límite, o concluya que no existe.

**29.** ***a)*** $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to -2} f(x)$

***c)*** $\lim_{x\to 0} f(x)$ ***d)*** $\lim_{x\to 1} f(x)$

***e)*** $\lim_{x\to 3} f(x)$ ***f)*** $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

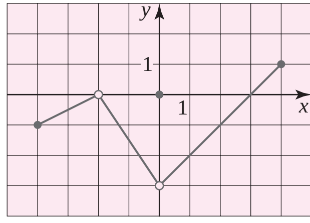



FIGURA 3.1.16 Gráfica para el problema 29

**30.** ***a)*** $\lim_{x\to -5} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

***c)*** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ ***d)*** $\lim_{x\to -3} f(x)$

***e)*** $\lim_{x\to 0} f(x)$ ***f)*** $\lim_{x\to 1} f(x)$

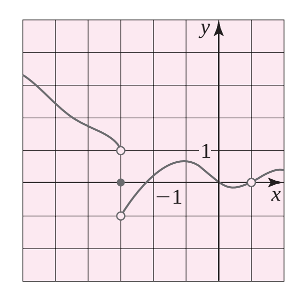



FIGURA 3.1.17 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, trace una gráfica de la función *f* con las propiedades dadas.

**31.** $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, \lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

**32.** $f(-2) = 3, \lim_{x\to 0} f(x) = 2, \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1, f(1) = -2$

**33.** $f(0) = 1, \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3, \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, $f(1)$ está indefinido, $f(3) = 0$

**34.** $f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \le x \le 1, \lim_{x\to -1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, $f(2) = 3$

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 35-40, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada *f* sobre el intervalo $[-0.5, 0.5]$. Use la gráfica para conjeturar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$, o concluya que el límite no existe.

**35.** $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$

**36.** $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$

**37.** $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 + x}}{x}$

**38.** $f(x) = \dfrac{9}{x}\left[\sqrt{9 - x} - \sqrt{9 + x}\right]$

**39.** $f(x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$

**40.** $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

En los problemas 41-50, proceda como en los ejemplos 3, 6 y 7 y use una calculadora para construir tablas de valores funcionales. Conjeture el valor de cada límite o concluya que no existe.

**41.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{2x - 1}}{x - 1}$

**42.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

**43.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

**44.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

**45.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

**46.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

**47.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

**48.** $\lim_{x\to 3}\left[\dfrac{6}{x^2 - 9} - \dfrac{6\sqrt{x - 2}}{x^2 - 9}\right]$

**49.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x - 1}$

**50.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

# 3.2 Teoremas sobre límites

**Introducción** La intención del análisis informal en la sección 3.1 fue proporcionarle una comprensión intuitiva de cuándo un límite existe o no. Sin embargo, no es aconsejable ni práctico, en ninguna instancia, llegar a una conclusión respecto a la existencia de un límite con base en una gráfica o tabla de valores numéricos. Debe ser posible evaluar un límite, o concluir su no existencia, de alguna forma analítica. Los teoremas que se considerarán en esta sección establecen tales mecanismos.

El primer teorema proporciona dos resultados básicos que se usarán en todo el análisis de esta sección.

**Teorema 3.2.1** Dos límites fundamentales

*i*) $\lim_{x \to a} c = c$, donde $c$ es una constante.

*ii*) $\lim_{x \to a} x = a$

Aunque ambas partes del teorema 3.2.1 requieren una demostración formal, el teorema 3.2.1*ii*) es casi tautológico cuando se plantea verbalmente:

- El límite de $x$ cuando $x$ tiende a $a$ es $a$.

**EJEMPLO 1** Uso del teorema 3.2.1

***a***) A partir del teorema 3.2.1*i*),

$$\lim_{x \to 2} 10 = 10 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 6} \pi = \pi.$$

***b***) A partir del teorema 3.2.1*ii*),

$$\lim_{x \to 2} x = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} x = 0.$$

■

El límite de una constante por una función $f$ es la constante por el límite de $f$ cuando $x$ tiende a un número $a$.

**Teorema 3.2.2** Límite de una función multiplicada por una constante

Si $c$ es una constante, entonces

$$\lim_{x \to a} c f(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

Ahora es posible empezar a usar los teoremas combinados.

**EJEMPLO 2** Uso de los teoremas 3.2.1 y 3.2.2

A partir de los teoremas 3.2.1*ii*) y 3.2.2,

***a***) $\lim_{x \to 8} 5x = 5 \lim_{x \to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

***b***) $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \to -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3.$ ■

El siguiente teorema es particularmente importante porque constituye un medio para calcular límites de manera algebraica.

**Teorema 3.2.3** Límites de una suma, un producto y un cociente

Suponga que $a$ es un número real y que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces

*i*) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$,

*ii*) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L_1L_2$, y

*iii*) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

El teorema 3.2.3 puede plantearse coloquialmente como

- Si ambos límites existen, entonces
  *i*) el límite de una suma es la suma de los límites,
  *ii*) el límite de un producto es el producto de los límites y
  *iii*) el límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.

**Nota:** Si todos los límites existen, entonces el teorema 3.2.3 también es válido para límites laterales; es decir, la notación $x \to a$ en el teorema 3.2.3 puede sustituirse por $x \to a^-$ o por $x \to a^+$. Además, el teorema 3.2.3 puede extenderse a diferencias, sumas, productos y cocientes que implican más de dos funciones.

**EJEMPLO 3** Uso del teorema 3.2.3

Evalúe $\lim_{x\to 5}(10x + 7)$.

**Solución** Por los teoremas 3.2.1 y 3.2.2, sabemos que $\lim_{x\to 5} 7$ y $\lim_{x\to 5} 10x$ existen. Por tanto, a partir del teorema 3.2.3*i*),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(10x + 7) &= \lim_{x\to 5} 10x + \lim_{x\to 5} 7\\ &= 10\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 7\\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57.\end{aligned}$$

**Límite de una potencia** El teorema 3.2.3*ii*) puede usarse para calcular el límite de una potencia entera positiva de una función. Por ejemplo, si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces por el teorema 3.2.3*ii*) con $g(x) = f(x)$,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^2 = \lim_{x\to a}[f(x)\cdot f(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = L^2.$$

Por el mismo razonamiento es posible aplicar el teorema 3.2.3*ii*) al caso general en que $f(x)$ es un factor $n$ veces. Este resultado se plantea en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.4** Límites de una potencia

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $n$ un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n.$$

Para el caso especial $f(x) = x^n$, el resultado proporcionado en el teorema 3.2.4 produce

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \qquad (1)$$

**EJEMPLO 4** Uso de (1) y el teorema 3.2.3

Evalúe

***a***) $\lim_{x\to 10} x^3$ ***b***) $\lim_{x\to 4} \frac{5}{x^2}$.

**Solución**

***a***) Por (1),

$$\lim_{x\to 10} x^3 = 10^3 = 1\,000.$$

***b***) Por el teorema 3.2.1 y (1) sabemos que $\lim_{x\to 4} 5 = 5$ y $\lim_{x\to 4} x^2 = 16 \neq 0$. En consecuencia, por el teorema 3.2.3*iii*),

$$\lim_{x\to 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 4} 5}{\lim_{x\to 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}.$$ ■

**EJEMPLO 5** Uso del teorema 3.2.3

Evalúe $\lim_{x\to 3} (x^2 - 5x + 6)$.

**Solución** Debido a los teoremas 3.2.1, 3.2.2 y (1), todos los límites existen. En consecuencia, por el teorema 3.2.3*i*),

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 6) = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 5x + \lim_{x\to 3} 6 = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0.$$ ■

**EJEMPLO 6** Uso de los teoremas 3.2.3 y 3.2.4

Evalúe $\lim_{x\to 1} (3x - 1)^{10}$.

**Solución** Primero, por el teorema 3.2.3*i*) se observa que

$$\lim_{x\to 1} (3x - 1) = \lim_{x\to 1} 3x - \lim_{x\to 1} 1 = 2.$$

Luego, por el teorema 3.2.4 se concluye que

$$\lim_{x\to 1} (3x - 1)^{10} = \left[\lim_{x\to 1} (3x - 1)\right]^{10} = 2^{10} = 1\,024.$$ ■

**Límite de funciones polinomiales** Algunos límites pueden evaluarse por *sustitución directa*. Para calcular el límite de una función polinomial general pueden usarse (1) y el teorema 3.2.3*i*). Si

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right)\\ &= \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to a} c_1 x + \lim_{x\to a} c_0\\ &= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0.\end{aligned}$$

← $f$ está definida en $x = a$ y este límite es $f(a)$

En otras palabras, para evaluar el límite de una función polinomial $f$ cuando $x$ tiende a un número real $a$, *sólo es necesario evaluar la función en* $x = a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

Al revisar el ejemplo 5 observamos que $\lim_{x\to 3} f(x)$, donde $f(x) = x^2 - 5x + 6$ está dada por $f(3) = 0$.

Debido a que una función racional $f$ es el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, por (2) y por el teorema 3.2.3*iii*) se concluye que el límite de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ también puede encontrarse al evaluar $f$ en $x = a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}. \tag{3}$$

Por supuesto, es necesario agregar a (3) el siempre importante requisito de que el límite del denominador no sea cero; es decir, $q(a) \neq 0$.

**EJEMPLO 7** Uso de (2) y (3)

Evalúe $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x-4}{8x^2+2x-2}$.

**Solución** $f(x) = \dfrac{3x-4}{8x^2+2x-2}$ es una función racional, de modo que si se identifican los polinomios $p(x) = 3x - 4$ y $q(x) = 8x^2 + 2x - 2$, entonces por (2)

$$\lim_{x\to -1} p(x) = p(-1) = -7 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1} q(x) = q(-1) = 4.$$

Puesto que $q(-1) \neq 0$, por (3) se concluye que

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-4}{8x^2+2x-2} = \frac{p(-1)}{q(-1)} = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Usted no debe quedarse con la impresión de que *siempre* es posible encontrar el límite de una función al sustituir el número *a directamente en la función*.

**EJEMPLO 8** Uso del teorema 3.2.3

Evalúe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

**Solución** En este límite la función es racional, pero si en la función sustituimos $x = 1$, se observa que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. No obstante, si *primero* se simplifica, después puede aplicarse el teorema 3.2.3*iii*):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} \quad \leftarrow \text{cancelar es válido en el supuesto que } x \neq 1 \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x+2)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Si un límite de una función racional tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \to a$, entonces por el teorema del factor del álgebra $x - a$ debe ser un factor tanto del numerador como del denominador. Estas cantidades se factorizan y se cancela el factor $x - a$.

Algunas veces es posible afirmar a primera vista *cuándo no existe un límite*.

**Teorema 3.2.5** Un límite que no existe

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

**DEMOSTRACIÓN** Se proporcionará una demostración indirecta de este resultado, basada en el teorema 3.2.3. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, y también que $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x))$ existe y que es igual a $L_2$. Entonces

$$\begin{aligned} L_1 = \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}\right), \qquad g(x) \neq 0, \\ &= \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0 \cdot L_2 = 0. \end{aligned}$$

El teorema se ha demostrado por contradicción de la hipótesis $L_1 \neq 0$.

**EJEMPLO 9** Uso de los teoremas 3.2.3 y 3.2.5

Evalúe

***a)*** $\lim_{x \to 5} \frac{x}{x-5}$ ***b)*** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5}$ ***c)*** $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25}$.

**Solución** Cada función en los tres incisos del ejemplo es racional.

***a)*** Puesto que el límite del denominador $x$ es 5, pero el límite del denominador $x - 5$ es 0, concluimos del teorema 3.2.5 que el límite no existe.

***b)*** Al sustituir $x = 5$, tanto el denominador como el numerador se hacen iguales a 0, de modo que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Por el teorema del factor del álgebra, $x - 5$ es un factor tanto del numerador como del denominador. Así,

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+1)} \quad \leftarrow \text{se cancela el factor } x - 5$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x+1}$$

$$= \frac{0}{6} = 0. \quad \leftarrow \text{el límite existe}$$

***c)*** De nuevo, el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Después de factorizar el denominador y cancelar los factores, por la manipulación algebraica

$$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{(x-5)^2}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5}$$

se ve que el límite no existe puesto que el límite del numerador en la última expresión ahora es 1, pero el límite del denominador es 0. ■

**Límite de una raíz** El límite de la raíz $n$-ésima de una función es la raíz $n$-ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz $n$-ésima real. El siguiente teorema resume este hecho.

**Teorema 3.2.6** Límite de una raíz

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $n$ un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

en el supuesto que $L \geq 0$ cuando $n$ es par.

Un caso especial inmediato del teorema 3.2.6 es

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \tag{4}$$

en el supuesto que $a \geq 0$ cuando $n$ es par. Por ejemplo, $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = \left[\lim_{x \to 9} x\right]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$.

**EJEMPLO 10** Uso de (4) y del teorema 3.2.3

Evalúe $\lim_{x \to -2} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10}$.

**Solución** Puesto que $\lim_{x \to -8} (2x + 10) = -6 \neq 0$, por el teorema 3.2.3*iii*) y (4) observamos que

$$\lim_{x \to -8} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10} = \frac{\lim_{x \to -8} x - \left[\lim_{x \to -8} x\right]^{1/3}}{\lim_{x \to -8} (2x + 10)} = \frac{-8 - (-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1.$$ ■

Cuando el límite de una función algebraica que implica radicales tiene la forma indeterminada $0/0$, algo que puede intentarse es racionalizar el numerador o el denominador.

**EJEMPLO 11** Racionalización de un numerador

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$.

> En la sección "Notas desde el aula", al final de la sección 3.1, vimos este límite en la ecuación (12).

**Solución** Puesto que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+4)} = 2$ por inspección vemos que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$. Sin embargo, al racionalizar el numerador obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)-4}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } x\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}. \quad \leftarrow \text{el límite ya no es } 0/0\end{aligned}$$

Ahora ya es posible que apliquemos los teoremas 3.2.3 y 3.2.6:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+4)}+\lim_{x\to 0} 2}\\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

En caso de que alguien se pregunte si puede haber más de un límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, para que quede registro se plantea el último teorema.

**Teorema 3.2.7** Existencia implica unicidad

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único.

## $\lim_{x\to a}$ NOTAS DESDE EL AULA

En matemáticas es tan importante saber lo que un teorema o una definición *no* dice, así como saber lo que dice.

*i*) La propiedad *i*) del teorema 3.2.3 no dice que el límite de una suma *siempre* es la suma de los límites. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0}(1/x)$ no existe, de modo que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right] \neq \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

A pesar de ello, puesto que $1/x - 1/x = 0$ para $x \neq 0$, el límite de la diferencia existe.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

*ii*) En forma semejante, el límite de un producto puede existir y no obstante no ser igual al producto de los límites. Por ejemplo, $x/x = 1$, para $x \neq 0$, y así

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

pero

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) \neq \left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\right)$$

puesto que $\lim_{x\to 0}(1/x)$ no existe.

*iii*) El teorema 3.2.5 no afirma que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero. El ejemplo 8 es un contraejemplo de esa interpretación. No obstante, el teorema 3.2.5 establece que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero *y* el límite del numerador no es cero.

## 3.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-52, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

**1.** $\lim\limits_{x\to -4} 15$

**2.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos \pi$

**3.** $\lim\limits_{x\to 3} (-4)x$

**4.** $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 9)$

**5.** $\lim\limits_{x\to -2} x^2$

**6.** $\lim\limits_{x\to 5} (-x^3)$

**7.** $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 1)$

**8.** $\lim\limits_{x\to 6} (-5x^2 + 6x + 8)$

**9.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x + 4}{x - 7}$

**10.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 5}{3x}$

**11.** $\lim\limits_{t\to 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$

**12.** $\lim\limits_{t\to -2} (t + 4)^2$

**13.** $\lim\limits_{s\to 7} \dfrac{s^2 - 21}{s + 2}$

**14.** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$

**15.** $\lim\limits_{x\to -1} (x + x^2 + x^3)^{135}$

**16.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(3x - 4)^{40}}{(x^2 - 2)^{36}}$

**17.** $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{2x - 5}$

**18.** $\lim\limits_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})$

**19.** $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t}}{t^2 + t - 2}$

**20.** $\lim\limits_{x\to 2} x^2\sqrt{x^2 + 5x + 2}$

**21.** $\lim\limits_{y\to -5} \dfrac{y^2 - 25}{y + 5}$

**22.** $\lim\limits_{u\to 8} \dfrac{u^2 - 5u - 24}{u - 8}$

**23.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

**24.** $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$

**25.** $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 8)}$

**26.** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x + 6}{4x^2 - 36}$

**27.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x - 2}$

**28.** $\lim\limits_{x\to 1.5} \dfrac{2x^2 + 3x - 9}{x - 1.5}$

**29.** $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3 - 2t + 1}{t^3 + t^2 - 2}$

**30.** $\lim\limits_{x\to 0} x^3(x^4 + 2x^3)^{-1}$

**31.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x + 2)(x^5 - 1)^3}{(\sqrt{x} + 4)^2}$

**32.** $\lim\limits_{x\to -2} x\sqrt{x + 4}\,\sqrt[3]{x - 6}$

**33.** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x} + \dfrac{1}{x}\right]$

**34.** $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 + 2x - 8}\right]$

**35.** $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x + 3)^2}{\sqrt{x - 3}}$

**36.** $\lim\limits_{x\to 3} (x - 4)^{99}(x^2 - 7)^{10}$

**37.** $\lim\limits_{x\to 10} \sqrt{\dfrac{10x}{2x + 5}}$

**38.** $\lim\limits_{r\to 1} \dfrac{\sqrt{(r^2 + 3r - 2)^3}}{\sqrt[3]{(5r - 3)^2}}$

**39.** $\lim\limits_{h\to 4} \sqrt{\dfrac{h}{h + 5}\left(\dfrac{h^2 - 16}{h - 4}\right)^2}$

**40.** $\lim\limits_{t\to 2} (t + 2)^{3/2}(2t + 4)^{1/3}$

**41.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[5]{\dfrac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$

**42.** $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(8x + \dfrac{2}{x}\right)^5$

**43.** $\lim\limits_{t\to 1} (at^2 - bt)^2$

**44.** $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{u^2x^2 + 2xu + 1}$

**45.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(8 + h)^2 - 64}{h}$

**46.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[(1 + h)^3 - 1]$

**47.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}\right)$

**48.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \quad (x > 0)$

**49.** $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$

**50.** $\lim\limits_{u\to 5} \dfrac{\sqrt{u + 4} - 3}{u - 5}$

**51.** $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{25 + v} - 5}{\sqrt{1 + v} - 1}$

**52.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

En los problemas 53-60, suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$. Encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

**53.** $\lim\limits_{x\to a} [5f(x) + 6g(x)]$

**54.** $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^3$

**55.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$

**56.** $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

**57.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{f(x) - 2g(x)}$

**58.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$

**59.** $\lim\limits_{x\to a} xf(x)g(x)$

**60.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{6x + 3}{xf(x) + g(x)},\ a \neq -\frac{1}{2}$

### ≡ Piense en ello

En los problemas 61 y 62, use el primer resultado para encontrar los límites en los incisos *a*)-*c*). Justifique cada paso de su trabajo citando la propiedad idónea de los límites.

**61.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$

***a*)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$ ***b*)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{50} - 1}{x - 1}$ ***c*)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$

**62.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

***a*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}$ ***b*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ ***c*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2 - \operatorname{sen} x}{x}$

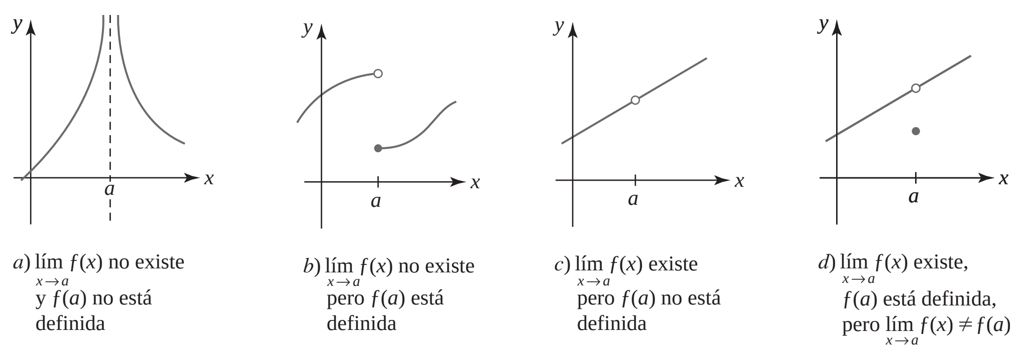
**63.** Use $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

**64.** Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$, encuentre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

# 3.3 Continuidad

**Introducción** En el análisis de la sección 2.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase "estos puntos se unen con una curva suave". Esta frase invoca la imagen que es una curva *continua* agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

En la sección 3.2 vimos que el valor funcional $f(a)$ no desempeñaba ningún papel en la determinación de la existencia de $\lim_{x \to a} f(x)$. Pero en la sección 3.2 observamos que los límites cuando $x \to a$ de funciones polinomiales y ciertas funciones racionales pueden encontrarse simplemente al evaluar la función en $x = a$. La razón por la que puede hacerse lo anterior en algunas instancias es el hecho de que la función es *continua* en un número $a$. En esta sección veremos que tanto el valor de $f(a)$ como el límite de $f$ cuando $x$ tiende a un número $a$ desempeñan papeles primordiales al definir el concepto de continuidad. Antes de proporcionar la definición, en la FIGURA 3.3.1 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que *no* son continuas en $a$.




*a*) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

*b*) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

*c*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

*d*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 3.3.1 Cuatro ejemplos de $f$ *no* continua en $a$

**Continuidad en un número** La figura 3.3.1 sugiere la siguiente condición tripartita de continuidad de una función $f$ en un número $a$.

**Definición 3.3.1** Continuidad en $a$

Se dice que una función $f$ es **continua** en un número $a$ si

*i*) $f(a)$ está definido, *ii*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y *iii*) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 3.3.1 no se cumple, entonces se dice que $f$ es **discontinua** en el número $a$.

**EJEMPLO 1** Tres funciones

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

***a***) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ ***b***) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ ***c***) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$.

**Solución**

***a***) $f$ es discontinua en 1 puesto que al sustituir $x = 1$ en la función se obtiene $0/0$. Se afirma que $f(1)$ no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 3.3.1.

***b***) Debido a que $g$ está definida en 1, es decir, $g(1) = 2$, a continuación se determina si $\lim_{x \to 1} g(x)$ existe. Por

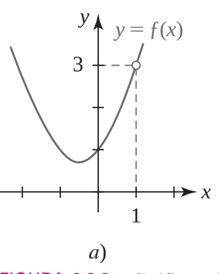
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3 \qquad (1)$$

◀ Recuerde de sus conocimientos de álgebra que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

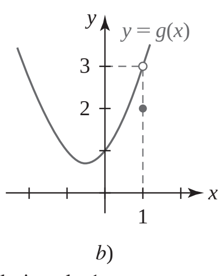
concluimos que $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe y es igual a 3. Puesto que este valor no es el mismo que $g(1) = 2$, se viola la segunda condición de la definición 3.3.1. La función $g$ es discontinua en 1.

***c***) Primero, $h(1)$ está definida; en este caso, $h(1) = 3$. Segundo, $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$ por (1) del inciso *b*). Tercero, se tiene $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 3$. Por tanto, se cumplen *las tres* condiciones en la definición 3.3.1 y así la función $h$ es continua en 1.

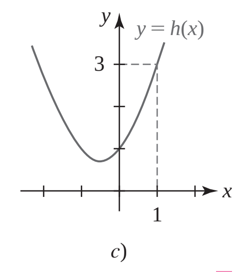
Las gráficas de las tres funciones se comparan en la FIGURA 3.3.2.




*a*)




*b*)




*c*)

FIGURA 3.3.2 Gráficas de las funciones en el ejemplo 1

## EJEMPLO 2 Función definida por partes

Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

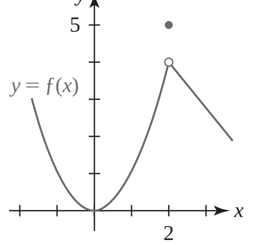



FIGURA 3.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 2

**Solución** Primero, observe que $f(2)$ está definida y es igual a 5. Luego, por

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (-x + 6) = 4 \end{aligned}\right\} \text{implica } \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

observamos que el límite de $f$ existe cuando $x \to 2$. Por último, debido a que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 5$, por *iii*) de la definición 3.3.1 se concluye que $f$ es discontinua en 2. La gráfica de $f$ se muestra en la FIGURA 3.3.3.

**Continuidad sobre un intervalo** A continuación veremos que el concepto de continuidad en un número $a$ se extiende a **continuidad sobre un intervalo**.

**Definición 3.3.2** Continuidad sobre un intervalo

Una función $f$ es continua

*i*) sobre un **intervalo abierto** $(a, b)$ si es continua en todo número en el intervalo; y
*ii*) sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en $(a, b)$ y, además,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Si se cumple la condición límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dada por *ii*) de la definición 3.3.1, se dice que ***f* es continua por la derecha en *a***; si $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, entonces ***f* es continua por la izquierda en *b***.

Extensiones de estos conceptos a intervalos como $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$ se hacen como se espera. Por ejemplo, $f$ es continua en $[1, 5)$ si es continua en el intervalo abierto $(1, 5)$ y es continua por la derecha en 1.

**EJEMPLO 3** Continuidad sobre un intervalo

***a***) Como observamos en la FIGURA 3.3.4*a*), $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$ pero no es continua sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$, ya que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidos.

***b***) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre $[-1, 1]$. Observe por la figura 3.3.4*b*) que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ y } \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

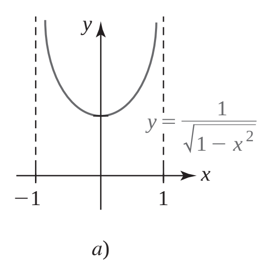
***c***) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ es continua sobre el intervalo no acotado $[1, \infty)$, ya que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to a}(x - 1)} = \sqrt{a - 1} = f(a),$$

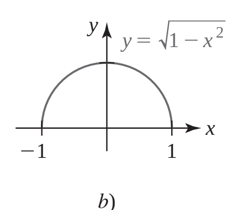
para cualquier número real $a$ que cumpla $a > 1$, y $f$ es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = f(1) = 0.$$

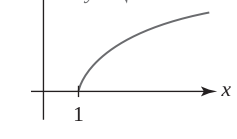
Vea la figura 3.3.4*c*). ■




*a*)




*b*)




*c*)

FIGURA 3.3.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

Una revisión de las gráficas en las figuras 2.4.1 y 2.4.2 muestra que $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. Las figuras 2.4.3 y 2.4.5 muestran que $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son discontinuas en $x = (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ mientras las figuras 2.4.4 y 2.4.6 muestran que $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son discontinuas en $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Las funciones trigonométricas inversas $y = \text{sen}^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Vea las figuras 2.5.9 y 2.5.12. La función exponencial natural $y = e^x$ es continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que la función logaritmo natural $y = \ln x$ es continua sobre $(0, \infty)$. Vea las figuras 2.6.5 y 2.6.6.

**Continuidad de una suma, producto y cociente** Cuando dos funciones $f$ y $g$ son continuas en un número $a$, entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en $a$. En el caso de la división $f/g$ es necesario, por supuesto, requerir que $g(a) \neq 0$.

**Teorema 3.3.1** Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en un número $a$, entonces la suma $f + g$, el producto $fg$ y el cociente $f/g$ $(g(a) \neq 0)$ son continuos en $x = a$.

**DEMOSTRACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO *fg*** Como una consecuencia de la hipótesis de que las funciones $f$ y $g$ son continuas en un número $a$, podemos decir que ambas funciones están definidas en $x = a$, los límites de las dos funciones existen cuando $x$ tiende a $a$ y

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Debido a que el límite existe, sabemos que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(a)g(a).$$

Las demostraciones de las partes restantes del teorema 3.3.1 se obtienen de manera semejante. ■

Puesto que la definición 3.3.1 implica que $f(x) = x$ es continua en cualquier número real $x$, a partir de aplicaciones sucesivas del teorema 3.3.1 se observa que las funciones $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ también son continuas para cualquier $x$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Debido a que una función polinomial es justo una suma de potencias de $x$, otra aplicación del teorema 3.3.1 muestra lo siguiente:

- Una función polinomial $f$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

Se dice que las funciones, como las polinomiales, el seno y el coseno, que son continuas para *todos* los números reales, es decir, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, son **continuas en todas partes**. De una función que es continua en todas partes también se dice que es **continua**. Luego,

si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, por el teorema 3.3.1 también se concluye directamente que

- Una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua excepto en números en los que el denominador $q(x)$ es cero.

FIGURA 3.3.5 Discontinuidad tipo salto en $x = 0$

**Terminología** Una discontinuidad de una función $f$ a menudo se denomina de manera especial.

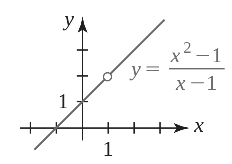
- Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que $f$ tiene una **discontinuidad infinita** en $a$.

La figura 3.3.1*a*) ilustra una función con una discontinuidad infinita en $a$.

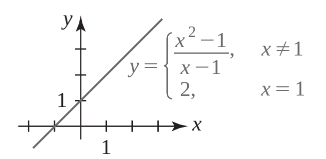
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces se dice que $f$ tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en $a$.

La función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 3.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ tiene una discontinuidad de tipo salto en todo valor entero de $x$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $f$ no está definida en $x = a$ o $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$, entonces se dice que $f$ tiene una **discontinuidad removible** en $a$.




*a*) No es continua en 1




*b*) Continua en 1

FIGURA 3.3.6 Discontinuidad removible en $x = 1$

Por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en $x = 1$ pero $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Al *definir* $f(1) = 2$, la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 3.3.6.

**Continuidad de $f^{-1}$** La validez del siguiente teorema se concluye del hecho de que la gráfica de la función inversa $f^{-1}$ es una reflexión de la gráfica de $f$ en la recta $y = x$.

**Teorema 3.3.2** Continuidad de una función inversa

Si $f$ es una función continua uno a uno sobre un intervalo $[a, b]$, entonces $f^{-1}$ es continua ya sea sobre $[f(a), f(b)]$ o sobre $[f(b), f(a)]$.

La función seno, $f(x) = \text{sen}\, x$, es continua sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, y como ya se observó, la inversa de $f$, $y = \text{sen}^{-1} x$, es continua sobre el intervalo cerrado $[f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$.

**Límite de una función compuesta** El siguiente teorema establece que si una función es continua, entonces el límite de esa función es la función del límite.

**Teorema 3.3.3** Límite de una función compuesta

Si $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $f$ es continua en $L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L).$$

El teorema 3.3.3 es útil en la demostración de otros teoremas. Si la función $g$ es continua en $a$ y $f$ es continua en $g(a)$, entonces vemos que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Acabamos de demostrar que la composición de dos funciones continuas es continua.

**Teorema 3.3.4** Continuidad de una función compuesta

Si $g$ es continua en un número $a$ y $f$ es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $a$.

**EJEMPLO 4** Continuidad de una función compuesta

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre el intervalo $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2 + 2$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$. Pero, puesto que $g(x) \geq 0$ para toda $x$, la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

es continua en todas partes. ■

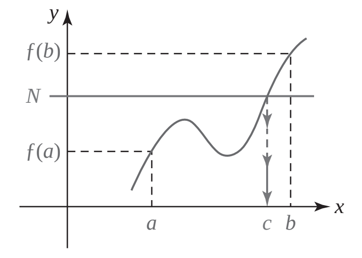


FIGURA 3.3.7 Una función continua $f$ asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Si una función $f$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, como se ilustra en la FIGURA 3.3.7, $f$ asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Dicho de otra manera, una función continua $f$ no omite ningún valor.

**Teorema 3.3.5** Teorema del valor intermedio

Si $f$ denota una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si $N$ es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número $c$ entre $a$ y $b$ tal que $f(c) = N$.

**EJEMPLO 5** Consecuencia de la continuidad

La función polinomial $f(x) = x^2 - x - 5$ es continua sobre el intervalo $[-1, 4]$ y $f(-1) = -3$, $f(4) = 7$. Para cualquier número $N$ para el cual $-3 \leq N \leq 7$, el teorema 3.3.5 garantiza que hay una solución para la ecuación $f(c) = N$, es decir, $c^2 - c - 5 = N$ en $[-1, 4]$. Específicamente, si se escoge $N = 1$, entonces $c^2 - c - 5 = 1$ es equivalente a

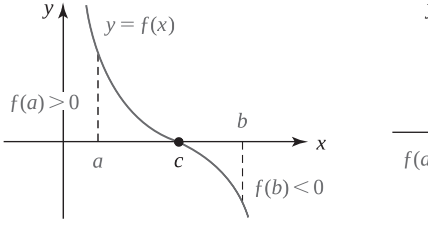
$$c^2 - c - 6 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, sólo el valor $c = 3$ está entre $-1$ y 4. ■

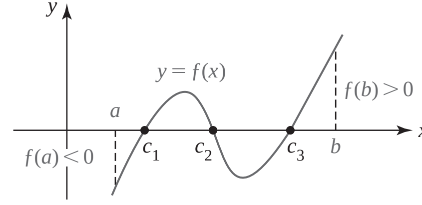
El ejemplo anterior sugiere un corolario al teorema del valor intermedio.

- Si $f$ satisface las hipótesis del teorema 3.3.5 y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe un número $x$ entre $a$ y $b$ para el que $f(x) = 0$.

Este hecho se usa a menudo para localizar ceros reales de una función continua $f$. Si los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay por lo menos un número $c$ en $(a, b)$ para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras, si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero $c$ en el intervalo $(a, b)$. La validez de esta conclusión se ilustra en la FIGURA 3.3.8.



*a*) Un cero $c$ en $(a, b)$



*b*) Tres ceros $c_1$, $c_2$, $c_3$ en $(a, b)$

FIGURA 3.3.8 Localización de ceros de funciones usando el teorema del valor intermedio

**Método de bisección** Como una consecuencia directa del teorema del valor intermedio, es posible concebir un medio para aproximar los ceros de una función continua hasta cualquier grado de precisión. Suponga que $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos. Luego, como acabamos de ver, $f$ tiene un cero en $[a, b]$. Suponga que el intervalo $[a, b]$ se biseca encontrando el punto medio $m_1 = (a + b)/2$. Si $f(m_1) = 0$, entonces $m_1$ es un cero de $f$ y ya no se continúa, pero si $f(m_1) \neq 0$, entonces puede afirmarse lo siguiente:

- Si $f(a)$ y $f(m_1)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces $f$ tiene un cero $c$ en $[a, m_1]$.
- Si $f(m_1)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces $f$ tiene un cero $c$ en $[m_1, b]$.

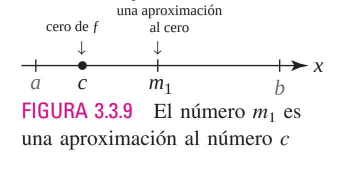


FIGURA 3.3.9 El número $m_1$ es una aproximación al número $c$

Es decir, si $f(m_1) \neq 0$, entonces $f$ tiene un cero en un intervalo que mide la mitad del intervalo original. Vea la FIGURA 3.3.9. A continuación se repite el proceso al bisecar este nuevo intervalo al encontrar su punto medio $m_2$. Si $m_2$ es un cero de $f$, entonces detenemos el proceso, pero si $f(m_2) \neq 0$, hemos localizado un cero en un intervalo que mide la cuarta parte del intervalo $[a, b]$. Continuamos este proceso de localizar un cero en $f$ de manera indefinida en intervalos cada vez más cortos. Este método de aproximar un cero de una función continua por medio de una sucesión de puntos medios se denomina **método de bisección**. Al volver a inspeccionar la figura 3.3.9 se observa que el error en una aproximación a un cero en un intervalo es menos de la mitad de la longitud del intervalo.

### EJEMPLO 6 Ceros de una función polinomial

***a***) Demuestre que los ceros de la función polinomial $f(x) = x^6 - 3x - 1$ tiene un cero real en $[-1, 0]$ y en $[1, 2]$.

***b***) Aproxime el cero en $[1, 2]$ hasta dos cifras decimales.

**Solución**

***a***) Observe que $f(-1) = 3 > 0$ y $f(0) = -1 < 0$. Este cambio de signo indica que la gráfica de $f$ debe cruzar el eje $x$ por lo menos una vez en el intervalo $[-1, 0]$. En otras palabras, hay por lo menos un cero en $[-1, 0]$.

De manera semejante, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 57 > 0$ implican que hay por lo menos un cero de $f$ en el intervalo $[1, 2]$.

***b***) Una primera aproximación al cero en $[1, 2]$ es el punto medio del intervalo:

$$m_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}(2-1) = 0.5.$$

Luego, puesto que $f(m_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ y $f(1) < 0$, se sabe que el cero está en el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

La segunda aproximación al cero es el punto medio de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$:

$$m_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1.25, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right) = 0.25.$$

Puesto que $f(m_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, el cero está en el intervalo $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

La tercera aproximación al cero es el punto medio de $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$:

$$m_3 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8} = 1.375, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right) = 0.125.$$

Después de ocho cálculos, encontramos que $m_8 = 1.300781$ con error menor que 0.005. Por tanto, 1.30 es una aproximación al cero de $f$ en $[1, 2]$ que es precisa hasta dos cifras decimales. La gráfica de $f$ se proporciona en la FIGURA 3.3.10. ■

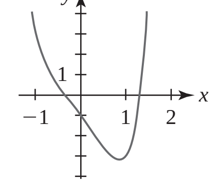


FIGURA 3.3.10 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Si se desea que la aproximación sea precisa hasta *tres* cifras decimales, continuamos hasta que el error se vuelva menor que 0.0005, y así sucesivamente.

## 3.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

### Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre los números, en caso de haberlos, en que la función $f$ dada es discontinua.

**1.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$

**2.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

**3.** $f(x) = (x^2 - 9x + 18)^{-1}$

**4.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

**5.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{\text{sen } 2x}$

**6.** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + 3}$

**7.** $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$

**8.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

**9.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \ne 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$

**10.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & x \ne 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

**11.** $f(x) = \dfrac{1}{2 + \ln x}$

**12.** $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

En los problemas 13-24, determine si la función $f$ es continua en el intervalo indicado.

**13.** $f(x) = x^2 + 1$

***a)*** $[-1, 4]$ ***b)*** $[5, \infty)$

**14.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

***a)*** $(-\infty, \infty)$ ***b)*** $(0, \infty)$

**15.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

***a)*** $(0, 4]$ ***b)*** $[1, 9]$

**16.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

***a)*** $[-3, 3]$ ***b)*** $[3, \infty)$

**17.** $f(x) = \tan x$

***a)*** $[0, \pi]$ ***b)*** $[-\pi/2, \pi/2]$

**18.** $f(x) = \csc x$

***a)*** $(0, \pi)$ ***b)*** $(2\pi, 3\pi)$

**19.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$

***a)*** $[-4, -3]$ ***b)*** $(-\infty, \infty)$

**20.** $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 4}$

***a)*** $(-\infty, -1]$ ***b)*** $[1, 6]$

**21.** $f(x) = \dfrac{x}{2 + \sec x}$

***a)*** $(-\infty, \infty)$ ***b)*** $[\pi/2, 3\pi/2]$

**22.** $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

***a)*** $[1/\pi, \infty)$ ***b)*** $[-2/\pi, 2/\pi]$

**23.**

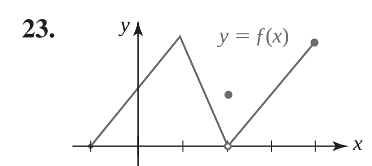



FIGURA 3.3.11 Gráfica para el problema 23

***a)*** $[-1, 3]$ ***b)*** $(2, 4]$

**24.**

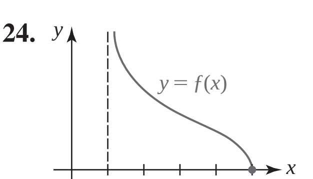



FIGURA 3.3.12 Gráfica para el problema 24

***a)*** $[2, 4]$ ***b)*** $[1, 5]$

En los problemas 25-28, encuentre los valores de $m$ y $n$ de tal manera que la función $f$ sea continua.

**25.** $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 4 \\ x^2, & x \ge 4 \end{cases}$

**26.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \ne 2 \\ m, & x = 2 \end{cases}$

**27.** $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 3 \\ n, & x = 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$

**28.** $f(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que no excede a $x$. Trace una gráfica para determinar los puntos en que la función dada es discontinua.

**29.** $f(x) = \lfloor 2x - 1 \rfloor$

**30.** $f(x) = \lfloor x \rfloor - x$

En los problemas 31 y 32, determine si la función dada tiene una discontinuidad removible en el número dado $a$. Si la discontinuidad es removible, defina una nueva función que sea continua en $a$.

**31.** $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, \quad a = 9$

**32.** $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad a = 1$

En los problemas 33-42, use el teorema 3.3.3 para encontrar el límite dado.

**33.** $\lim\limits_{x \to \pi/6} \operatorname{sen}(2x + \pi/3)$

**34.** $\lim\limits_{x \to \pi^2} \cos\sqrt{x}$

**35.** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos x)$

**36.** $\lim\limits_{x \to \pi/2} (1 + \cos(\cos x))$

**37.** $\lim\limits_{t \to \pi} \cos\left(\dfrac{t^2 - \pi^2}{t - \pi}\right)$

**38.** $\lim\limits_{t \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi t}{t^2 + 3t}\right)$

**39.** $\lim\limits_{t \to \pi} \sqrt{t - \pi + \cos^2 t}$

**40.** $\lim\limits_{t \to 1} (4t + \operatorname{sen} 2\pi t)^3$

**41.** $\lim\limits_{x \to -3} \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}\right)$

**42.** $\lim\limits_{x \to \pi} e^{\cos 3x}$

En los problemas 43 y 44, determine el (los) intervalo(s) donde $f \circ g$ es continua.

**43.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}, \quad g(x) = x + 4$

**44.** $f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}, \quad g(x) = (x - 2)^2$

En los problemas 45-48, compruebe el teorema del valor intermedio para $f$ en el intervalo dado. Encuentre un número $c$ en el intervalo para el valor indicado de $N$.

**45.** $f(x) = x^2 - 2x$, $[1, 5]$; $N = 8$

**46.** $f(x) = x^2 + x + 1$, $[-2, 3]$; $N = 6$

**47.** $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $[-2, 2]$; $N = 1$

**48.** $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$, $[0, 1]$; $N = 8$

**49.** Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$, demuestre que hay un número $c$ tal que $f(c) = 50$.

**50.** Dado que $f$ y $g$ son continuas sobre $[a, b]$ de modo que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, demuestre que hay un número $c$ en $(a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. [*Sugerencia*: Considere la función $f - g$.]

En los problemas 51-54, muestre que la ecuación dada tiene una solución en el intervalo indicado.

**51.** $2x^7 = 1 - x$, $(0, 1)$

**52.** $\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} + \dfrac{x^4 + 1}{x - 4} = 0$, $(-3, 4)$

**53.** $e^{-x} = \ln x$, $(1, 2)$

**54.** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{1}{2}$, $(\pi/2, \pi)$

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 55 y 56, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de bisección para aproximar, con precisión de dos cifras decimales, los ceros reales de $f$ que descubra a partir de la gráfica.

**55.** $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$

**56.** $f(x) = x^5 + x - 1$

**57.** Use el método de bisección para aproximar el valor de $c$ en el problema 49 hasta una precisión de dos cifras decimales.

**58.** Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 51 hasta una precisión de dos cifras decimales.

**59.** Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 52 hasta una precisión de dos cifras decimales.

**60.** Suponga que un cilindro circular recto cerrado tiene un volumen $V$ y un área superficial $S$ (lado lateral, tapa y base).

***a)*** Demuestre que el radio $r$ del cilindro debe satisfacer la ecuación $2\pi r^3 - Sr + 2V = 0$.

***b)*** Suponga que $V = 3\,000$ pies$^3$ y $S = 1\,800$ pies$^2$. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(r) = 2\pi r^3 - 1\,800r + 6\,000.$$

***c)*** Use la gráfica en el inciso *b*) y el método de bisección para encontrar las dimensiones del cilindro correspondientes al volumen y área superficial dadas en el inciso *b*). Use una precisión de dos cifras decimales.

## ≡ Piense en ello

**61.** Dado que $f$ y $g$ son continuas en un número $a$, demuestre que $f + g$ es continua en $a$.

**62.** Dado que $f$ y $g$ son continuas en un número $a$ y $g(a) \neq 0$, demuestre que $f/g$ es continua en $a$.

**63.** Sean $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor y $g(x) = \cos x$. Determine los puntos en que $f \circ g$ es discontinua.

**64.** Considere las funciones

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Determine si $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

**65. Un clásico matemático** La **función de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

recibe su nombre en honor del matemático alemán **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859). A Dirichlet se debe la definición de una función como se conoce actualmente.

***a)*** Demuestre que $f$ es discontinua en todo número real $a$. En otras palabras, *f no es una función continua en ninguna parte*.

***b)*** ¿Cómo se ve la gráfica de $f$?

***c)*** Si $r$ es un número racional positivo, demuestre que $f$ es $r$-periódica; es decir, $f(x + r) = f(x)$.

# 3.4 Límites trigonométricos

**Introducción** En esta sección se analizan límites que implican funciones trigonométricas. Como se ilustrará con los ejemplos de esta sección, el cálculo de límites trigonométricos supone manipulaciones algebraicas y conocimiento de algunas identidades trigonométricas básicas. Empezaremos con algunos resultados simples sobre límites que son consecuencia de la continuidad.

**Uso de la continuidad** En la sección precedente vimos que las funciones seno y coseno son continuas en todas partes. Por la definición 3.3.1 se concluye que para cualquier número real $a$,

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a. \tag{2}$$

En forma semejante, para un número $a$ en el dominio de la función trigonométrica dada

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a, \qquad \lim_{x \to a} \cot x = \cot a, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to a} \sec x = \sec a, \qquad \lim_{x \to a} \csc x = \csc a. \tag{4}$$

### EJEMPLO 1 Uso de (1) y (2)

A partir de (1) y (2) se tiene

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1. \tag{5}$$

Los resultados en (5) se obtendrán en el siguiente análisis sobre el cálculo de otros límites trigonométricos. Pero primero se considera un teorema que reviste una utilidad particular cuando se trabaja con límites trigonométricos.

**Teorema de compresión** El siguiente teorema posee muchos nombres, algunos de éstos son: **teorema de compresión**, **teorema del pellizco**, **teorema del emparedado** y **teorema del juego de compresión**, entre otros. Como se muestra en la FIGURA 3.4.1, si la gráfica de $f(x)$ se "comprime" entre las gráficas de otras dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ para toda $x$ próxima a $a$, y si las funciones $g$ y $h$ tienen un límite común $L$ cuando $x \to a$, tiene sentido afirmar que $f$ también tiende a $L$ cuando $x \to a$.

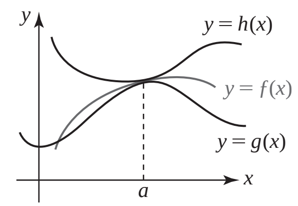



FIGURA 3.4.1 Gráfica de $f$ oprimida entre las gráficas de $g$ y $h$

**Teorema 3.4.1** Teorema de compresión

Suponga que $f$, $g$ y $h$ son funciones para las cuales $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda $x$ en un intervalo abierto que contiene a un número $a$, excepto posiblemente al mismo $a$. Si

$$\lim_{x \to a} g(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Un colega ruso dijo que este resultado se denominaba **teorema de los dos soldados** cuando estaba en la escuela. Piense en ello.

Antes de aplicar el teorema 3.4.1 se considerará un límite trigonométrico que no existe.

### EJEMPLO 2 Un límite que no existe

El límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ es impar pero no es periódica. La gráfica oscila entre $-1$ y $1$ cuando $x \to 0$:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = \pm 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Por ejemplo, $\operatorname{sen}(1/x) = 1$ para $n = 500$ o $x \approx 0.00064$, y $\operatorname{sen}(1/x) = -1$ para $n = 501$ o $x \approx 0.00063$. Esto significa que cerca del origen la gráfica de $f$ se vuelve tan comprimida que parece ser una mancha continua de color. Vea la FIGURA 3.4.2.

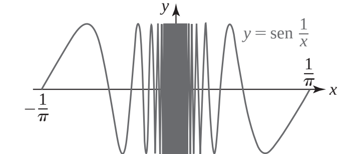



FIGURA 3.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

### EJEMPLO 3 Uso del teorema de compresión

Encuentre el límite $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

**Solución** Primero observe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ne \left(\lim_{x \to 0} x^2\right)\left(\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

porque en el ejemplo 2 acabamos de ver que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. Pero para $x \ne 0$ tenemos $-1 \le \operatorname{sen}(1/x) \le 1$. En consecuencia,

$$-x^2 \le x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \le x^2.$$

Luego, si hacemos las identificaciones $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, por (1) de la sección 3.2 se sigue que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Así, por el teorema de compresión concluimos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

En la FIGURA 3.4.3 observe la pequeña escala en los ejes $x$ y $y$.

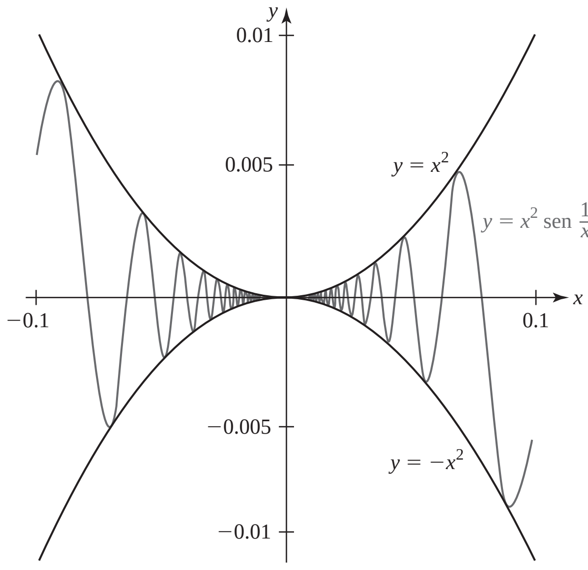



FIGURA 3.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 3 ■

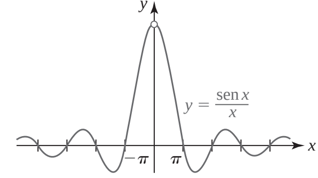
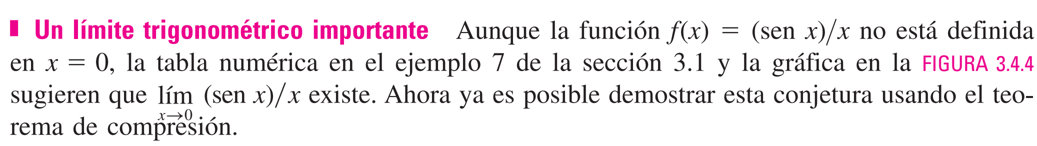



FIGURA 3.4.4 Gráfica de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$



**Un límite trigonométrico importante** Aunque la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida en $x = 0$, la tabla numérica en el ejemplo 7 de la sección 3.1 y la gráfica en la FIGURA 3.4.4 sugieren que $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$ existe. Ahora ya es posible demostrar esta conjetura usando el teorema de compresión.

Considere un círculo con centro en el origen $O$ y radio 1. Como se muestra en la FIGURA 3.4.5*a*), sea la región sombreada $OPR$ un sector del círculo con ángulo central $t$ tal que $0 < t < \pi/2$. A partir de los incisos *b*), *c*) y *d*) de la figura 3.4.5 se observa que

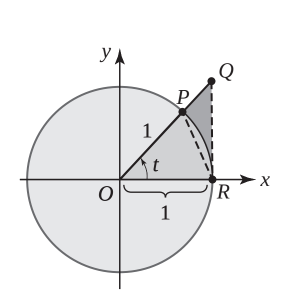
$$\text{área de } \triangle OPR \le \text{área del sector } OPR \le \text{área de } \triangle OQR. \tag{6}$$

Por la figura 3.4.5*b*), la altura de $\triangle OPR$ es $\overline{OP} \operatorname{sen} t = 1 \cdot \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t$, y así

$$\text{área de } \triangle OPR = \frac{1}{2}\overline{OR} \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t. \tag{7}$$

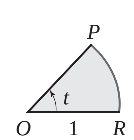
Por la figura 3.4.5*d*), $\overline{QR}/\overline{OR} = \tan t$ o $\overline{QR} = \tan t$, de modo que

$$\text{área de } \triangle OQR = \frac{1}{2}\overline{OR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan t = \frac{1}{2} \tan t. \tag{8}$$

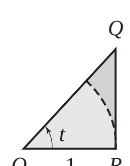



*a*) Circunferencia unitaria

*b*) Triángulo $OPR$




*c*) Sector $OPR$




*d*) Triángulo rectángulo $OQR$

FIGURA 3.4.5 Circunferencia unitaria junto con dos triángulos y un sector circular

Por último, el área de un sector del círculo es $\frac{1}{2}r^2\theta$, donde $r$ es el radio y $\theta$ es el ángulo central medido en radianes. Así,

$$\text{área del sector } OPR = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot t = \frac{1}{2}t. \qquad (9)$$

Al usar (7), (8) y (9) en la desigualdad (6) se obtiene

$$\frac{1}{2}\text{sen } t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t \qquad \text{o bien,} \qquad 1 < \frac{t}{\text{sen } t} < \frac{1}{\cos t}.$$

Por las propiedades de las desigualdades, la última desigualdad puede escribirse como

$$\cos t < \frac{\text{sen } t}{t} < 1.$$

Ahora se hace $t \to 0^+$ en el último resultado. Puesto que (sen $t$)/$t$ está "comprimida" entre 1 y cos $t$ (del cual se sabe por (5) que tiende a (1), a partir del teorema 3.4.1 se concluye que (sen $t$)/$t \to 1$. Aunque se ha supuesto $0 < t < \pi/2$, el mismo resultado se cumple para $t \to 0^-$ cuando $-\pi/2 < t < 0$. Al usar el símbolo $x$ en lugar de $t$, el resultado se resume como sigue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1. \qquad (10)$$

Como se ilustra con los siguientes ejemplos, los resultados en (1), (2), (3) y (10) se usan a menudo para calcular otros límites. Observe que el límite (10) es de la forma indeterminada 0/0.

### EJEMPLO 4 Uso de (10)

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{10x - 3\text{ sen } x}{x}$.

**Solución** La expresión fraccionaria vuelve a escribirse como dos fracciones con el mismo denominador $x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{10x - 3\text{ sen } x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{10x}{x} - \frac{3\text{ sen } x}{x}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{10x}{x} - 3\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} \quad \leftarrow \text{puesto que ambos límites existen, las } x \text{ también se cancelan en la primera expresión}\\ &= \lim_{x\to 0}10 - 3\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} \quad \leftarrow \text{ahora se usa (10)}\\ &= 10 - 3\cdot 1\\ &= 7.\end{aligned}$$

■

### EJEMPLO 5 Uso de la fórmula del ángulo doble

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{x}$.

**Solución** Para evaluar el límite dado se usan la fórmula del ángulo doble sen $2x = 2$ sen $x$ cos $x$ de la sección 2.4, y el hecho de que el límite existe:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\text{ sen } x}{x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\text{sen } x}{x}\right)\\ &= 2\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\right).\end{aligned}$$

Por (5) y (10) se sabe que $\cos x \to 1$ y $(\text{sen } x)/x \to 1$ cuando $x \to 0$, de modo que la línea precedente se vuelve

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{x} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

■

**EJEMPLO 6** Uso de (5) y (10)

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

**Solución** Al usar $\tan x = (\text{sen } x)/\cos x$ y el hecho de que el límite existe, puede escribirse

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen } x)/\cos x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 = 1. \quad \leftarrow \text{por (5) y (10)}\end{aligned}$$

■

**Uso de una sustitución** A menudo se tiene interés en límites semejantes a los considerados en el ejemplo 5. Pero si queremos encontrar, por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$, el procedimiento empleado en el ejemplo 5 deja de funcionar a nivel práctico puesto que no se cuenta con una identidad trigonométrica a la mano para sen $5x$. Hay un procedimiento alterno que permite encontrar rápidamente $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } kx}{x}$, donde $k \neq 0$ es cualquier constante real, al simplemente cambiar la variable por medio de una **sustitución**. Si se hace $t = kx$, entonces $x = t/k$. Observe que cuando $x \to 0$ entonces necesariamente $t \to 0$. Así, es posible escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } kx}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{sen } t}{t/k} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{sen } t}{1} \cdot \frac{k}{t}\right) = k \overset{\text{por (10)}}{\overset{\downarrow}{\lim_{t\to 0}}} \frac{\text{sen } t}{t} = k.$$

Por tanto, se ha demostrado el resultado general

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } kx}{x} = k. \tag{11}$$

Por (11), con $k = 2$, se obtiene el mismo resultado $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = 2$ que se obtuvo en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 7** Una sustitución

Encuentre el límite $\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+2x-3}$.

**Solución** Antes de empezar, observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \to 1$. Al factorizar $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ el límite dado puede expresarse como un límite de un producto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right]. \tag{12}$$

Luego, si se hace $t = x - 1$, veremos que $x \to 1$ implica $t \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1. \quad \leftarrow \text{por (10)}$$

Al volver a (12) es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right] \\ &= \left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right) \\ &= \left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen } t}{t}\right)\end{aligned}$$

puesto que ambos límites existen. Así,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

**EJEMPLO 8** Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

**Solución** Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ en la forma $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}.\end{aligned}$$

Para el siguiente paso de nuevo se acude al álgebra para volver a escribir la expresión fraccionaria como un producto, y luego se usan los resultados en (5):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right).\end{aligned}$$

Debido a que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)=0/2=0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0. \qquad (13)$$

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)}{x}=(-1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Luego, al dividir entre $-1$ se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0. \qquad (14)$$

En la FIGURA 3.4.6 se muestra la gráfica de $f(x) = (\cos x - 1)/x$. Los resultados en (10) y (14) se usarán en la sección "Desarrolle su competencia 3.7" y también en la sección 3.4.

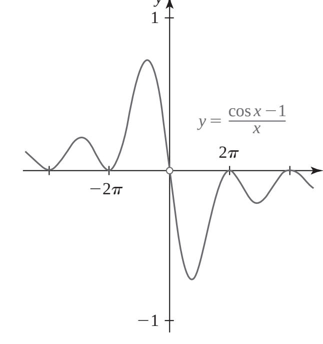



FIGURA 3.4.6 Gráfica de $f(x) = (\cos x - 1)/x$

## 3.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

### Fundamentos

En los problemas 1-36, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$
2. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-4t)}{t}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{4+\cos x}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos 3x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$
7. $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\sec t\csc 4t}$
8. $\lim_{t\to 0} 5t\cot 2t$
9. $\lim_{t\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2 t}{t\cos^2 t}$
10. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(t/2)}{\operatorname{sen} t}$
11. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 6t}{t^2}$
12. $\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{\operatorname{sen}^2 3t}$
13. $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}$
14. $\lim_{x\to 2\pi}\frac{x-2\pi}{\operatorname{sen} x}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x-\pi/2)}{x}$

18. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{sen}(5x+10)}{4x+8}$

19. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 7t}$

20. $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} 2t \csc 3t$

21. $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$

22. $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

23. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2-5t\operatorname{sen} t}{t^2}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos 4t}{\cos 8t}$

25. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(x+2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}{x}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{x}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{\cos^2 x-1}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x+\tan x}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x^2}{x^2}$

30. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{1-\cos t}$

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2+2x-8}$

32. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\operatorname{sen}(x-3)}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} 4x+1-\cos x}{x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2-2\operatorname{sen} x}{x}$

35. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\tan x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$

36. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$

37. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (17) de la sección 2.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

38. Suponga que $f(x) = \cos x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (18) de la sección 2.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

En los problemas 39 y 40, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

39. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

40. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\dfrac{\pi}{x} = 0$

41. Use las propiedades de los límites dadas en el teorema 3.2.3 para demostrar que

*a)* $\lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ *b)* $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x} = 0.$

42. Si $|f(x)| \le B$ para toda $x$ en un intervalo que contiene a 0, demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

En los problemas 43 y 44, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

43. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $2x-1 \le f(x) \le x^2-2x+3,\ x\ne 2$

44. $\lim_{x\to 0} f(x)$ donde $|f(x)-1| \le x^2,\ x\ne 0$

## ≡ Piense en ello

En los problemas 45-48, use una sustitución idónea para encontrar el límite dado.

45. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{x-\pi/4}$

46. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{x-\pi}{\tan 2x}$

47. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{x-1}$

48. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\cos(\pi/x)}{x-2}$

49. Analice: ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x\ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0?

50. La existencia de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no implica la existencia de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}$. Explique por qué el segundo límite no existe.

# 3.5 Límites que involucran el infinito

**Introducción** En las secciones 2.2 y 2.3 se consideraron algunas funciones cuyas gráficas poseían asíntotas. En esta sección se verá que las asíntotas vertical y horizontal de una gráfica están definidas en términos de límites que implican el concepto de *infinito*. Recuerde, los **símbolos de infinito**, $-\infty$ ("menos infinito") y $\infty$ ("más infinito") son herramientas de notación usadas para indicar, a su vez, que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano cartesiano esto significa a la izquierda para $x$ y hacia abajo para $y$) y en la dirección positiva (a la derecha para $x$ y hacia arriba para $y$).

En algunos textos se usa el símbolo $+\infty$ y las palabras *más infinito* en lugar de $\infty$ e *infinito*.

Aunque la terminología y notación usadas cuando se trabaja con $\pm\infty$ son estándar, lamentablemente son ligeramente desafortunadas y pueden ser confusas. Así, desde el principio se advierte que se considerarán dos tipos de límites. Primero se analizarán

- límites infinitos.

La expresión *límites infinitos* siempre se refiere a *un límite que no existe* porque la función $f$ exhibe un comportamiento no acotado: $f(x)\to -\infty$ o $f(x)\to\infty$. Luego se considerarán

- límites en el infinito.

La expresión *en el infinito* significa que se está intentando determinar si una función $f$ posee un límite cuando se deja que el valor de la variable $x$ disminuya o aumente sin límite: $x \to -\infty$ o $x \to \infty$. Estos límites pueden o no existir.

A lo largo de todo el análisis, no olvide que $-\infty$ y $\infty$ no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como se hace con los números.

**Límites infinitos** El límite de una función $f$ no existe cuando $x$ tiende a un número $a$ siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de la función $f(x)$ crecen sin límite cuando $x$ tiende a $a$ se expresa simbólicamente por

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{1}$$

Si los valores de la función decrecen sin límite cuando $x$ tiende a $a$, se escribe

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \tag{2}$$

Recuerde que el uso del símbolo $x \to a$ significa que $f$ muestra el mismo comportamiento —en este caso, sin límite— a ambos lados del número $a$ sobre el eje $x$. Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^- \qquad y \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^+.$$

Vea la FIGURA 3.5.1.

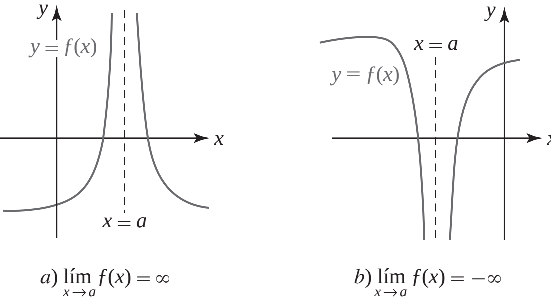



FIGURA 3.5.1 Dos tipos de límites infinitos

En forma semejante, la FIGURA 3.5.2 muestra el comportamiento sin límite de una función $f$ cuando $x$ tiende a $a$ por un lado. Observe en la figura 3.5.2*c*) que no es posible describir el comportamiento de $f$ cerca de $a$ usando un solo símbolo de límite.

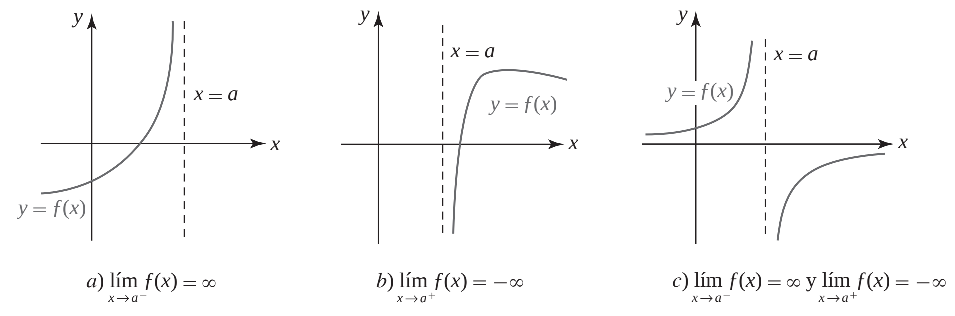



FIGURA 3.5.2 Tres tipos más de límites infinitos

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \end{aligned} \tag{3}$$

se denomina **límite infinito**. De nuevo, en cada caso de (3) simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función $f$ cerca del número $a$. *Ninguno de los límites en* (3) *existe*.

En la sección 2.3 se repasó cómo identificar una asíntota vertical para la gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$. Ahora ya podemos definir una asíntota vertical de cualquier función en términos del concepto de límite.

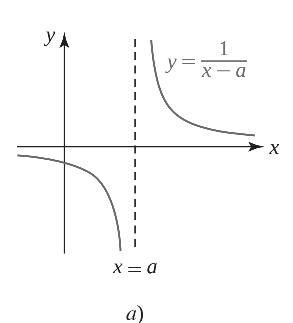
**Definición 3.5.1** Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función $f$ si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

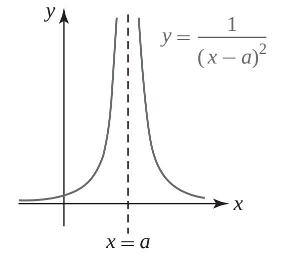
Vea la figura 2.2.1.

En el repaso de las funciones en la unidad 2 se vio que las gráficas de funciones racionales a menudo poseen asíntotas. Se vio que las gráficas de las funciones racionales $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ eran semejantes a las gráficas en la figura 3.5.2*c*) y 3.5.1*a*), respectivamente. El eje $y$, es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para cada una de estas funciones. Las gráficas de

$$y = \frac{1}{x-a} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{4}$$




*a*)




*b*)

FIGURA 3.5.3 Gráfica de las funciones en (4)

se obtienen al desplazar las gráficas $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ horizontalmente $|a|$ unidades. Como se observa en la FIGURA 3.5.3, $x = a$ es una asíntota vertical para las funciones racionales en (4). Se tiene

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = \infty \tag{5}$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty. \tag{6}$$

Los límites infinitos en (5) y (6) son justo casos especiales del siguiente resultado general:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \tag{7}$$

para $n$ un entero positivo impar y

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \tag{8}$$

para $n$ un entero positivo par. Como consecuencia de (7) y (8), la gráfica de una función racional $y = 1/(x-a)^n$ se asemeja a la gráfica en la figura 3.5.3*a*) para $n$ impar o la de la figura 3.5.3*b*) para $n$ par.

Para una función racional general $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $p$ y $q$ no tienen factores comunes, por este análisis debe resultar evidente que cuando $q$ contiene un factor $(x-a)^n$, $n$ un entero positivo, entonces la forma de la gráfica cerca de la recta vertical $x = a$ debe ser alguna de las que se muestran en la figura 3.5.3 o su reflexión en el eje $x$.

## EJEMPLO 1 Asíntotas verticales de una función racional

Al inspeccionar la función racional

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2(x+4)}$$

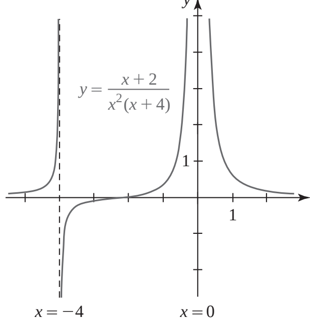



FIGURA 3.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

se observa que $x = -4$ y $x = 0$ son asíntotas verticales para la gráfica de $f$. Puesto que el denominador contiene los factores $(x-(-4))^1$ y $(x-0)^2$, es de esperar que la gráfica de $f$ cerca de la recta $x = -4$ se asemeje a la figura 3.5.3*a*) o a su reflexión en el eje $x$, y la gráfica de $f$ cerca de $x = 0$ se asemeje a la figura 3.5.3*b*) o a su reflexión en el eje $x$.

Para $x$ próxima a 0 por cualquier lado, resulta fácil ver que $f(x) > 0$. Pero para $x$ cerca de $-4$, por ejemplo $x = -4.1$ y $x = -3.9$, se tiene $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, respectivamente. Al usar la información adicional de que sólo hay una intersección $x$ simple $(-2, 0)$, se obtiene la gráfica de $f$ en la FIGURA 3.5.4. ■

## EJEMPLO 2 Límite por un lado

En la figura 2.6.6 se vio que el eje $y$, o la recta $x = 0$, es una asíntota vertical para la función logarítmica natural $f(x) = \ln x$ puesto que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La gráfica de la función logarítmica $y = \ln(x + 3)$ es la gráfica de $f(x) = \ln x$ desplazada 3 unidades a la izquierda. Por tanto, $x = -3$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = \ln(x + 3)$ puesto que $\lim_{x\to -3^+} \ln(x + 3) = -\infty$. ■

## EJEMPLO 3 Límite por un lado

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$.

**Solución** Al inspeccionar $f$ se observa que su dominio es el intervalo $(-2, \infty)$ y la intersección con el eje $y$ es $(0, 0)$. A partir de la tabla siguiente se concluye que $f$ decrece

| $x \to -2^+$ | $-1.9$ | $-1.99$ | $-1.999$ | $-1.9999$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-6.01$ | $-19.90$ | $-63.21$ | $-199.90$ |

sin límite cuando $x$ tiende a $-2$ por la derecha:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. La gráfica de $f$ se proporciona en la FIGURA 3.5.5. ■

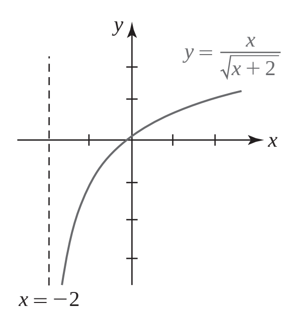



FIGURA 3.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

**Límites en el infinito** Si una función $f$ tiende a un valor constante $L$ cuando la variable independiente $x$ crece sin límite $(x \to \infty)$ o cuando $x$ decrece $(x \to -\infty)$ sin límite, entonces se escribe

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = L \tag{9}$$

y se dice que $f$ posee un **límite en el infinito**. A continuación se presentan todas las posibilidades para límites en el infinito $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$:

- Un límite existe pero el otro no.
- Tanto $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen y son iguales al mismo número.
- Tanto $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen pero son números diferentes.
- Ni $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ni $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen.

Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo, $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de $f$ puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ cuando $x$ crece en la dirección positiva.

**Definición 3.5.2** Asíntota horizontal

Se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función $f$ si por lo menos una de las dos declaraciones en (9) es verdadera.

En la FIGURA 3.5.6 se han ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se observa, junto con la figura 3.5.6*d*) que, en general, la gráfica de una función puede tener como máximo *dos* asíntotas horizontales, aunque la gráfica de una *función racional* $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener cuando mucho *una*. Si la gráfica de una función racional $f$ posee una asíntota horizontal $y = L$, entonces su comportamiento final es como se muestra en la figura 3.5.6*c*); es decir:

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to -\infty \qquad y \qquad f(x) \to L \text{ cuando } x \to \infty.$$

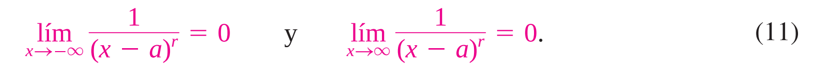
*a*) $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ *b*) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$ *c*) $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ *d*) $f(x) \to L_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to L_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 3.5.6 $y = L$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*); $y = L_1$ y $y = L_2$ son asíntotas horizontales en *d*)

Por ejemplo, si $x$ se vuelve sin límite en la dirección positiva o en la negativa, las funciones en (4) tienden a 0 y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-a}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-a}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-a)^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-a)^2}=0. \tag{10}$$

En general, si $r$ es un número racional positivo, y si $(x-a)^r$ está definido, entonces



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-a)^r}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-a)^r}=0. \tag{11}$$

Estos resultados también son verdaderos cuando $x-a$ se sustituye por $a-x$, en el supuesto que $(a-x)^r$ esté definido.

## EJEMPLO 4 Asíntotas horizontal y vertical

El dominio de la función $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$ es el intervalo $(-\infty, 2)$. En virtud de (11) puede escribirse

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{2-x}}=0.$$

Observe que no es posible considerar el límite de $f$ cuando $x\to\infty$ porque la función no está definida para $x\geq 2$. No obstante, $y=0$ es una asíntota horizontal. Luego, por el límite en infinito

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4}{\sqrt{2-x}}=\infty$$

se concluye que $x=2$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f$. Vea la FIGURA 3.5.7. ■

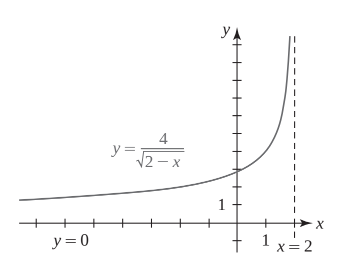



FIGURA 3.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

En general, si $F(x)=f(x)/g(x)$, entonces en la siguiente tabla se resumen los resultados para límites de las formas $\lim_{x\to a}F(x)$, $\lim_{x\to\infty}F(x)$ y $\lim_{x\to-\infty}F(x)$. El símbolo $L$ denota un número real.

| forma límite: $x\to a,\ \infty,\ -\infty$ | $\dfrac{L}{\pm\infty}$ | $\dfrac{\pm\infty}{L},\ L\neq 0$ | $\dfrac{L}{0},\ L\neq 0$ |
|---|---|---|---|
| el límite es: | 0 | infinito | infinito |

(12)

Se dice que límites de la forma $\lim_{x\to\infty}F(x)=\pm\infty$ o $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\pm\infty$ son **límites infinitos en el infinito**. Además, las propiedades de los límites dadas en el teorema 3.2.3 se cumplen al sustituir el símbolo $a$ por $\infty$ o $-\infty$ en el supuesto de que los límites existen. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=\left(\lim_{x\to\infty}f(x)\right)\left(\lim_{x\to\infty}g(x)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty}f(x)}{\lim_{x\to\infty}g(x)}, \tag{13}$$

siempre que $\lim_{x\to\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to\infty}g(x)$ existan. En el caso del límite de un cociente, también debe tenerse $\lim_{x\to\infty}g(x)\neq 0$.

**Comportamiento final** En la sección 2.3 vimos que la forma en que una función $f$ se comporta cuando $|x|$ es muy grande se denomina **comportamiento final**. Como ya se analizó, si $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, entonces la gráfica de $f$ puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y=L$ para grandes valores positivos de $x$. La gráfica de una función polinomial,

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y=a_nx^n$ para $|x|$ muy grande. En otras palabras, para

$$f(x)=a_nx^n\ \boxed{+\,a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0} \tag{14}$$

Los términos encerrados en el rectángulo en (14) son irrelevantes cuando la gráfica de una función polinomial se observa globalmente; es decir, para $|x|$ muy grande. Así, se tiene

$$\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right), \tag{15}$$

cuando (15) es $\infty$ o $-\infty$ dependiendo de $a_n$ y $n$. En otras palabras, el límite en (15) constituye un ejemplo de límite infinito en el infinito.

**EJEMPLO 5** Límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$.

**Solución** No es posible aplicar la ley del límite de un cociente en (13) a la función dada, puesto que $\lim_{x\to\infty}(-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty}(2x^4 - x) = \infty$. No obstante, al dividir el numerador y el denominador entre $x^4$ podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)}{2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left[-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)\right]}{\lim_{x\to\infty}\left[2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)\right]} \quad \leftarrow \text{El límite del numerador existe, así como el límite del denominador, y el límite del denominador no es cero}$$

$$= \frac{-6 + 0 + 0}{2 - 0} = -3.$$

Esto significa que la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función.

**Solución alterna** En virtud de (14) es posible descartar todas las potencias de $x$, menos la más alta:

descartar términos de los recuadros

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 \boxed{+ x^2 + 1}}{2x^4 \boxed{- x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4}{2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{2} = -3.$$ ■

**EJEMPLO 6** Límite infinito en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$.

**Solución** Por (14),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

**EJEMPLO 7** Gráfica de una función racional

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

**Solución** Al inspeccionar la función $f$ se observa que su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$, la intersección con el eje $y$ es (0, 0) y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Luego, a partir del límite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} 1 = -1$$

se concluye que la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica de $f$ se muestra en la FIGURA 3.5.8. ■

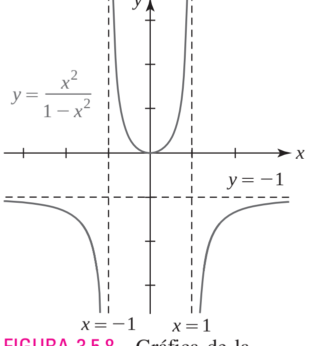



FIGURA 3.5.8 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Otra ley de los límites que se cumple para límites en el infinito es que el límite de una raíz $n$-ésima de una función es la raíz $n$-ésima del límite, siempre que el límite exista y la raíz $n$-ésima esté definida. En símbolos, si $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \sqrt[n]{L}, \tag{16}$$

en el supuesto de que $L \geq 0$ cuando $n$ es par. El resultado también se cumple para $x \to -\infty$.

**EJEMPLO 8** Límite de una raíz cuadrada

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3-5x^2+4x-6}{6x^3+2x}}$.

**Solución** Debido a que el límite de la función racional en el radical existe y es positivo, puede escribirse

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^3-5x^2+4x-6}{6x^3+2x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+4x-6}{6x^3+2x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{6x^3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**EJEMPLO 9** Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$ tiene asíntotas horizontales.

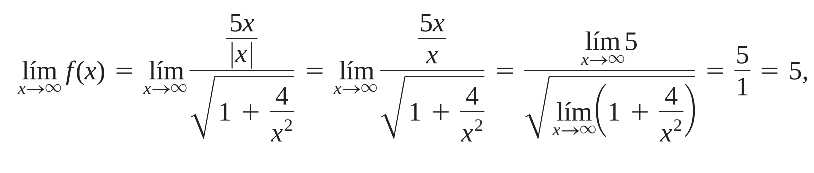
**Solución** Puesto que la función no es racional, es necesario investigar el límite de $f$ cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Primero, recuerde del álgebra que $\sqrt{x^2}$ es no negativa, o más al punto,

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

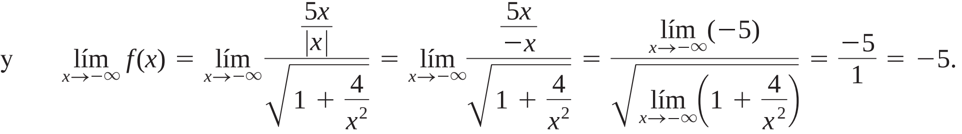
Luego, volvemos a escribir $f$ como

$$f(x)=\frac{\dfrac{5x}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}.$$

Los límites de $f$ cuando $x\to\infty$ y $x\to-\infty$ son, respectivamente,



$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}5}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}}=\frac{5}{1}=5,$$



y $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{5x}{-x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}(-5)}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}}=\frac{-5}{1}=-5.$$

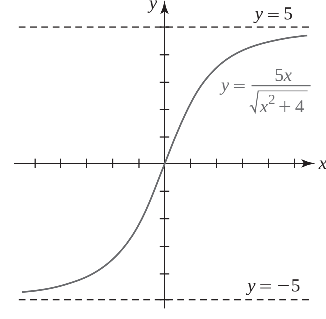



FIGURA 3.5.9 Gráfica de la función en el ejemplo 9

Por tanto, la gráfica de $f$ tiene dos asíntotas horizontales $y=5$ y $y=-5$. La gráfica de $f$, que es semejante a la figura 3.5.6*d*), se proporciona en la FIGURA 3.5.9.

En el siguiente ejemplo se ve que la forma del límite dado es $\infty-\infty$, pero el límite existe y *no es* 0.

**EJEMPLO 10** Uso de racionalización

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+7x^2+1}\right)$.

**Solución** Debido a que $f(x)=x^2-\sqrt{x^4+7x^2+1}$ es una función par (compruebe que $f(-x)=f(x)$) con dominio $(-\infty,\infty)$, si $\lim_{x\to\infty}f(x)$ existe, debe ser el mismo que $\lim_{x\to-\infty}f(x)$. Primero racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+7x^2+1}\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\sqrt{x^4+7x^2+1}\right)}{1}\cdot\left(\frac{x^2+\sqrt{x^4+7x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^4+7x^2+1}}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-(x^4+7x^2+1)}{x^2+\sqrt{x^4+7x^2+1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2-1}{x^2+\sqrt{x^4+7x^2+1}}.\end{aligned}$$

Luego, el numerador y el denominador se dividen entre $\sqrt{x^4} = x^2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-7x^2}{\sqrt{x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^4}}}{\dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7 - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-7 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)}}$$

$$= \frac{-7}{1+1} = -\frac{7}{2}.$$

FIGURA 3.5.10 Gráfica de la función en el ejemplo 10

Con ayuda de un SAC, la gráfica de la función $f$ se proporciona en la FIGURA 3.5.10. La recta $y = -\frac{7}{2}$ es una asíntota horizontal. Observe la simetría de la gráfica con respecto al eje $y$. ■

Cuando se trabaja con funciones que contienen la función exponencial natural, los cuatro siguientes límites ameritan una atención especial:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty. \tag{17}$$

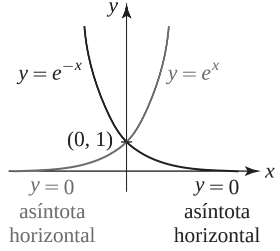



FIGURA 3.5.11 Gráficas de funciones exponenciales

Como se analizó en la sección 2.6 y se comprobó por los límites segundo y tercero en (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$. Vea la FIGURA 3.5.11.

## EJEMPLO 11 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x) = \dfrac{6}{1 + e^{-x}}$ tiene alguna asíntota horizontal.

**Solución** Debido a que $f$ no es una función racional, es necesario analizar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Primero, en virtud del tercer resultado proporcionado en (17) podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}(1 + e^{-x})} = \frac{6}{1+0} = 6.$$

Así, $y = 6$ es una asíntota horizontal. Luego, debido a que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ por la tabla en (12) se concluye que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = 0.$$

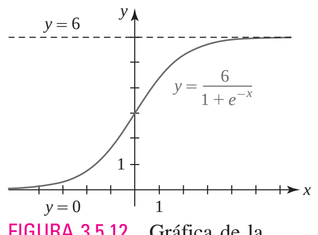



FIGURA 3.5.12 Gráfica de la función en el ejemplo 11

En consecuencia, $y = 0$ es una asíntota horizontal. La gráfica de $f$ se muestra en la FIGURA 3.5.12. ■

**Funciones compuestas** El teorema 3.3.3, el límite de una función compuesta, se cumple cuando $a$ se sustituye por $-\infty$ o $\infty$ y el límite existe. Por ejemplo, si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$ y $f$ es continua en $L$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) = f(L). \tag{18}$$

El resultado del límite en (16) es justo un caso especial de (18) cuando $f(x) = \sqrt[n]{x}$. El resultado en (18) también se cumple para $x \to -\infty$. El último ejemplo ilustra a (18) cuando implica un límite en $\infty$.

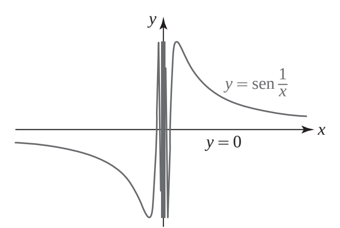



FIGURA 3.5.13 Gráfica de la función en el ejemplo 12

**EJEMPLO 12** Otro repaso a una función trigonométrica

En el ejemplo 2 de la sección 3.4 vimos que $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}(1/x)$ no existe. No obstante, el límite en el infinito, $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}(1/x)$, existe. Por la ecuación (18), podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}0 = 0.$$

Como se observa en la FIGURA 3.5.13, $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Compare esta gráfica con la mostrada en la figura 3.4.2. ■

## 3.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-24, exprese el límite dado como un número, como $-\infty$, o como $\infty$.

1. $\lim_{x\to 5^-}\frac{1}{x-5}$
2. $\lim_{x\to 6}\frac{4}{(x-6)^2}$
3. $\lim_{x\to -4^+}\frac{2}{(x+4)^3}$
4. $\lim_{x\to 2^-}\frac{10}{x^2-4}$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^4}$
6. $\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$
7. $\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\operatorname{sen}x}{x}$
8. $\lim_{x\to \pi^+}\csc x$
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{4x^2+5}$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^{-2}}$
11. $\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^4}\right)$
12. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$
13. $\lim_{x\to\infty}\frac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$
14. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1+7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$
15. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x+2}-\frac{x-1}{2x+6}\right)$
16. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x+1}\right)\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)^3$
17. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x+2}{6x-8}}$
18. $\lim_{x\to -\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-1}{7-16x}}$
19. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$
20. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$
21. $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{5}{x}\right)$
22. $\lim_{x\to -\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3-6x}\right)$
23. $\lim_{x\to -\infty}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$
24. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x+8}\right)$

En los problemas 25-32, encuentre $\lim_{x\to -\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to\infty}f(x)$ para la función dada $f$.

25. $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
26. $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$
27. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$
28. $f(x) = \frac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
29. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
30. $f(x) = 1+\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
31. $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$
32. $f(x) = \frac{|4x|+|x-1|}{x}$

En los problemas 33-42, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función dada $f$. Trace la gráfica.

33. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
34. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
35. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
36. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$
37. $f(x) = \frac{1}{x^2(x-2)}$
38. $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+4}$
39. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$
40. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
41. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
42. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$

En los problemas 43-46, use la gráfica dada para encontrar:

***a)*** $\lim_{x\to 2^-}f(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to 2^+}f(x)$
***c)*** $\lim_{x\to -\infty}f(x)$ ***d)*** $\lim_{x\to\infty}f(x)$

**43.**

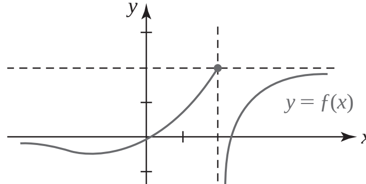



FIGURA 3.5.14 Gráfica para el problema 43

**44.**

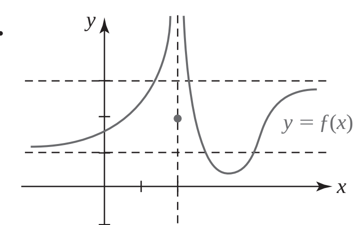



FIGURA 3.5.15 Gráfica para el problema 44

**45.**

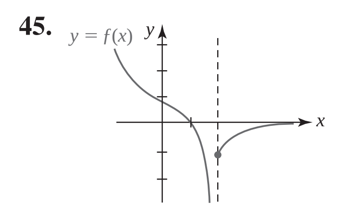



FIGURA 3.5.16 Gráfica para el problema 45

**46.**

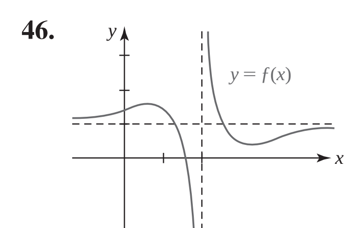



FIGURA 3.5.17 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47-50, trace una gráfica de una función $f$ que satisface las condiciones dadas.

**47.** $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

**48.** $f(0) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

**49.** $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

**50.** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(3) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

**51.** Use una sustitución idónea para evaluar

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{3}{x}.$$

**52.** Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa $m$ de un cuerpo que se mueve con velocidad $v$ es $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde $m_0$ es la masa inicial y $c$ es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a $m$ cuando $v \to c^-$?

## Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o SAC para investigar el límite dado. Conjeture su valor.

**53.** $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{2}{x^2}$

**54.** $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$

**55.** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Use la gráfica para conjeturar los valores de $f(x)$ cuando

***a)*** $x \to -1^+$, ***b)*** $x \to 0$ y ***c)*** $x \to \infty$.

**56.** ***a)*** Un $n$-gono regular es un polígono regular de $n$ lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por $n$ puntos equidistantes sobre el círculo. Suponga que el polígono que se muestra en la FIGURA 3.5.18 representa un $n$-gono regular inscrito en un círculo de radio $r$. Use trigonometría para demostrar que el área $A(n)$ del $n$-gono está dada por

$$A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

***b)*** Tiene sentido afirmar que el área $A(n)$ tiende al área del círculo a medida que aumenta el número de lados del $n$-gono. Use una calculadora para obtener $A(100)$ y $A(1\,000)$.

***c)*** Sea $x = 2\pi/n$ en $A(n)$ y observe que cuando $n \to \infty$ entonces $x \to 0$. Use (10) de la sección 3.4 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} A(n) = \pi r^2$.

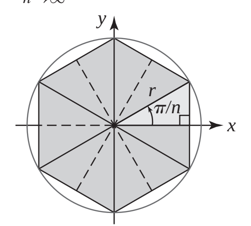



FIGURA 3.5.18 $n$-gono inscrito para el problema 56

## Piense en ello

**57.** ***a)*** Suponga que $f(x) = x^2/(x + 1)$ y $g(x) = x - 1$. Demuestre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

***b)*** ¿Qué indica el resultado del inciso *a*) respecto a las gráficas de $f$ y $g$, donde $|x|$ es grande?

***c)*** De ser posible, asigne un nombre a la función $g$.

**58.** Muy a menudo los estudiantes e incluso los profesores trazan incorrectamente gráficas desplazadas verticalmente. Por ejemplo, las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 1$ están dibujadas incorrectamente en la FIGURA 3.5.19*a*) pero lo están correctamente en la figura 3.5.19*b*). Demuestre que la figura 3.5.19*b*) es correcta al mostrar que la distancia horizontal entre los dos puntos $P$ y $Q$ en la figura tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

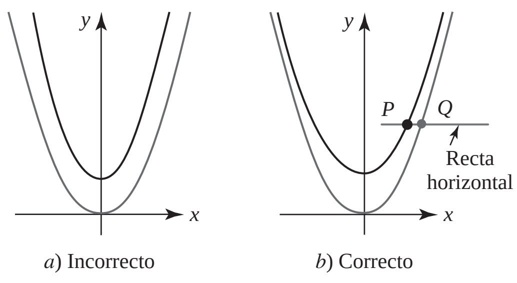



FIGURA 3.5.19 Gráficas para el problema 58

# 3.6 Límites: un enfoque formal

**Introducción** En el análisis que se presenta a continuación se considerará un enfoque alterno a la idea de límite, que se basa en conceptos analíticos más que en conceptos intuitivos. Una **demostración** de la existencia de un límite jamás debe estar basada en la habilidad para elaborar gráficas o en tablas de valores numéricos. Aunque una buena comprensión intuitiva de

$\lim_{x\to a} f(x)$ es suficiente para continuar con el estudio del cálculo en este texto, en general una comprensión intuitiva es algo muy vago como para usarlo en la demostración de teoremas. Para presentar una demostración rigurosa de la existencia de un límite, o para demostrar los importantes teoremas de la sección 3.2, es necesario empezar con una definición precisa de límite.

**Límite de una función** Se intentará demostrar que $\lim_{x\to 2}(2x+6) = 10$ al trabajar la siguiente idea: "Si $f(x) = 2x + 6$ puede hacerse arbitrariamente próximo a 10 al tomar $x$ suficientemente próximo a 2, por ambos lados pero diferente de 2, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 10$." Es necesario precisar los conceptos *arbitrariamente próximo* y *suficientemente próximo*. Para establecer una norma de proximidad arbitraria, se pedirá que la distancia entre los números $f(x)$ y 10 sea menor que 0.1; es decir,

$$|f(x) - 10| < 0.1 \qquad \text{o} \qquad 9.9 < f(x) < 10.1. \tag{1}$$

Así, ¿cuán próximo a 2 debe estar $x$ para satisfacer (1)? Para averiguarlo, es posible usar álgebra normal para volver a escribir la desigualdad

$$9.9 < 2x + 6 < 10.1$$

cuando $1.95 < x < 2.05$. Al sumar $-2$ a ambos miembros de esta desigualdad simultánea se obtiene

$$-0.05 < x - 2 < 0.05.$$

Al usar valores absolutos y recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad puede escribirse como $0 < |x - 2| < 0.05$. Así, para una *cercanía arbitrariamente próxima a 10* de 0.1, *suficientemente próximo a 2* significa a menos de 0.05. En otras palabras, si $x$ es un número diferente de 2 tal que su distancia a 2 satisface $|x - 2| < 0.05$, entonces se garantiza que la distancia de $f(x)$ a 10 satisface $|f(x) - 10| < 0.1$. Al expresarlo de otra manera, cuando $x$ es un número diferente de 2, pero que está en el intervalo abierto (1.95, 2.05) sobre el eje $x$, entonces $f(x)$ está en el intervalo (9.9, 10.1) sobre el eje $y$.

Se intentará generalizar usando el mismo ejemplo. Suponga que $\varepsilon$ (la letra griega *épsilon*) denota un *número positivo* arbitrario que constituye la medida de la proximidad arbitraria al número 10. Si se pide que

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \qquad \text{o} \qquad 10 - \varepsilon < f(x) < 10 + \varepsilon, \tag{2}$$

entonces por $10 - \varepsilon < 2x + 6 < 10 + \varepsilon$ y por álgebra, se encuentra que

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{o} \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

De nuevo, al usar valores absolutos y al recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad en (3) puede escribirse como

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Si $\varepsilon/2$ se denota por el nuevo símbolo $\delta$ (la letra griega *delta*), (2) y (4) pueden escribirse como

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Así, para un nuevo valor para $\varepsilon$, por ejemplo $\varepsilon = 0.001$, $\delta = \varepsilon/2 = 0.0005$ establece la proximidad correspondiente a 2. Para cualquier número $x$ diferente de 2 en (1.9995, 2.0005),* puede tenerse la certeza de que $f(x)$ está en (9.999, 10.001). Vea la FIGURA 3.6.1.

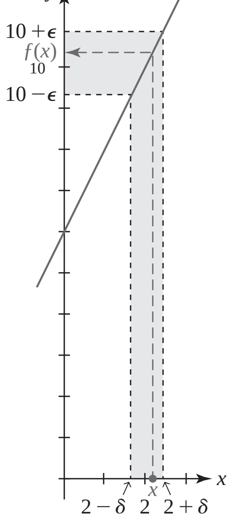



FIGURA 3.6.1 $f(x)$ está en $(10 - \varepsilon, 10 + \varepsilon)$ siempre que $x$ esté en $(2 - \delta, 2 + \delta)$, $x \neq 2$

**Una definición** El análisis anterior conduce a la **definición $\varepsilon$-$\delta$ de límite**.

**Definición 3.6.1** Definición de límite

Suponga que una función $f$ está definida en todas partes sobre un intervalo abierto, excepto quizás en un número $a$ en el intervalo. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

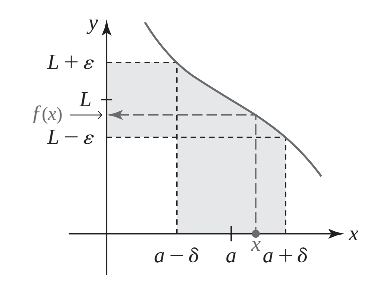
significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

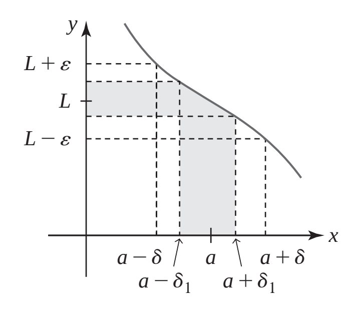
---

* Por esta razón se usa $0 < |x - 2| < \delta$ en lugar de $|x - 2| < \delta$. Al considerar $\lim_{x\to 2} f(x)$, no olvide que $f$ *en* 2 carece de importancia.

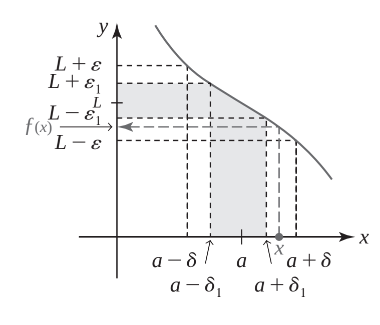
Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y suponga que $\delta > 0$ es el número que "funciona" en el sentido de la definición 3.6.1 para un $\varepsilon > 0$ dado. Como se muestra en la FIGURA 3.6.2*a*), toda $x$ en $(a - \delta, a + \delta)$, con la posible excepción de $a$ mismo, tendrá entonces una imagen $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Además, en la figura 3.6.2*b*), una elección $\delta_1 < \delta$ para la misma $\varepsilon$ también "funciona" en el sentido de que toda $x$ diferente a $a$ en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ proporciona $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. No obstante, la figura 3.6.2*c*) muestra que al escoger un $\varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, más pequeño, demanda encontrar un nuevo valor de $\delta$. Observe en la figura 3.6.2*c*) que $x$ está en $(a - \delta, a + \delta)$ pero no en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$, de modo que $f(x)$ no necesariamente está en $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$.




*a*) Un $\delta$ que funciona para un $\varepsilon$ dado




*b*) Un $\delta_1$ más pequeño también funciona para el mismo $\varepsilon$




*c*) Un $\varepsilon_1$ más pequeño requiere un $\delta_1 < \delta$. Para $x$ en $(a - \delta,\ a + \delta)$, $f(x)$ no necesariamente está en $(L - \varepsilon_1,\ L + \varepsilon_1)$

FIGURA 3.6.2 $f(x)$ está en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ siempre que $x$ esté en $(a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$

## EJEMPLO 1 Uso de la definición 3.6.1

Demuestre que $\lim_{x \to 3} (5x + 2) = 17$.

**Solución** Para cualquier $\varepsilon > 0$, arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un $\delta$ de modo que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacer lo anterior, considere

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así, para hacer $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$, sólo es necesario hacer $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon/5$.

**Verificación** Si $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$, entonces $5|x - 3| < \varepsilon$ implica

$$|5x - 15| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |f(x) - 17| < \varepsilon. \quad ■$$

## EJEMPLO 2 Uso de la definición 3.6.1

Demuestre que $\lim_{x \to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8$.

◀ Este límite se analizó en (1) y (2) de la sección 3.1.

**Solución** Para $x \neq -4$,

$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |4 - x - 8| = |-x - 4| = |x + 4| = |x - (-4)|$$

Así,
$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |x - (-4)| < \varepsilon$$

siempre que se tiene $0 < |x - (-4)| < \varepsilon$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon$. ■

## EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

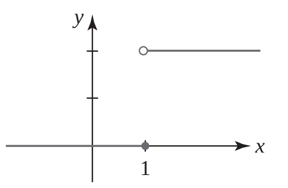



FIGURA 3.6.3 El límite de $f$ no existe cuando $x$ tiende a 1 en el ejemplo 3

En la FIGURA 3.6.3 se reconoce que $f$ tiene una discontinuidad de tipo salto en 1, de modo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. No obstante, para *demostrar* este último hecho, se procederá indirectamente. Suponga que el límite existe; a saber, $\lim_{x\to 1} f(x) = L$. Luego, por la definición 3.6.1 sabemos que para la elección $\varepsilon = \frac{1}{2}$ debe existir un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 1| < \delta.$$

Luego, a la derecha de 1 se escoge $x = 1 + \delta/2$. Puesto que

$$0 < \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

debe tenerse

$$\left|f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |2 - L| < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

A la izquierda de 1, se escoge $x = 1 - \delta/2$. Pero

$$0 < \left|1 - \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|-\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

implica

$$\left|f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Al resolver las desigualdades en valor absoluto (5) y (6) se obtiene, respectivamente,

$$\frac{3}{2} < L < \frac{5}{2} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}.$$

Puesto que ningún número $L$ puede satisfacer estas dos desigualdades, concluimos que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no debe existir. ■

En el siguiente ejemplo se considera el límite de una función cuadrática. Veremos que en este caso encontrar la $\delta$ requiere un poco más de ingenio que en los ejemplos 1 y 2.

## EJEMPLO 4 Uso de la definición 3.6.1

Este límite se analizó en el ejemplo 1 de la sección 3.1.

Demuestre que $\lim_{x\to 4} (-x^2 + 2x + 2) = -6$.

**Solución** Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es necesario encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 4| < \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| &= |(-1)(x^2 - 2x - 8)| \\ &= |(x + 2)(x - 4)| \\ &= |x + 2||x - 4|. \end{aligned} \tag{7}$$

En otras palabras, se quiere hacer $|x + 2||x - 4| < \varepsilon$. Pero puesto que hemos acordado examinar valores de $x$ *cerca de* 4, sólo se consideran aquellos valores para los cuales $|x - 4| < 1$. Esta última desigualdad da $3 < x < 5$ o, de manera equivalente, $5 < x + 2 < 7$. En consecuencia, podemos escribir $|x + 2| < 7$. Entonces, por (7),

$$0 < |x - 4| < 1 \qquad \text{implica} \qquad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4|.$$

Si ahora $\delta$ se escoge como el mínimo de los dos números 1 y $\varepsilon/7$, escrito $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$ se tiene

$$0 < |x - 4| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon. \quad ■$$

El razonamiento en el ejemplo 4 es sutil. En consecuencia, merece la pena dedicar unos minutos para volver a leer el análisis que está inmediatamente después de la definición 3.6.1,

volver a examinar la figura 3.3.2*b*) y luego volver a pensar en por qué $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$ es el $\delta$ que "funciona" en el ejemplo. Recuerde que el valor de $\varepsilon$ puede escogerse arbitrariamente; considere $\delta$ para, por ejemplo, $\varepsilon = 8$, $\varepsilon = 6$ y $\varepsilon = 0.01$.

**Límites laterales** A continuación se presentan las definiciones de los **límites laterales**, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

**Definición 3.6.2** Límite por la izquierda

Suponga que una función $f$ está definida sobre un intervalo abierto $(c, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad a - \delta < x < a.$$

**Definición 3.6.3** Límite por la derecha

Suponga que una función $f$ está definida sobre un intervalo abierto $(a, c)$. Entonces

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad a < x < a + \delta.$$

**EJEMPLO 5** Uso de la definición 3.6.3

Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

**Solución** Primero, podemos escribir

$$|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}.$$

Luego, $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < 0 + \varepsilon^2$. En otras palabras, se escoge $\delta = \varepsilon^2$.

**Verificación** Si $0 < x < \varepsilon^2$, entonces $0 < \sqrt{x} < \varepsilon$ implica

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \qquad \text{o bien,} \qquad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

■

**Límites que implican el infinito** Los dos conceptos de **límite infinito**

$$f(x) \to \infty \text{ (o bien, } -\infty) \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

y **límite en el infinito**

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \text{ (o bien, } -\infty)$$

se formalizan en las dos secciones siguientes.

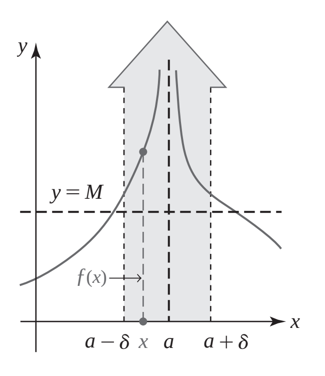
Recuerde que un límite infinito es un límite que no existe cuando $x \to a$.

**Definición 3.6.4** Límites infinitos

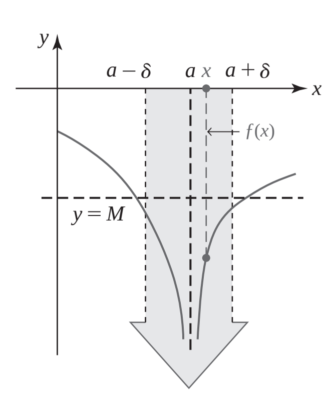
*i*) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

*ii*) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 3.6.4 se ilustran en la FIGURA 3.6.4*a*) y en la figura 3.6.4*b*), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) cuando $x \to a$, entonces $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de *f*. En el caso en que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces $f(x)$ puede hacerse más grande que cualquier número positivo arbitrario (es decir, $f(x) > M$) al tomar *x* suficientemente próximo a *a* (es decir, $0 < |x - a| < \delta$).




*a*) Para un *M* dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta,\ x \neq a$, se tiene que $f(x) > M$




*b*) Para un *M* dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta,\ x \neq a$, se tiene que $f(x) < M$

FIGURA 3.6.4 Límites infinitos cuando $x \to a$

Los cuatro límites infinitos por un lado

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^-, \qquad f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a^-$$
$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^+, \qquad f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a^+$$

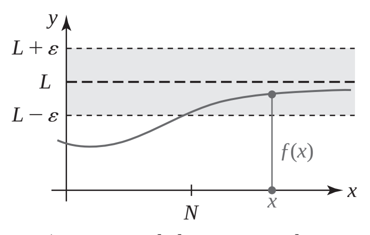
se definen de forma análoga a la proporcionada en las definiciones 3.6.2 y 3.6.3.

**Definición 3.6.5** Límites en el infinito

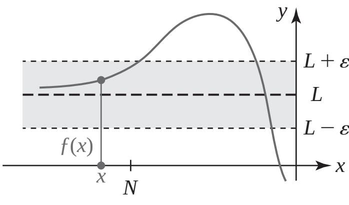
*i*) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.

*ii*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 3.6.5 se ilustran en la FIGURA 3.6.5*a*) y en la figura 3.6.5*b*), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ (o $-\infty$), entonces $y = L$ es una asíntota horizontal para la gráfica de *f*. En el caso en que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces la gráfica de *f* puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ (es decir, $|f(x) - L| < \varepsilon$) al tomar *x* suficientemente lejos sobre el eje *x* positivo (es decir, $x > N$).




*a*) Para un $\varepsilon$ dado, $x > N$ implica $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$




*b*) Para un $\varepsilon$ dado, $x < N$ implica $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

FIGURA 3.6.5 Límites en el infinito

**EJEMPLO 6** Uso de la definición 3.6.5*i*)

Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$.

**Solución** Por la definición 3.6.5*i*), para cualquier $\varepsilon > 0$ es necesario encontrar un número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > N.$$

Luego, al considerar $x > 0$, tenemos

$$\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right| = \left|\frac{-3}{x+1}\right| = \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \varepsilon$$

siempre que $x > 3/\varepsilon$. Entonces, se escoge $N = 3/\varepsilon$. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.01$, entonces $N = 3/(0.01) = 300$ garantiza que $|f(x) - 3| < 0.01$ siempre que $x > 300$. ■

**Posdata: Un poco de historia** Después de esta sección tal vez esté de acuerdo con el filósofo, predicador, historiador y científico inglés William Whewell (1794-1866), quien escribió en 1858 que "Un límite es una concepción. . . peculiar". Durante muchos años después de la invención del cálculo en el siglo XVII, los matemáticos discutían y debatían acerca de la naturaleza de un límite. Había la percepción de que la intuición, las gráficas y ejemplos numéricos de razones de cantidades que desaparecen proporcionan cuando mucho un cimiento inestable para tal concepto fundamental. Como se verá al principio de la siguiente unidad, el concepto de límite juega un papel central en cálculo. El estudio del cálculo pasó por varios periodos de creciente rigor matemático empezando con el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y luego con el matemático alemán Karl Wilhelm Weierstrass.

Cauchy

**Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) nació durante una época de convulsión en la historia de Francia. Cauchy estaba destinado a iniciar una revolución por sí mismo en matemáticas. Por muchas contribuciones, pero especialmente debido a sus esfuerzos por clarificar cuestiones matemáticas oscuras, su demanda incesante por contar con definiciones satisfactorias y demostraciones rigurosas de teoremas, Cauchy a menudo es denominado "padre del análisis moderno". Escritor prolífico cuyo trabajo sólo ha sido superado por unos cuantos, Cauchy produjo casi 800 artículos sobre astronomía, física y matemáticas. Sin embargo, la misma mentalidad que siempre estaba abierta y preguntaba sobre ciencia y matemáticas también era estrecha y no cuestionaba muchas otras áreas. Franca y arrogante, la postura apasionada de Cauchy respecto a asuntos políticos y religiosos a menudo lo alejaron de sus colegas.

Weierstrass

**Karl Wilhelm Weierstrass** (1815-1897) ¡Uno de los analistas matemáticos más destacados del siglo XIX sin haber tenido ningún grado académico! Después de especializarse en leyes en la Universidad de Bonn, aunque concentrado en esgrima y en beber cerveza durante cuatro años, Weierstrass se "graduó" en la vida real sin ningún título. Al necesitar trabajo, Weierstrass aprobó un examen estatal y recibió un certificado para enseñar en 1841. Durante 15 años como profesor de enseñanza secundaria, su genio matemático dormido floreció. Aunque la cantidad de sus investigaciones publicadas era modesta, especialmente en comparación con la de Cauchy, la calidad de estos trabajos impresionó tanto a la comunidad matemática alemana que se le otorgó un doctorado, *honoris causa*, de la Universidad de Königsberg, y finalmente fue contratado como profesor en la Universidad de Berlín. Una vez ahí, Weierstrass obtuvo reconocimiento internacional como matemático y como maestro de matemáticas. Una de sus estudiantes fue Sonja Kowalewski, la más grande matemática del siglo XIX. Fue Karl Weierstrass quien dotó de sólidos fundamentos al concepto de límite con la definición $\varepsilon$-$\delta$.

## 3.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

### Fundamentos

En los problemas 1-24, use las definiciones 3.6.1, 3.6.2 o 3.6.3 para demostrar el resultado sobre límites dado.

**1.** $\lim_{x\to 5} 10 = 10$ **2.** $\lim_{x\to -2} \pi = \pi$

**3.** $\lim_{x\to 3} x = 3$ **4.** $\lim_{x\to 4} 2x = 8$

**5.** $\lim_{x\to -1} (x + 6) = 5$ **6.** $\lim_{x\to 0} (x - 4) = -4$

**7.** $\lim_{x\to 0} (3x + 7) = 7$ **8.** $\lim_{x\to 1} (9 - 6x) = 3$

**9.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x - 3}{4} = \dfrac{1}{4}$ **10.** $\lim_{x\to 1/2} 8(2x + 5) = 48$

**11.** $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$ **12.** $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -\dfrac{1}{2}$

**13.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x^5 + 12x^4}{x^4} = 12$

**14.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$

**15.** $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ **16.** $\lim_{x\to 0} 8x^3 = 0$

**17.** $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{5x} = 0$ **18.** $\lim_{x\to (1/2)^+} \sqrt{2x - 1} = 0$

**19.** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

**20.** $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$

**21.** $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ **22.** $\lim_{x\to 2} (2x^2 + 4) = 12$

**23.** $\lim_{x\to 1} (x^2 - 2x + 4) = 3$ **24.** $\lim_{x\to 5} (x^2 + 2x) = 35$

**25.** Para $a > 0$, use la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

y el hecho de que $\sqrt{x} \ge 0$ para demostrar que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

**26.** Demuestre que $\lim_{x\to 2} (1/x) = \frac{1}{2}$. [*Sugerencia*: Considere sólo los números $x$ tales que $1 < x < 3$.]

En los problemas 27-30, demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

**27.** $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$; $a = 1$

**28.** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}$; $a = 3$

**29.** $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}$; $a = 0$

**30.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 0$

En los problemas 31-34, use la definición 3.6.5 para demostrar el resultado de límites dado.

**31.** $\lim_{x\to \infty} \dfrac{5x - 1}{2x + 1} = \dfrac{5}{2}$ **32.** $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x}{3x + 8} = \dfrac{2}{3}$

**33.** $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{10x}{x - 3} = 10$ **34.** $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 3} = 1$

### Piense en ello

**35.** Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,

donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

## Competencia final de la unidad 3

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

### A. Falso/verdadero

En los problemas 1-22, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

**1.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$ _____ **2.** $\lim_{x\to 5} \sqrt{x - 5} = 0$ _____

**3.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$ _____ **4.** $\lim_{x\to \infty} e^{2x - x^2} = \infty$ _____

**5.** $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no existe. _____ **6.** $\lim_{z\to 1} \dfrac{z^3 + 8z - 2}{z^2 + 9z - 10}$ no existe. _____

**7.** Si $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ no existe. _____

**8.** Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ no existe. _____

**9.** Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$. _____

**10.** Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 0$. _____

**11.** Si $f$ es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$. _____

**12.** Toda función polinomial es continua sobre $(-\infty, \infty)$. _____

**13.** Para $f(x) = x^5 + 3x - 1$ existe un número $c$ en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$. _____

**14.** Si $f$ y $g$ son continuas en el número 2, entonces $f/g$ es continua en 2. _____

**15.** La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ no es continua sobre el intervalo [0, 1]. _____

**16.** Si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. _____

**17.** Si una función $f$ es discontinua en el número 3, entonces $f(3)$ no está definido. _____

**18.** Si una función $f$ es discontinua en el número $a$, entonces $\lim_{x\to a} (x - a)f(x) = 0$. _____

**19.** Si $f$ es continua y $f(a)f(b) < 0$, existe una raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$. _____

**20.** La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 4, & x = 5 \end{cases}$ es discontinua en 5. _____

**21.** La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$. _____

**22.** Si $y = x - 2$ es una recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en $(3, f(3))$, entonces $f(3) = 1$. _____

## B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

**1.** $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) =$ _____

**2.** $\lim_{x\to 3}(5x^2)^0 =$ _____

**3.** $\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t - 1}{3 - 10t} =$ _____

**4.** $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1} =$ _____

**5.** $\lim_{t\to 1}\dfrac{1 - \cos^2(t - 1)}{t - 1} =$ _____

**6.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x} =$ _____

**7.** $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} =$ _____

**8.** $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} =$ _____

**9.** $\lim_{x\to\infty} e^{1/x} =$ _____

**10.** $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1 + 2e^x}{4 + e^x} =$ _____

**11.** $\lim_{x\to __}\dfrac{1}{x - 3} = -\infty$

**12.** $\lim_{x\to __}(5x + 2) = 22$

**13.** $\lim_{x\to __} x^3 = -\infty$

**14.** $\lim_{x\to __}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

**15.** Si $f(x) = 2(x - 4)/|x - 4|$, $x \neq 4$, y $f(4) = 9$, entonces $\lim_{x\to 4^-} f(x) =$ _____.

**16.** Suponga que $x^2 - x^4/3 \leq f(x) \leq x^2$ para toda $x$. Entonces $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 =$ _____.

**17.** Si $f$ es continua en un número $a$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 10$, entonces $f(a) =$ _____.

**18.** Si $f$ es continua en $x = 5$, $f(5) = 2$, y $\lim_{x\to 5} g(x) = 10$, entonces $\lim_{x\to 5} [g(x) - f(x)] =$ _____.

**19.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{4x^2 - 1}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 0.5, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ es __________ (continua/discontinua) en el número $\frac{1}{2}$.

**20.** La ecuación $e^{-x^2} = x^2 - 1$ tiene precisamente _____ raíces en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

**21.** La función $f(x) = \dfrac{10}{x} + \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad removible en $x = 2$. Para quitar la discontinuidad, es necesario definir que $f(2)$ sea _____.

**22.** Si $\lim_{x\to -5} g(x) = -9$ y $f(x) = x^2$, entonces $\lim_{x\to -5} f(g(x)) =$ _____.

## C. Ejercicios

En los problemas 1-4, trace una gráfica de la función $f$ que satisface las condiciones dadas.

**1.** $f(0) = 1, f(4) = 0, f(6) = 0, \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty, \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

**2.** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, f(0) = 1, \lim_{x\to 4^-} f(x) = \infty, \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty, f(5) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = -1$

**3.** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2, f(-1) = 3, f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$

**4.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, f(0) = -3, f(1) = 0, f(-x) = f(x)$

En los problemas 5-10, establezca cuáles de las condiciones *a*)-*j*) son aplicables a la gráfica de $y = f(x)$.

***a***) $f(a)$ no está definida ***b***) $f(a) = L$ ***c***) $f$ es continua en $x = a$ ***d***) $f$ es continua sobre $[0, a]$ ***e***) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

***f***) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ***g***) $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$ ***h***) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ***i***) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ***j***) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

**5.**

FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 5

**6.**

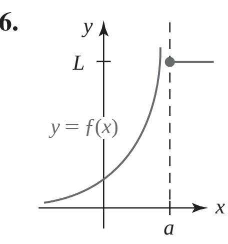



FIGURA 3.R.2 Gráfica para el problema 6

**7.**

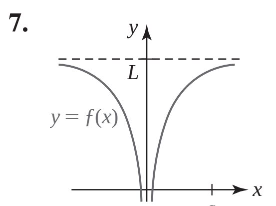



FIGURA 3.R.3 Gráfica para el problema 7

**8.**

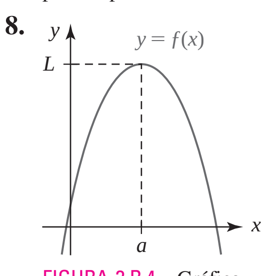



FIGURA 3.R.4 Gráfica para el problema 8

**9.**

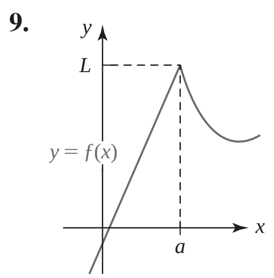



FIGURA 3.R.5 Gráfica para el problema 9

**10.**

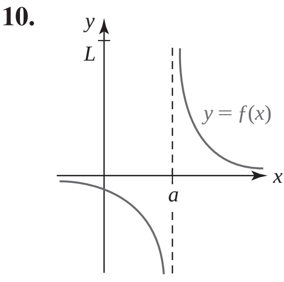



FIGURA 3.R.6 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11 y 12, trace la gráfica de la función dada. Determine los valores numéricos en caso de haber alguno, en que $f$ es continua.

**11.** $f(x) = |x| + x$

**12.** $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3, & 2 < x < 4 \\ -x + 7, & x > 4 \end{cases}$

En los problemas 13-16, determine intervalos sobre los que la función dada es continua.

**13.** $f(x) = \dfrac{x + 6}{x^3 - x}$

**14.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 4x + 3}$

**15.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

**16.** $f(x) = \dfrac{\csc x}{\sqrt{x}}$

**17.** Encuentre un número $k$ de modo que

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \le 3 \\ 2 - kx, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en el número 3.

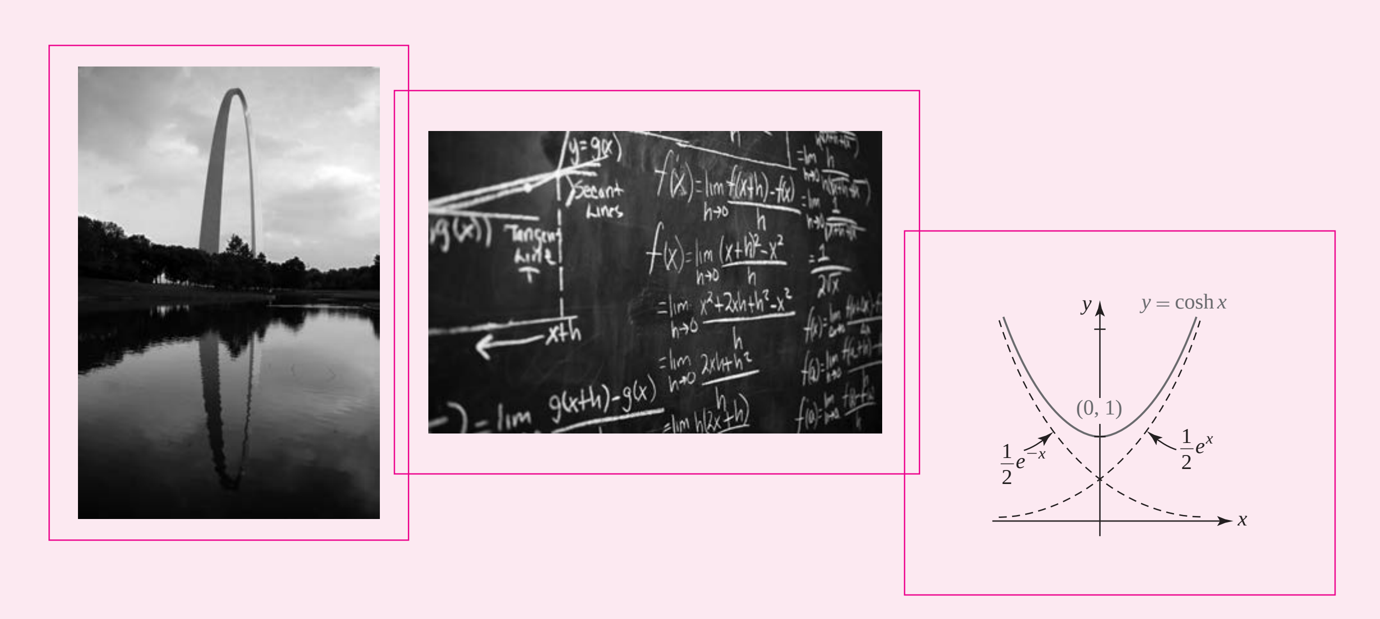
**18.** Encuentre números $a$ y $b$ tales que

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \le 1 \\ ax + b, & 1 < x \le 3 \\ 3x - 8, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todas partes.

# Unidad 4

# La derivada




**En esta unidad** La palabra *calculus* es una forma diminutiva de la palabra *calx*, que significa "piedra". En civilizaciones antiguas, piedras pequeñas o guijarros se usaban a menudo como medio de reconocimiento. En consecuencia, la palabra *calculus* se refiere a cualquier método sistemático de computación. No obstante, durante los últimos siglos la connotación de la palabra *cálculo* ha evolucionado para significar esa rama de las matemáticas relacionada con el cálculo y la aplicación de entidades conocidas como derivadas e integrales. Así, el tema conocido como **cálculo** se ha dividido en dos áreas amplias pero relacionadas: el **cálculo diferencial** y el **cálculo integral**.

En esta unidad se inicia el estudio del cálculo diferencial.

## Competencia específica

Comprender el concepto de derivada para aplicarlo como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable con respecto a otra.

# 4.1 El problema de la recta tangente

**Introducción** En un curso de cálculo se estudian muchas cosas diferentes, pero como se mencionó en la introducción de la sección 3.1, el tema "cálculo" por lo regular se divide en dos amplias áreas —relacionadas entre sí— denominadas **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. El análisis de cada uno de estos temas suele comenzar con un problema de motivación que implica la gráfica de una función. El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema.

- Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $f$,

mientras el estudio del cálculo integral se motiva con el siguiente problema:

- Encontrar el área bajo la gráfica de una función $f$.

El primer problema se abordará en esta sección y el segundo se analizará en el libro *Matemáticas 2* de esta serie.

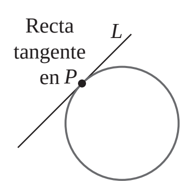
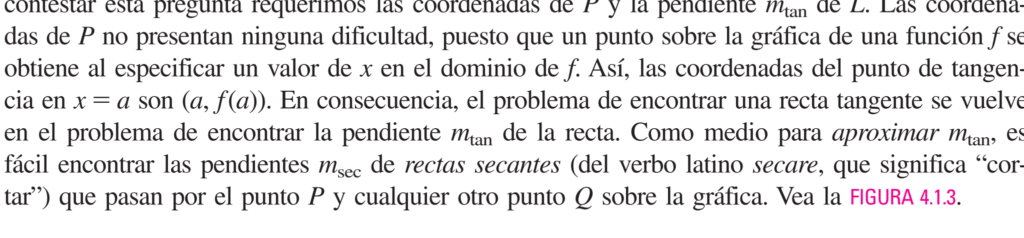



FIGURA 4.1.1 La recta tangente $L$ toca un círculo en el punto $P$

**Recta tangente a una gráfica** La palabra *tangente* surge del verbo latino *tangere*, que significa "tocar". Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta $L$ que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto $P$. Vea la FIGURA 4.1.1. No resulta tan fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función $f$. La idea de *tocar* traslada del concepto de recta tangente a la gráfica de una función, pero la idea de *cortar la gráfica en un punto* no lo hace.



Suponga que $y = f(x)$ es una función continua. Si, como se muestra en la FIGURA 4.1.2, $f$ posee una recta tangente $L$ a su gráfica en un punto $P$, entonces ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta requerimos las coordenadas de $P$ y la pendiente $m_{tan}$ de $L$. Las coordenadas de $P$ no presentan ninguna dificultad, puesto que un punto sobre la gráfica de una función $f$ se obtiene al especificar un valor de $x$ en el dominio de $f$. Así, las coordenadas del punto de tangencia en $x = a$ son $(a, f(a))$. En consecuencia, el problema de encontrar una recta tangente se vuelve en el problema de encontrar la pendiente $m_{tan}$ de la recta. Como medio para *aproximar* $m_{tan}$, es fácil encontrar las pendientes $m_{sec}$ de *rectas secantes* (del verbo latino *secare*, que significa "cortar") que pasan por el punto $P$ y cualquier otro punto $Q$ sobre la gráfica. Vea la FIGURA 4.1.3.

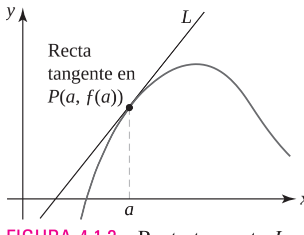
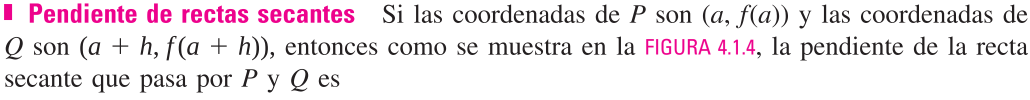



FIGURA 4.1.2 Recta tangente $L$ a una gráfica en el punto $P$



**Pendiente de rectas secantes** Si las coordenadas de $P$ son $(a, f(a))$ y las coordenadas de $Q$ son $(a + h, f(a + h))$, entonces como se muestra en la FIGURA 4.1.4, la pendiente de la recta secante que pasa por $P$ y $Q$ es

$$m_{sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

o bien,

$$m_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1}$$

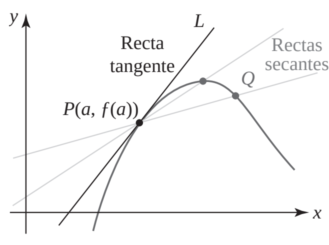



FIGURA 4.1.3 Pendientes de rectas secantes aproximan la pendiente $m_{tan}$ de $L$

La expresión en el miembro derecho de la igualdad en (1) se denomina **cociente diferencial**. Cuando se hace que $h$ asuma valores que cada vez son más próximos a cero, es decir, cuando $h \to 0$, entonces los puntos $Q(a + h, f(a + h))$ se mueven en la curva cada vez más cerca del punto $P(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que las rectas secantes tiendan a la recta tangente $L$, y que $m_{sec} \to m_{tan}$ cuando $h \to 0$. Es decir,

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec}$$

en el supuesto de que el límite existe. Esta conclusión se resume en una forma equivalente del límite usando el cociente diferencial (1).

FIGURA 4.1.4 Rectas secantes giran en la recta tangente $L$ cuando $h \to 0$

**Definición 4.1.1** Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número $a$. Si el límite

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de $f$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{tan}$.

Justo como muchos de los problemas analizados antes en esta unidad, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \to 0$.

Si el límite en (2) existe, el número $m_{tan}$ también se denomina **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

El cálculo de (2) es esencialmente un *proceso de cuatro pasos*, tres de los cuales implican sólo precálculo matemático: álgebra y trigonometría. Si los tres primeros pasos se llevan a cabo con precisión, el cuarto, o paso de cálculo, *puede ser* la parte más sencilla del problema.

### Directrices para calcular (2)

*i*) Evaluar $f(a)$ y $f(a+h)$.

*ii*) Evaluar la diferencia $f(a+h) - f(a)$. Simplificar.

*iii*) Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

*iv*) Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En muchas instancias, el cálculo de la diferencia $f(a+h) - f(a)$ en el paso *ii*) es el más importante. Resulta imperativo que usted simplifique este paso cuanto sea posible. Un consejo de cómo hacerlo: en *muchos* problemas que implican el cálculo de (2) es posible factorizar $h$ de la diferencia $f(a+h) - f(a)$.

◀ Nota

**EJEMPLO 1** El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

**Solución** El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo $a$.

*i*) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1+h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

*ii*) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2+h). \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

*iii*) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h. \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

*iv*) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{\text{por el paso precedente}}{=} \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $(1, 3)$ es 2. ■

**EJEMPLO 2** Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

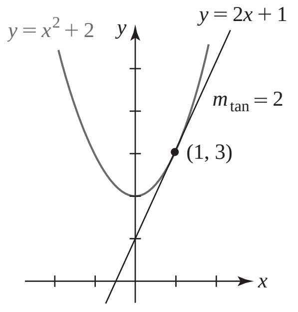



FIGURA 4.1.5 Recta tangente en el ejemplo 2

**Solución** Se conocen el punto de tangencia (1, 3) y la pendiente $m_{tan} = 2$, de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones $x$ y $y$ de la recta mostrada en la FIGURA 4.1.5. ■

## EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

**Solución** Se empieza por usar (2) para encontrar $m_{tan}$ con $a$ identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

*i*) Se tiene $f(2) = 2/2 = 1$ y $f(2 + h) = 2/(2 + h)$.

*ii*) 
$$f(2 + h) - f(2) = \frac{2}{2 + h} - 1$$
$$= \frac{2}{2 + h} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + h}{2 + h} \quad \leftarrow \text{un común denominador es } 2 + h$$
$$= \frac{2 - 2 - h}{2 + h}$$
$$= \frac{-h}{2 + h}. \quad \leftarrow \text{aquí está el factor de } h$$

*iii*) El último resultado debe dividirse entre $h$ o, más precisamente, entre $\frac{h}{1}$. Se invierte y multiplica por $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{-h}{2 + h}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{2 + h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{2 + h}. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

*iv*) Por (2), $m_{tan}$ es

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2 + h} = -\frac{1}{2}.$$

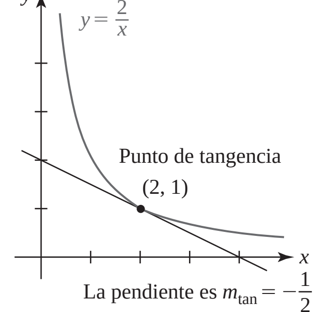



FIGURA 4.1.6 Recta tangente en el ejemplo 3

Como $f(2) = 1$, el punto de tangencia es (2, 1) y la pendiente de la recta tangente en (2, 1) es $m_{tan} = -\frac{1}{2}$. Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de $y = 2/x$ y la recta tangente en (2, 1) se muestran en la FIGURA 4.1.6. ■

## EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$.

**Solución** Al sustituir $a$ por 5 en (2) se tiene:

*i*) $f(5) = \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2$, y

$$f(5 + h) = \sqrt{5 + h - 1} = \sqrt{4 + h}.$$

*ii*) La diferencia es

$$f(5 + h) - f(5) = \sqrt{4 + h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de $h$ en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$f(5+h)-f(5)=\frac{\sqrt{4+h}-2}{1}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$
$$=\frac{(4+h)-4}{\sqrt{4+h}+2}$$
$$=\frac{h}{\sqrt{4+h}+2}. \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h$$

*iii*) Así, el cociente diferencial $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ es:

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{\dfrac{h}{\sqrt{4+h}+2}}{h}$$
$$=\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}.$$

*iv*) El límite en (2) es

$$m_{\tan}=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{x-1}$ en (5, 2) es $\frac{1}{4}$. ■

El resultado obtenido en el siguiente ejemplo no es sorprendente.

## EJEMPLO 5 Recta tangente a una recta

Para cualquier función lineal $y = mx + b$, la recta tangente a su gráfica coincide con la recta misma. Así, no de manera inesperada, la pendiente de la recta tangente para cualquier número $x = a$ es

$$m_{\tan}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m(a+h)+b-(ma+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to 0} m=m. \quad ■$$

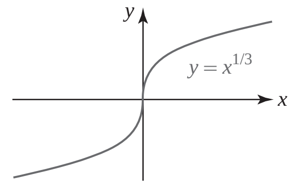



FIGURA 4.1.7 Tangente vertical en el ejemplo 6

**Tangentes verticales** El límite en (2) puede no existir para una función $f$ en $x = a$ y aun así ser una tangente en el punto $(a, f(a))$. La recta tangente a una gráfica puede ser **vertical**, en cuyo caso su pendiente está indefinida. El concepto de tangente vertical se abordará en la sección 4.2.

## EJEMPLO 6 Recta tangente vertical

Aunque por esta ocasión no se abundará en los detalles, puede demostrarse que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. En la FIGURA 4.1.7 se observa que el eje $y$, es decir, la recta $x = 0$, es tangente a la gráfica en el punto (0, 0). ■

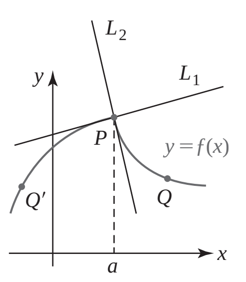



FIGURA 4.1.8 La tangente no existe en $(a, f(a))$

**Una tangente que puede no existir** La gráfica de una función $f$ que es continua en un número $a$ no tiene por qué poseer una recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Una recta tangente no existirá cuando la gráfica de $f$ tenga un pico pronunciado en $(a, f(a))$. En la FIGURA 4.1.8 se indica qué puede ser erróneo cuando la gráfica de la función tiene un "pico". En este caso $f$ es continua en $a$, pero las rectas secantes que pasan por $P$ y $Q$ tienden a $L_2$ cuando $Q \to P$, y las rectas secantes que pasan por $P$ y $Q'$ tienden a una recta diferente $L_1$ cuando $Q' \to P$. En otras palabras, el límite en (2) no existe porque los límites laterales del cociente diferencial son diferentes (cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to 0^-$).

## EJEMPLO 7 Gráfica con un pico

Demuestre que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en (0, 0).

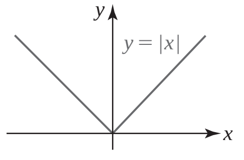



FIGURA 4.1.9 Función en el ejemplo 7

**Solución** La gráfica de la función valor absoluto en la FIGURA 4.1.9 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de $f$ no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h|=\begin{cases} h, & h>0 \\ -h, & h<0 \end{cases}$$

observamos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1 \qquad \text{mientras} \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que el límite (2) no existe. Aunque la función $f(x)=|x|$ es continua en $x=0$, la gráfica de $f$ no posee ninguna tangente en (0, 0). ■

**Razón de cambio media** En contextos diferentes el cociente diferencial en (1) y (2), o pendiente de la recta secante, se escribe en términos de símbolos alternos. El símbolo $h$ en (1) y (2) a menudo se escribe como $\Delta x$ y la diferencia $f(a+\Delta x)-f(a)$ se denota por $\Delta y$, es decir, el cociente diferencial es

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Además, si $x_1=a+\Delta x$, $x_0=a$, entonces $\Delta x=x_1-x_0$ y (3) es lo mismo que

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4}$$

La pendiente $\Delta y/\Delta x$ de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se denomina **razón de cambio media de la función** $f$ sobre el intervalo $[x_0, x_1]$. Así, el límite $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ se denomina **razón de cambio media instantánea de la función** con respecto a $x$ en $x_0$.

Casi todo mundo tiene una noción intuitiva de la velocidad como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto lapso. Cuando, por ejemplo, un autobús recorre 60 mi en 1 h, la *velocidad media* del autobús debe haber sido 60 mi/h. Por supuesto, resulta difícil mantener la razón de 60 mi/h durante todo el recorrido porque el autobús disminuye su velocidad al pasar por poblaciones y la aumenta al rebasar a otros vehículos. En otras palabras, la velocidad cambia con el tiempo. Si el programa de la compañía de transportes demanda que el autobús recorra las 60 millas de una población a otra en 1 h, el conductor sabe instintivamente que debe compensar velocidades inferiores a 60 mi/h al conducir a velocidades superiores en otros puntos del recorrido. Saber que la velocidad media es 60 mi/h no permite, sin embargo, contestar la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?

**Velocidad media** En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{\text{pro}}=\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. \tag{5}$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{\text{pro}}=\frac{10-0}{1.25-0}=8 \text{ km/h}.$$

Pero suponga ahora que deseamos determinar la velocidad *exacta* $v$ en el instante en que el corredor ya lleva media hora corriendo. Si se mide que la distancia recorrida en el intervalo de 0 h a 0.5 h es igual a 5 km, entonces

$$v_{\text{pro}}=\frac{5}{0.5}=10 \text{ km/h}.$$

De nuevo, este número no es una medida, o necesariamente incluso un indicador aceptable, de la velocidad instantánea $v$ a que el corredor se ha movido 0.5 h en la carrera. Si determi-

namos que a 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es $v_{\text{pro}} = 5.7/0.6 = 9.5$ km/h. No obstante, durante el lapso de 0.5 h a 0.6 h,

$$v_{\text{pro}} = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h}.$$

El último número es una medida más realista de la razón $v$. Vea la FIGURA 4.1.10. Al "estirar" el lapso entre 0.5 h y el tiempo que corresponde a la posición medida cerca de 5 km, se espera obtener incluso una mejor aproximación a la velocidad del corredor en el instante 0.5 h.

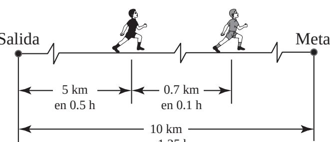



FIGURA 4.1.10 Corredor en una carrera de 10 km

**Movimiento rectilíneo** Para generalizar el análisis precedente, suponga que un objeto, o partícula, en el punto $P$ se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 4.1.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde $t$ representa el tiempo. Los valores de $s$ son distancias dirigidas medidas a partir de $O$ en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando $P$ está a la derecha o arriba de $O$, se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando $P$ está a la izquierda o abajo de $O$. El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

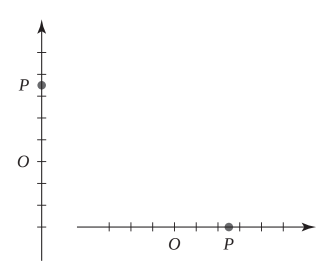



FIGURA 4.1.11 Rectas coordenadas

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto $P$ en el instante $t_0$ y un punto $P'$ en el instante $t_1$, y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 4.1.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{6}$$

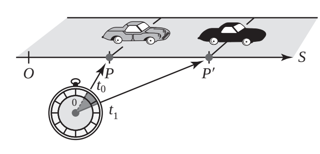



FIGURA 4.1.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

## EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura $s$ por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos. Vea la FIGURA 4.1.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

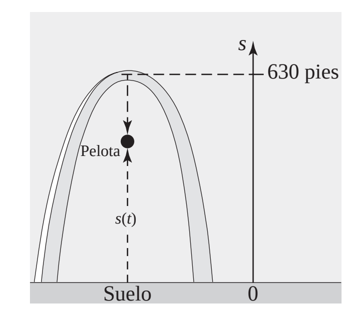



FIGURA 4.1.13 Pelota que cae en el ejemplo 8

**Solución** El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación $s(t) = 630$ o $-16t^2 + 630 = 630$. Así se obtiene $t = 0$ s. Cuando la pelota golpea el suelo, entonces $s(t) = 0$ o $-16t^2 + 630 = 0$. Con la última ecuación se obtiene $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$ s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo $\left[0, \sqrt{315/8}\right]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s\left(\sqrt{351/8}\right) - s(0)}{\sqrt{351/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{351/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.}$$ ■

Si se hace $t_1 = t_0 + \Delta t$, o $\Delta t = t_1 - t_0$, y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, entonces (6) es equivalente a

$$v_{\text{pro}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{7}$$

Esto sugiere que el límite de (7) cuando $\Delta t \to 0$ proporciona la **razón de cambio instantánea** de $s(t)$ en $t = t_0$, o **velocidad instantánea**.

**Definición 4.1.2** Velocidad instantánea

Sea $s = s(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{8}$$

siempre que el límite exista.

**Nota:** Excepto por notación e interpretación, no hay ninguna diferencia matemática entre (2) y (8). También, a menudo se omite la palabra *instantánea*, de modo que entonces se habla de la *razón de cambio* de una función o la *velocidad* de una partícula en movimiento.

**EJEMPLO 9** Otro repaso al ejemplo 8

Encuentre la velocidad instantánea de la pelota que cae en el ejemplo 8 en $t = 3$ s.

**Solución** Se usa el mismo procedimiento de cuatro pasos que en los ejemplos anteriores con $s = s(t)$ dada en el ejemplo 8.

*i*) $s(3) = -16(9) + 630 = 486$. Para cualquier $\Delta t \neq 0$,

$$s(3 + \Delta t) = -16(3 + \Delta t)^2 + 630 = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486.$$

*ii*) $s(3 + \Delta t) - s(3) = [-16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486] - 486$

$$= -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t = \Delta t(-16\Delta t - 96)$$

*iii*) $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(-16\Delta t - 96)}{\Delta t} = -16\Delta t - 96$

*iv*) Por (8),

$$v(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-16\Delta t - 96) = -96 \text{ pies/s.} \quad (9)$$ ■

En el ejemplo 9, el número $s(3) = 486$ pies es la altura de la pelota por arriba del nivel del suelo a 3 s de haber sido soltada. El signo menos en (9) es importante porque la pelota se está moviendo en dirección opuesta a la dirección positiva (hacia arriba), es decir, se mueve hacia abajo.

## 4.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de $x$.

**1.** $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

**2.** $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

**3.** $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

**4.** $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

**5.** $f(x) = \operatorname{sen} x$, $(\pi/2, 1)$; $x = \pi/2$, $x = 2\pi/3$

**6.** $f(x) = \cos x$, $\left(-\pi/3, \frac{1}{2}\right)$; $x = -\pi/2$, $x = -\pi/3$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de $x$. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

**7.** $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

**8.** $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

**9.** $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

**10.** $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

**11.** $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$

**12.** $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

**13.** $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, $x = -1$

**14.** $f(x) = \dfrac{4}{x - 1}$, $x = 2$

**15.** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$, $x = 0$

**16.** $f(x) = 4 - \dfrac{8}{x}$, $x = -1$

**17.** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$

**18.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$

En los problemas 19 y 20, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de $x$. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente. Antes de empezar, revise los límites en (10) y (14) de la sección 3.4, así como las fórmulas de suma (17) y (18) en la sección 2.4.

**19.** $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = \pi/6$

**20.** $f(x) = \cos x$, $x = \pi/4$

En los problemas 21 y 22, determine si la recta que pasa por los puntos sobre la parábola es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto dado.

**21.**

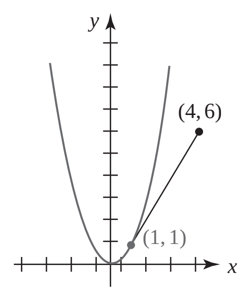



FIGURA 4.1.14 Gráfica para el problema 21

**22.**

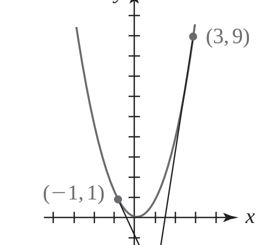



FIGURA 4.1.15 Gráfica para el problema 22

**23.** En la FIGURA 4.1.16, la recta mostrada es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre una ecuación de la recta tangente. ¿Cuál es la intersección $y$ de la recta tangente?

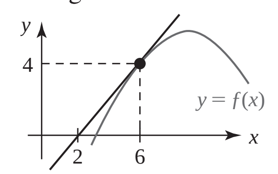



FIGURA 4.1.16 Gráfica para el problema 23

**24.** En la FIGURA 4.1.17, la recta mostrada es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre $f(-5)$.

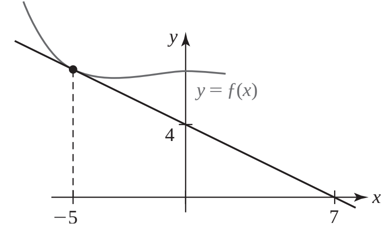



FIGURA 4.1.17 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-28, use (2) para encontrar una fórmula para $m_{tan}$ en un punto general $(x, f(x))$ sobre la gráfica de $f$. Use la fórmula $m_{tan}$ para determinar los puntos en que la recta tangente a la gráfica es horizontal.

**25.** $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ **26.** $f(x) = 2x^2 + 24x - 22$

**27.** $f(x) = x^3 - 3x$ **28.** $f(x) = -x^3 + x^2$

## ≡ Aplicaciones

**29.** Un automóvil recorre 290 mi entre Los Ángeles y Las Vegas en 5 h. ¿Cuál es la velocidad media?

**30.** Dos señalizaciones sobre una carretera recta están a una distancia de $\frac{1}{2}$ mi entre sí. Una patrulla observa que un automóvil cubre la distancia entre las marcas en 40 s. Suponiendo que la velocidad límite es 60 mi/h, ¿el automóvil será detenido por exceso de velocidad?

**31.** Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer los 3 500 km que hay entre Hawaii y San Francisco. ¿En cuántas horas realiza este vuelo?

**32.** Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 26 mi. La carrera empieza a mediodía. A la 1:30 p.m., un corredor cruza la marca de 10 mi y a las 3:10 p.m. el corredor pasa por la marca de 20 mi. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 p.m. y las 3:10 p.m.?

En los problemas 33 y 34, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas está dada por la función. Use (8) para encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el instante indicado.

**33.** $s(t) = -4t^2 + 10t + 6,\ t = 3$ **34.** $s(t) = t^2 + \dfrac{1}{5t + 1},\ t = 0$

**35.** La altura por arriba del suelo a que se suelta una pelota a una altura inicial de 122.5 m está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 122.5$, donde $s$ se mide en metros y $t$ en segundos.

*a*) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = \frac{1}{2}$?
*b*) ¿En qué instante la pelota golpea el suelo?
*c*) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

**36.** Al ignorar la resistencia del aire, si un objeto se deja caer desde una altura inicial $h$, entonces su altura por arriba del nivel del suelo en el instante $t > 0$ está dada por $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$, donde $g$ es la aceleración de la gravedad.

*a*) ¿En qué instante el objeto choca contra el suelo?
*b*) Si $h = 100$ pies, compare los instantes de impacto para la Tierra ($g = 32$ pies/s$^2$), Marte ($g = 12$ pies/s$^2$) y la Luna ($g = 5.5$ pies/s$^2$).
*c*) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea $v$ en el instante general $t$.
*d*) Use los instantes encontrados en el inciso *b*) y la fórmula encontrada en el inciso *c*) para calcular las velocidades de impacto correspondientes para la Tierra, Marte y la Luna.

**37.** La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por $s = -16t^2 + 256t$, donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos.

*a*) Determine la altura del proyectil en $t = 2$, $t = 6$, $t = 9$ y $t = 10$.
*b*) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?
*c*) Demuestre que la velocidad media entre $t = 7$ y $t = 9$ es cero. Interprete físicamente.
*d*) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?
*e*) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea $v$ en el instante general $t$.
*f*) Use el resultado del inciso *d*) y la fórmula encontrada en el inciso *e*) para aproximar la velocidad de impacto final.
*g*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

**38.** Suponga que la gráfica mostrada en la FIGURA 4.1.18 es la de la función de posición $s = s(t)$ de una partícula que se mueve en una línea recta, donde $s$ se mide en metros y $t$ en segundos.

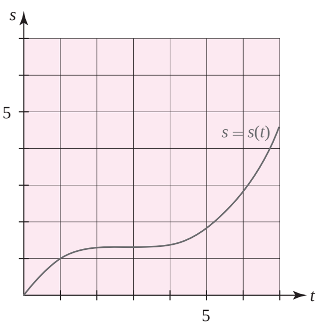



FIGURA 4.1.18 Gráfica para el problema 38

*a*) Calcule la posición de la partícula en $t = 4$ y $t = 6$.
*b*) Calcule la velocidad media de la partícula entre $t = 4$ y $t = 6$.
*c*) Calcule la velocidad inicial de la partícula; es decir, su velocidad en $t = 0$.
*d*) Calcule el instante en que la velocidad de la partícula es cero.
*e*) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es decreciente.
*f*) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es creciente.

## ≡ Piense en ello

**39.** Sea $y = f(x)$ una función par cuya gráfica tiene una recta tangente $m$ con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, f(a))$ es $-m$. [*Sugerencia*: Explique por qué $f(-a + h) = f(a - h)$.]

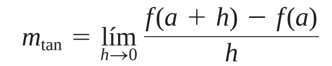
**40.** Sea $y = f(x)$ una función impar cuya gráfica tiene una recta tangente $m$ con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, -f(a))$ es $m$.

**41.** Proceda como en el ejemplo 7 y demuestre que no hay recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + |x|$ en $(0, 0)$.

# 4.2 La derivada

**Introducción** En la sección anterior vimos que la recta tangente a una gráfica de una función $y = f(x)$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente dada por

Recuerde que $m_{\tan}$ también se denomina pendiente de la curva en $(a, f(a))$.



$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista. Para muchas funciones suele ser posible obtener una fórmula general que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se lleva a cabo al calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

para *cualquier* $x$ (para la que existe el límite). Luego sustituimos un valor de $x$ *después* que se ha encontrado el límite.

**Una definición** El límite del cociente de la diferencia en (1) define una función: una función que se *deriva* de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina **función derivada**, o simplemente la **derivada**, de $f$ y se denota por $f'$.

**Definición 4.2.1** Derivada

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en $x$ está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

siempre que el límite exista.

A continuación reconsideraremos los ejemplos 1 y 2 de la sección anterior.

**EJEMPLO 1** Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

**Solución** Así como en el cálculo de $m_{\tan}$ en la sección 4.1, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

*i*) $f(x + h) = (x + h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$

*ii*) $f(x + h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x + h)$

*iii*) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$ ← las $h$ se cancelan

*iv*) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso *iv*) vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $f'(x) = 2x$. ■

Observe que el resultado $m_{\tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 4.1 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2$.

**EJEMPLO 2** Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(1)$. Interprete.

**Solución** Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

en $x = -2$, $\begin{cases} f(-2) = 6 \\ f'(-2) = -4 \end{cases}$ ← el punto de tangencia es $(-2, 6)$; ← la pendiente de la recta tangente en $(-2, 6)$ es $m = -4$

en $x = 0$, $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ ← el punto de tangencia es $(0, 2)$; ← la pendiente de la recta tangente en $(0, 2)$ es $m = 0$

$$\text{en } x = \tfrac{1}{2}, \quad \begin{cases} f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{9}{4} & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{4}\right) \\ f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{4}\right) \text{ es } m = 1 \end{cases}$$

$$\text{en } x = 1, \quad \begin{cases} f(1) = 3 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (1, 3) \\ f'(1) = 2. & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (1, 3) \text{ es } m = 2 \end{cases}$$

Recuerde que la pendiente de una recta horizontal es 0. Así, el hecho de que $f'(0) = 0$ significa que la recta tangente es horizontal en (0, 2). ■

Por cierto, si regresa al proceso de cuatro pasos en el ejemplo 1, encontrará que la derivada de $g(x) = x^2$ también es $g'(x) = 2x = f'(x)$. Esto tiene sentido intuitivo: puesto que la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una traslación vertical rígida o desplazamiento de la gráfica de $g(x) = x^2$ para un valor dado de $x$, los puntos de tangencia cambian, pero no así la pendiente de la recta tangente en los puntos. Por ejemplo, en $x = 3$, $g'(3) = 6 = f'(3)$ pero los puntos de tangencia son $(3, g(3)) = (3, 9)$ y $(3, f(3)) = (3, 11)$.

## EJEMPLO 3 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^3$.

**Solución** Para calcular $f(x + h)$, usamos el teorema del binomio.

*i)* $f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

*ii)* $f(x + h) - f(x) = [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$

*iii)* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

*iv)* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}[3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2.$

Recuerde de sus estudios de álgebra que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Luego, $a$ se sustituye por $x$ y $b$ por $h$.

La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$. ■

## EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = \frac{1}{2}$.

**Solución** Por el ejemplo 3 tenemos dos funciones $f(x) = x^3$ y $f'(x) = 3x^2$. Como vimos en el ejemplo 2, cuando estas funciones se evalúan en el mismo número $x = \frac{1}{2}$ se obtiene diferente información:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8}\right) \text{ es } \tfrac{3}{4}$$

Así, por la ecuación punto-pendiente de una recta,* una ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La gráfica de la función y la recta tangente se muestran en la FIGURA 4.2.1. ■

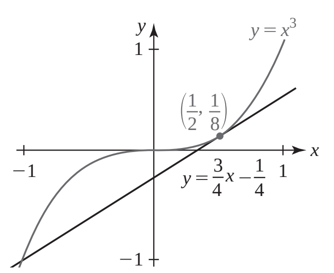



FIGURA 4.2.1 Recta tangente en el ejemplo 4

## EJEMPLO 5 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = 1/x$.

**Solución** En este caso usted debe poder demostrar que la diferencia es

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x + h)x}. \quad \leftarrow \text{las fracciones se suman usando un común denominador}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x + h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x + h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

La derivada de $f(x) = 1/x$ es $f'(x) = -1/x^2$. ■

*N. del RT. También se le conoce como forma punto-pendiente.

**Notación** A continuación se presenta una lista de la **notación** común usada en la literatura matemática para denotar la derivada de una función:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad Dy, \quad D_x y.$$

Para una función como $f(x) = x^2$, escribimos $f'(x) = 2x$; si la misma función se escribe $y = x^2$, entonces utilizamos $dy/dx = 2x$, $y' = 2x$ o $D_x y = 2x$. En este texto usaremos las tres primeras formas. Por supuesto, en varias aplicaciones se usan otros símbolos. Por tanto, si $z = t^2$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = 2t \qquad \text{o bien,} \qquad z' = 2t.$$

La notación $dy/dx$ tiene su origen en la forma derivada de (3) de la sección 4.1. Al sustituir $h$ por $\Delta x$ y denotar la diferencia $f(x+h) - f(x)$ por $\Delta y$ en (2), a menudo la derivada se define como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

**EJEMPLO 6** Una derivada donde se usa (3)

Use (3) para encontrar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

**Solución** En el procedimiento de cuatro pasos, la manipulación algebraica importante tiene lugar en el tercer paso:

*i*) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

*ii*) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

*iii*)
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \quad \leftarrow \text{racionalización del numerador} \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

*iv*)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada de $y = \sqrt{x}$ es $dy/dx = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. ■

**Valor de una derivada** El **valor** de la derivada en un número $a$ se denota por los símbolos

$$f'(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad y'(a), \quad \left.D_x y\right|_{x=a}.$$

**EJEMPLO 7** Una derivada

Por el ejemplo 6, el valor de la derivada de $y = \sqrt{x}$ en, por ejemplo, $x = 9$ se escribe

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=9} = \frac{1}{6}.$$

En forma alterna, para evitar la torpe barra vertical, simplemente escribimos $y'(9) = \frac{1}{6}$. ■

**Operadores diferenciación** El proceso de encontrar o calcular una derivada se denomina **diferenciación**. Así, la diferenciación es una operación que se lleva a cabo sobre una función

$y = f(x)$. La operación de diferenciación de una función con respecto a la variable $x$ se representa con los símbolos $d/dx$ y $D_x$. Estos símbolos se denominan **operadores diferenciación**. Por ejemplo, los resultados en los ejemplos 1, 3 y 6 pueden expresarse, a su vez, como

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El símbolo

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{entonces significa} \quad \frac{d}{dx}y.$$

**Diferenciabilidad** Si el límite en (2) existe para un número $x$ dado en el dominio de $f$, se dice que la función es **diferenciable** en $x$. Si una función $f$ es diferenciable en todo número $x$ en los intervalos abiertos $(a, b)$, $(-\infty, b)$ y $(a, \infty)$, entonces $f$ es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si $f$ es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que $f$ es **diferenciable en todas partes**. Se dice que una función $f$ es **diferenciable sobre un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando $f$ es diferenciable sobre el intervalo abierto $(a, b)$, y

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
$$f'_{-}(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \qquad (4)$$

ambos existen. Los límites en (4) se denominan **derivadas por la derecha** y **por la izquierda**, respectivamente. Una función es diferenciable sobre $[a, \infty)$ cuando es diferenciable sobre $(a, \infty)$ y tiene derivada por la derecha en $a$. Una definición semejante en términos de una derivada por la izquierda se cumple para diferenciabilidad sobre $(-\infty, b]$. Además, puede demostrarse que:

- Una función es diferenciable en un número $c$ en un intervalo $(a, b)$ si y sólo si $f'_{+}(c) = f'_{-}(c)$. (5)

**Tangentes horizontales** Si $y = f(x)$ es continua en un número $a$ y $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente en $(a, f(a))$ es **horizontal**. En los ejemplos 1 y 2 vimos que el valor de la derivada $f'(x) = 2x$ de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 0$ es $f'(0) = 0$. Por tanto, la recta tangente a la gráfica es horizontal en $(0, f(0))$ o $(0, 0)$. Se deja como ejercicio (vea el problema 7 en la sección "Desarrolle su competencia 4.2") comprobar por la definición 4.2.1 que la derivada de la función continua $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ es $f'(x) = -2x + 4$. Observe en este último caso que $f'(x) = 0$ cuando $-2x + 4 = 0$ o $x = 2$. Hay una tangente horizontal en el punto $(2, f(2)) = (2, 5)$.

**Dónde *f* no es diferenciable** Una función no tiene derivada en $x = a$ si

*i*) la función es discontinua en $x = a$, o
*ii*) la gráfica de $f$ tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, $f$ no es diferenciable

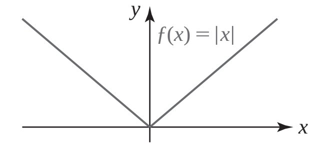
*iii*) en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada $f'$, definido por (2), es el conjunto de números $x$ para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de $f'$ necesariamente es un subconjunto del dominio de $f$.

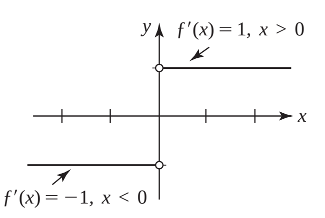
**EJEMPLO 8** Diferenciabilidad

***a***) La función $f(x) = x^2 + 2$ es diferenciable para todos los números reales $x$; es decir, el dominio de $f'(x) = 2x$ es $(-\infty, \infty)$.

***b***) Debido a que $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, $f$ no es diferenciable en $x = 0$ y en consecuencia no es diferenciable sobre cualquier intervalo que contenga 0. ■




*a*) Función valor absoluto de $f$




*b*) Gráfica de la derivada $f'$

FIGURA 4.2.2 Gráficas de $f$ y $f'$ en el ejemplo 9

## EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 7 de la sección 4.1

En el ejemplo 7 de la sección 4.1 vimos que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en el origen (0, 0). Así, $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Pero $f(x) = |x|$ es diferenciable sobre los intervalos abiertos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$. En el ejemplo 5 de la sección 4.1 demostramos que la derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos $f(x) = |x| = x$ y así $f'(x) = 1$. También, para $x < 0, f(x) = |x| = -x$ y así $f'(x) = -1$. Puesto que la derivada de $f$ es una función definida por partes,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

que podemos graficar como cualquier función. En la FIGURA 4.2.2*b*) observamos que $f'$ es discontinua en $x = 0$. ■

Con símbolos diferentes, lo que demostramos en el ejemplo 9 es que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$. Puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ por (5) se concluye que $f$ no es diferenciable en 0.

**Tangentes verticales** Sea $y = f(x)$ continua en un número $a$. Si $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$, entonces se dice que la gráfica de $f$ tiene una **tangente vertical** en $(a, f(a))$. Las gráficas de muchas funciones con exponentes radicales tienen tangentes verticales.

En el ejemplo 6 de la sección 4.1 se mencionó que la gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene una línea tangente vertical en (0, 0). Verificamos esta afirmación en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 10 Tangente vertical

Se deja como ejercicio demostrar que la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ está dada por

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

(Vea el problema 55 de esta sección.) Aunque $f$ es continua en 0, resulta evidente que $f'$ no está definida en ese número. En otras palabras, $f$ no es diferenciable en $x = 0$. Además, debido a que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \infty$$

tenemos $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$. Esto es suficiente para afirmar que en $(0, f(0))$ o (0, 0) hay una recta tangente y que es vertical. En la FIGURA 4.2.3 se muestra que las rectas tangentes a la gráfica a cualquier lado del origen se vuelven cada vez más pronunciadas cuando $x \to 0$. ■

FIGURA 4.2.3 Rectas tangentes a la gráfica de la función en el ejemplo 10

La gráfica de una función $f$ también puede tener una tangente vertical en un punto $(a, f(a))$ si $f$ es diferenciable sólo por un lado de $a$, es continua por la izquierda (derecha) en $a$, y se cumple $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^-$ o $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$.

## EJEMPLO 11 Tangente vertical por un lado

La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \infty)$ porque por la derivada $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ observamos que $f'_+(0)$ no existe. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre $[0, \infty)$ pero diferenciable sobre $(0, \infty)$. Además, debido a que $f$ es continua en 0 y $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty$, en el origen (0, 0) hay una tangente vertical. En la FIGURA 4.2.4 vemos que la tangente vertical es el eje $y$. ■

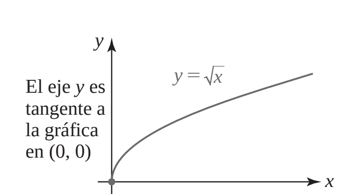



FIGURA 4.2.4 Tangente vertical en el ejemplo 11

Las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^{1/3}$ son continuas en todas partes. En particular, ambas son continuas en 0 pero ninguna es diferenciable en ese número. En otras palabras, la continuidad en un número $a$ no es suficiente para garantizar que una función sea diferenciable en $a$. No obstante, si $f$ es diferenciable en $a$, entonces $f$ debe ser continua en ese número. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Importante ▶

**Teorema 4.2.1** Diferenciabilidad implica continuidad

Si $f$ es diferenciable en un número $a$, entonces $f$ es continua en $a$.

**DEMOSTRACIÓN** Para demostrar la continuidad de $f$ en un número $a$, es suficiente demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ o bien, de manera equivalente, que $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = 0$. La hipótesis es que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Si se hace $x = a + h$, entonces cuando $h \to 0$ tenemos $x \to a$. Por tanto, el límite anterior equivale a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Luego, puede escribirse

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) && \leftarrow \text{multiplicación por } \frac{x-a}{x-a} = 1\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) && \leftarrow \text{ambos límites existen}\\ &= f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

■

**Posdata: Un poco de historia** Se sabe que **Isaac Newton** (1642-1727), matemático y físico inglés, fue el primero en establecer muchos de los principios básicos del cálculo en manuscritos no publicados sobre el *método de fluxiones*, fechado en 1665. La palabra *fluxión* se originó por el concepto de cantidades que "fluyen"; es decir, cantidades que cambian a cierta razón. Newton usó la notación de punto $\dot{y}$ para representar una fluxión, o como se conoce ahora: la derivada de una función. El símbolo $\dot{y}$ nunca fue popular entre los matemáticos, de modo que en la actualidad lo usan esencialmente los físicos. Debido a razones tipográficas, la así denominada "notación flyspeck" ha sido sustituida por la notación prima. Newton alcanzó fama imperecedera con la publicación de su ley de la gravitación universal en su tratado monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Newton también fue el primero en demostrar, usando el cálculo y su ley de gravitación, las tres leyes empíricas de Johannes Kepler del movimiento planetario, y el primero en demostrar que la luz blanca está compuesta de todos los colores. Newton fue electo al Parlamento, nombrado guardián de la Real Casa de Moneda y nombrado caballero en 1705. Sir Isaac Newton dijo acerca de estos logros: "Si he visto más lejos que otros, es porque me apoyé en los hombros de gigantes."

Newton

El matemático, abogado y filósofo alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) publicó una versión corta de su cálculo en un artículo en un periódico alemán en 1684. La notación $dy/dx$ para la derivada de una función se debe a Leibniz. De hecho, fue Leibniz quien introdujo la palabra *función* en la literatura matemática. Pero, puesto que es bien sabido que los manuscritos de Newton sobre el *método de fluxiones* datan de 1665, Leibniz fue acusado de apropiarse de las ideas de Newton a partir de esta obra no publicada. Alimentado por orgullos nacionalistas, durante muchos años hubo una controversia sobre quién de los dos "inventó" el cálculo. Hoy los historiadores coinciden en que ambos llegaron a muchas de las premisas más importantes del cálculo de manera independiente. Leibniz y Newton se consideran "coinventores" del tema.

Leibniz

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

*i*) En el análisis precedente vimos que la derivada de una función es en sí misma una función que proporciona la pendiente de una recta tangente. La derivada *no es*, sin embargo, una ecuación de una recta tangente. También, afirmar que $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ es una ecuación de la tangente en $(x_0, y_0)$ es incorrecto. Recuerde que $f'(x)$ debe evaluarse en $x_0$ *antes* de usarla en la forma punto-pendiente. Si $f$ es diferenciable en $x_0$, entonces una ecuación de la recta tangente en $(x_0, y_0)$ es $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

*ii*) Aunque en esta sección se han recalcado las pendientes, no olvide el análisis sobre razones de cambio promedio y razones de cambio instantáneas en la sección 4.1. La derivada $f'(x)$ también es la **razón de cambio instantánea** de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable $x$. En las secciones que siguen se dirá más sobre estas razones.

*iii*) Los matemáticos de los siglos XVII al XIX creían que una función continua solía tener una derivada. (En esta sección hemos observado excepciones.) En 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass destruyó de manera contundente este principio al publicar un ejemplo de función que es *continua en todas partes pero no es diferenciable en ninguna*.

## 4.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

### Fundamentos

En los problemas 1-20, use (2) de la definición 4.2.1 para encontrar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 10$
2. $f(x) = x - 1$
3. $f(x) = -3x + 5$
4. $f(x) = \pi x$
5. $f(x) = 3x^2$
6. $f(x) = -x^2 + 1$
7. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 7$
9. $y = (x + 1)^2$
10. $f(x) = (2x - 5)^2$
11. $f(x) = x^3 + x$
12. $f(x) = 2x^3 + x^2$
13. $y = -x^3 + 15x^2 - x$
14. $y = 3x^4$
15. $y = \dfrac{2}{x + 1}$
16. $y = \dfrac{x}{x - 1}$
17. $y = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
20. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

En los problemas 21-24, use (2) de la definición 4.2.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor indicado de $x$.

21. $f(x) = 4x^2 + 7x; \quad x = -1$
22. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4; \quad x = 0$
23. $y = x - \dfrac{1}{x}; \quad x = 1$
24. $y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x}; \quad x = 2$

En los problemas 25-28, use (2) de la definición 4.2.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
26. $f(x) = x(x - 5)$
27. $f(x) = x^3 - 3x$
28. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

En los problemas 29-32, use (2) de la definición 4.2.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es paralela a la recta dada.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1; \quad 3x - y = 1$
30. $f(x) = x^2 - x; \quad -2x + y = 0$
31. $f(x) = -x^3 + 4; \quad 12x + y = 4$
32. $f(x) = 6\sqrt{x} + 2; \quad -x + y = 2$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función dada no es diferenciable en el valor indicado de $x$.

33. $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}; \quad x = 2$
34. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}; \quad x = 0$

En la demostración del teorema 4.2.1 vimos que un planteamiento alterno de la derivada de una función $f$ en $a$ está dado por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{6}$$

siempre que el límite exista. En los problemas 35-40, use (6) para calcular $f'(a)$.

35. $f(x) = 10x^2 - 3$
36. $f(x) = x^2 - 3x - 1$
37. $f(x) = x^3 - 4x^2$
38. $f(x) = x^4$
39. $f(x) = \dfrac{4}{3 - x}$
40. $f(x) = \sqrt{x}$
41. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en la FIGURA 4.2.5. ¿Cuáles son los valores $f(-3)$ y $f'(-3)$?

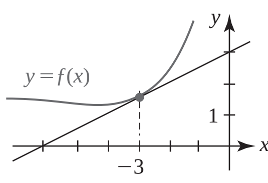



FIGURA 4.2.5 Gráfica del problema 41

**42.** Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en la FIGURA 4.2.6. ¿Cuál es el valor de $f'(3)$? ¿Cuál es la intersección de la recta tangente con el eje $y$?

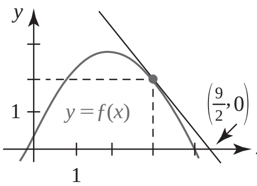



FIGURA 4.2.6 Gráfica del problema 42

En los problemas 43-48, trace la gráfica de $f'$ a partir de la gráfica de $f$.

**43.**

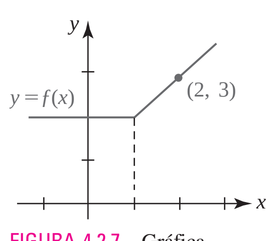



FIGURA 4.2.7 Gráfica del problema 43

**44.**

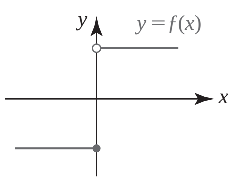



FIGURA 4.2.8 Gráfica del problema 44

**45.**

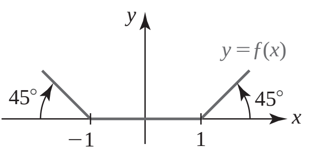



FIGURA 4.2.9 Gráfica del problema 45

**46.**

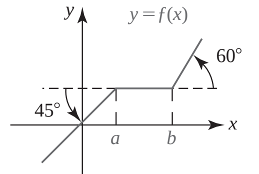



FIGURA 4.2.10 Gráfica del problema 46

**47.**

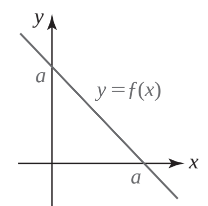



FIGURA 4.2.11 Gráfica del problema 47

**48.**

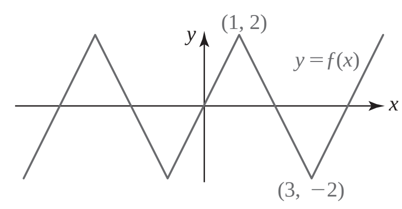
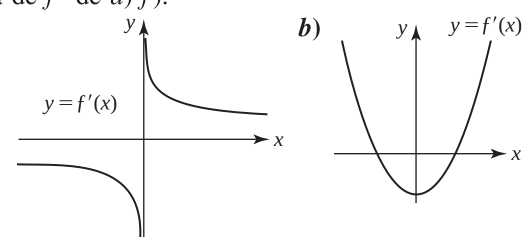
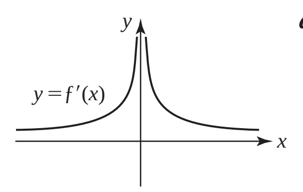
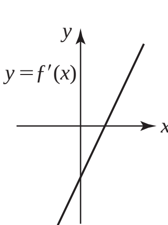


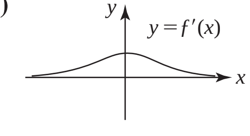

FIGURA 4.2.12 Gráfica del problema 48

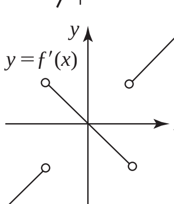
En los problemas 49-54, relacione la gráfica de $f$ con una gráfica de $f'$ de *a*)-*f*).




**49.**

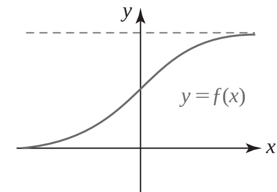
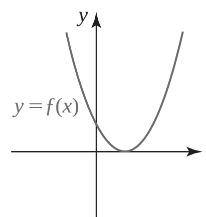



FIGURA 4.2.13 Gráfica del problema 49

**50.**



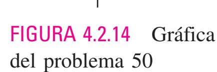


FIGURA 4.2.14 Gráfica del problema 50

**51.**

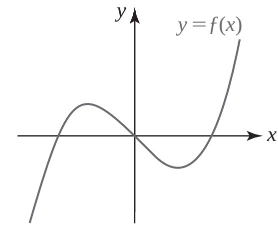



FIGURA 4.2.15 Gráfica del problema 51

**52.**

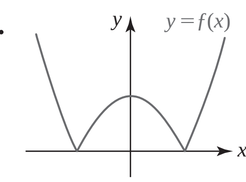



FIGURA 4.2.16 Gráfica del problema 52

**53.**

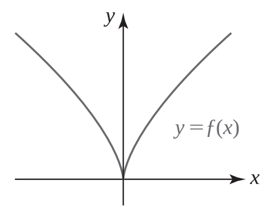



FIGURA 4.2.17 Gráfica del problema 53

**54.**

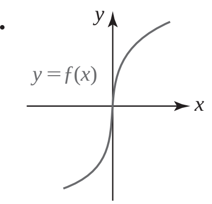



FIGURA 4.2.18 Gráfica del problema 54

## ≡ Piense en ello

**55.** Use la definición alterna de la derivada (6) para encontrar la derivada de $f(x) = x^{1/3}$.

[*Sugerencia*: Observe que $x - a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$.]

**56.** En los ejemplos 10 y 11 vimos, respectivamente, que las funciones $f(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = \sqrt{x}$ tenían tangentes verticales en el origen (0, 0). Conjeture dónde las gráficas de $y = (x - 4)^{1/3}$ y $y = \sqrt{x + 2}$ pueden tener tangentes verticales.

**57.** Suponga que $f$ es diferenciable en todas partes y que tiene tres propiedades:
*i*) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, *ii*) $f(0) = 1$,
*iii*) $f'(0) = 1$.

Use (2) de la definición 4.2.1 para demostrar que $f'(x) = f(x)$ para toda $x$.

**58.** ***a***) Suponga que $f$ es una función par diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = -f'(x)$; es decir, que $f'$ es una función impar.

***b***) Suponga que $f$ es una función impar diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = f'(x)$; es decir, que $f'$ es una función par.

**59.** Suponga que $f$ es una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Experimente con gráficas para decidir si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: hay un número $c$ en $(a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

**60.** Trace gráficas de varias funciones $f$ que tengan la propiedad $f'(x) > 0$ para toda $x$ en $[a, b]$. ¿Qué tienen en común éstas?

### ≡ Problemas con calculadora/SAC

**61.** Considere la función $f(x) = x^n + |x|$, donde $n$ es un entero positivo. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Luego use (2) para demostrar que $f$ no es diferenciable en $x = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Puede demostrar esto para *cualquier* entero positivo $n$? ¿Cuáles son $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para $n > 1$?

# 4.3 Derivada de potencias y sumas

**Introducción** La definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

tiene la desventaja evidente de ser más bien molesta y cansada de aplicar. Para encontrar la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ usando la definición anterior *sólo* es necesario hacer malabares con 137 términos en los desarrollos del binomio de $(x + h)^{100}$ y $(x + h)^{35}$. Hay formas más eficaces para calcular derivadas de una función que usar la definición cada vez. En esta sección, y en las secciones que siguen, veremos que hay algunos atajos o **reglas** generales a partir de las cuales es posible obtener las derivadas de funciones como $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ literalmente, con un truco de pluma.

En la última sección vimos que las derivadas de las funciones potencia

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

eran, a su vez,

Vea los ejemplos 3, 5 y 6 en la sección 4.2.

$$f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Si los miembros derechos de estas cuatro derivadas se escriben

$$2 \cdot x^{2-1}, \quad 3 \cdot x^{3-1}, \quad (-1) \cdot x^{-1-1}, \quad \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1},$$

observamos que cada coeficiente corresponde al exponente original de $x$ en $f$ y que el nuevo exponente de $x$ en $f'$ puede obtenerse a partir del exponente anterior al restarle 1. En otras palabras, el patrón para la derivada de la función potencia general $f(x) = x^n$ es

el exponente se escribe como múltiplo

$$(\;)x^{(\;)-1}. \tag{2}$$

el exponente disminuye por uno

**Derivada de la función potencia** En efecto, el patrón ilustrado en (2) se cumple para cualquier exponente que sea un número real $n$, y este hecho se planteará como un teorema formal, pero en este momento del curso no se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias para demostrar su validez completa. Sin embargo, es posible demostrar un caso especial de esta regla de potencias; las partes restantes de la demostración se proporcionarán en las secciones idóneas más adelante.

**Teorema 4.3.1** Regla de potencias

Para cualquier número real $n$,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{3}$$

**DEMOSTRACIÓN** La demostración sólo se presenta para el caso donde $n$ es un entero positivo. A fin de calcular (1) para $f(x) = x^n$ usamos el método de cuatro pasos:

$$i)\quad f(x+h) = (x+h)^n = \overbrace{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}^{\text{Teorema general del binomio}}$$

◀ Vea las *Páginas de recursos* para un repaso del teorema del binomio.

$$ii)\quad f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$= h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$iii)\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$iv)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{estos términos } \to 0 \text{ cuando } h\to 0}\right] = nx^{n-1}.$$

■

**EJEMPLO 1** Regla de potencias

Diferencie

***a***) $y = x^7$ ***b***) $y = x$ ***c***) $y = x^{-2/3}$ ***d***) $y = x^{\sqrt{2}}$.

**Solución** Por la regla de potencias (3),

***a***) con $n = 7$: $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$,

***b***) con $n = 1$: $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

***c***) con $n = -\frac{2}{3}$: $\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2}{3}\right)x^{(-2/3)-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3x^{5/3}}$,

***d***) con $n = \sqrt{2}$: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

■

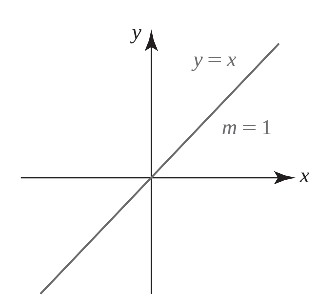



FIGURA 4.3.1 La pendiente de la recta $m = 1$ es consistente con $dy/dx = 1$

Observe en el inciso $b$) del ejemplo 1 que el resultado es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$. Vea la FIGURA 4.3.1.

**Teorema 4.3.2** Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. (4)

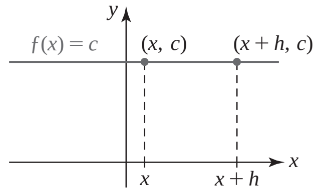



FIGURA 4.3.2 La pendiente de una recta horizontal es 0

**DEMOSTRACIÓN** Si $f(x) = c$, donde $c$ es cualquier número real, entonces se concluye que la diferencia es $f(x + h) - f(x) = c - c = 0$. Así, por (1),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$ ■

El teorema 4.3.2 tiene una interpretación geométrica evidente. Como se muestra en la FIGURA 4.3.2, la pendiente de la recta horizontal $y = c$ es, por supuesto, cero. Además, el teorema 4.3.2 coincide con (3) en el caso donde $x \neq 0$ y $n = 0$.

**Teorema 4.3.3** Regla de la multiplicación por constante

Si $c$ es cualquier constante y $f$ es diferenciable en $x$, entonces $cf$ es diferenciable en $x$, y

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x). \tag{5}$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea $G(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$ ■

**EJEMPLO 2** Un múltiplo constante

Diferencie $y = 5x^4$.

**Solución** Por (3) y (5),

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}x^4 = 5(4x^3) = 20x^3.$$ ■

**Teorema 4.3.4** Reglas de suma y diferencia

Si $f$ y $g$ son diferenciables en $x$, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables en $x$, y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \tag{7}$$

**DEMOSTRACIÓN DE (6)** Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h} \quad \leftarrow \text{reordenando términos} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$ ■

puesto que los límites existen, el límite de una suma es la suma de los límites →

El teorema 4.3.4 se cumple para cualquier suma finita de diferenciables. Por ejemplo, si $f$, $g$ y $h$ son diferenciables en $x$, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x).$$

Ya que $f - g$ puede escribirse como una suma, $f + (-g)$, no es necesario demostrar (7) puesto que el resultado se concluye de (6) y (5). Por tanto, el teorema 4.3.4 puede plantearse coloquialmente como:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

**Derivada de un polinomio** Dado que sabemos cómo diferenciar potencias de $x$ y múltiplos constantes de esas potencias, resulta fácil diferenciar sumas de estos múltiplos constantes. La derivada de una función polinomial es particularmente fácil de obtener. Por ejemplo, ahora vemos fácilmente que la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$, mencionada en la introducción de esta sección, es $f'(x) = 600x^{99} + 140x^{34}$.

**EJEMPLO 3** Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6$.

**Solución** Al usar (3), (5) y (6) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4 + 9\frac{d}{dx}x^3 + 10\frac{d}{dx}x^2 - 13\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ por (4), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0 \\ &= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13.\end{aligned}$$

■

**EJEMPLO 4** Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

**Solución** Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las $f$ y $f'$ se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$f(-1) = 8$ ← el punto de tangencia es $(-1, 8)$

$f'(-1) = -13.$ ← la pendiente de la tangente en $(-1, 8)$ es $-13$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \quad \text{o bien,} \quad y = -13x - 5.$$

■

**Volver a escribir una función** En algunas circunstancias, para aplicar una regla de diferenciación de manera eficiente puede ser necesario *volver a escribir* una expresión en una forma alterna. Esta forma alterna a menudo es resultado de algo de manipulación algebraica o una aplicación de las leyes de los exponentes. Por ejemplo, es posible usar (3) para diferenciar las siguientes expresiones, que primero reescribimos usando las leyes de los exponentes

◀ Vale la pena recordar este análisis.

$\frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x^3}$ → las raíces cuadradas se vuelven a escribir como potencias → $\frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{x^{1/2}}, \quad (x^3)^{1/2},$

luego se vuelve a escribir usando exponentes negativos → $4x^{-2}, \quad 10x^{-1/2}, \quad x^{3/2},$

la derivada de cada término usando (3) → $-8x^{-3}, \quad -5x^{-3/2}, \quad \frac{3}{2}x^{1/2}$.

Una función como $f(x) = (5x + 2)/x^2$ puede escribirse de nuevo como dos fracciones

$$f(x) = \frac{5x + 2}{x^2} = \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 5x^{-1} + 2x^{-2}.$$

Por la última forma de $f$, ahora resulta evidente que la derivada $f'$ es

$$f'(x) = 5(-x^{-2}) + 2(-2x^{-3}) = -\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}.$$

## EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \frac{8}{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10.$

**Solución** Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de $x$:

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,
$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^{1/2} + 8\frac{d}{dx}x^{-1} - 6\frac{d}{dx}x^{-1/3} + \frac{d}{dx}10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 8 \cdot (-1)x^{-2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}.$$

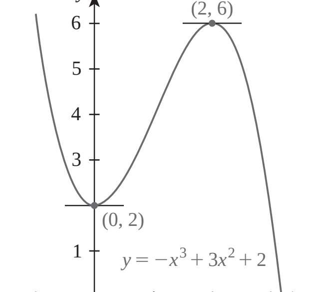


FIGURA 4.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

## EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

**Solución** En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de $f$ donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de $f$ es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x - 2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 4.3.3.

**Recta normal** Una **recta normal** en un punto $P$ sobre una gráfica es una recta perpendicular a la recta tangente en $P$.

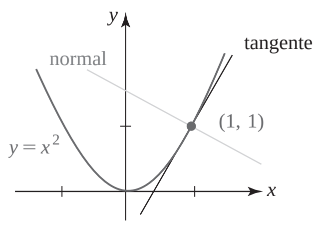


FIGURA 4.3.4 Recta normal en el ejemplo 7

## EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

**Solución** Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en la FIGURA 4.3.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

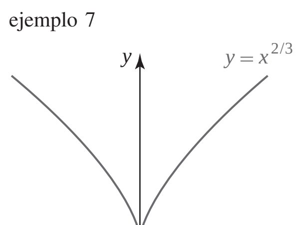


FIGURA 4.3.5 Gráfica de la función en el ejemplo 8

## EJEMPLO 8 Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ mientras $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Puesto que $f$ es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, concluimos que el eje $y$ es una tangente vertical en $(0, 0)$. Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA 4.3.5.

**Cúspide** Se dice que la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ en el ejemplo 8 tiene una **cúspide** en el origen. En general, la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una cúspide en un punto $(a, f(a))$ si $f$ es continua en $a$, $f'(x)$ tiene signos opuestos a cualquier lado de $a$, y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a$.

**Derivadas de orden superior** Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación $d/dx$, la segunda derivada con respecto a $x$ la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad D^2, \quad D_x^2.$$

## EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \dfrac{1}{x^3}$.

**Solución** Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}.$$

Si se supone que todas las derivadas existen, es posible diferenciar una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada; la **cuarta derivada** es la derivada de la tercera derivada, y así sucesivamente. Las derivadas tercera y cuarta se denotan por $d^3y/dx^3$ y $d^4y/dx^4$, y se definen como

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

En general, si $n$ es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima derivada** se define como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Otras notaciones para las primeras derivadas $n$ son

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x),$$
$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad \ldots, \quad y^{(n)},$$
$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad \frac{d^3}{dx^3}f(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}f(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^n}{dx^n}f(x),$$
$$D, \quad D^2, \quad D^3, \quad D^4, \quad \ldots, \quad D^n,$$
$$D_x, \quad D_x^2, \quad D_x^3, \quad D_x^4, \quad \ldots, \quad D_x^n.$$

Observe que la notación "prima" se usa para denotar sólo las tres primeras derivadas; después de eso se usa el supraíndice $y^{(4)}, y^{(5)}$, y así sucesivamente. El **valor de la *n*-ésima derivada** de una función $y = f(x)$ en un número $a$ se denota por

$$f^{(n)}(a), \quad y^{(n)}(a) \quad \text{y} \quad \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=a}.$$

**EJEMPLO 10** Quinta derivada

Encuentre las cinco primeras derivadas de $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$.

**Solución** Tenemos

$$f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5$$
$$f''(x) = 24x^2 - 36x + 14$$
$$f'''(x) = 48x - 36$$
$$f^{(4)}(x) = 48$$
$$f^{(5)}(x) = 0.$$

Después de reflexionar un momento, usted debe convencerse que al derivar la $(n + 1)$ veces una función polinomial de grado $n$ el resultado es cero.

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

*i)* En los diversos contextos de ciencias, ingeniería y negocios, las funciones a menudo se expresan en otras variables distintas a $x$ y $y$. De manera correspondiente, la notación de la derivada debe adaptarse a los nuevos símbolos. Por ejemplo,

| *Función* | *Derivada* |
|---|---|
| $v(t) = 32t$ | $v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$ |
| $A(r) = \pi r^2$ | $A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$ |
| $r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$ | $r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = 8\theta - 3$ |
| $D(p) = 800 - 129p + p^2$ | $D'(p) = \frac{dD}{dp} = -129 + 2p.$ |

*ii)* Quizá se pregunte qué interpretación puede darse a las derivadas de orden superior. Si piensa en términos de gráficas, entonces $f''$ proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f'$; $f'''$ proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f''$, y así sucesivamente. Además, si $f$ es diferenciable, entonces la primera derivada $f'$ proporciona la razón de cambio instantánea de $f$. En forma semejante, si $f'$ es diferenciable, entonces $f''$ proporciona la razón de cambio instantánea de $f'$.

## 4.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

### Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre $dy/dx$.

**1.** $y = -18$

**2.** $y = \pi^6$

**3.** $y = x^9$

**4.** $y = 4x^{12}$

**5.** $y = 7x^2 - 4x$

**6.** $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

**7.** $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$

**8.** $y = \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

En los problemas 9-16, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

**9.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$

**10.** $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

**11.** $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$

**12.** $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{x^2}$

**13.** $f(x) = x^2(x^2 + 5)^2$ **14.** $f(x) = (x^3 + x^2)^3$

**15.** $f(x) = (4\sqrt{x} + 1)^2$ **16.** $f(x) = (9 + x)(9 - x)$

En los problemas 17-20, encuentre la derivada de la función dada.

**17.** $h(u) = (4u)^3$ **18.** $p(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$

**19.** $g(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}$ **20.** $Q(t) = \frac{t^5 + 4t^2 - 3}{6}$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**21.** $y = 2x^3 - 1;\ x = -1$ **22.** $y = -x + \frac{8}{x};\ x = 2$

**23.** $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x};\ x = 4$ **24.** $f(x) = -x^3 + 6x^2;\ x = 1$

En los problemas 25-28, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

**25.** $y = x^2 - 8x + 5$ **26.** $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

**27.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ **28.** $f(x) = x^4 - 4x^3$

En los problemas 29-32, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**29.** $y = -x^2 + 1;\ x = 2$ **30.** $y = x^3;\ x = 1$

**31.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2;\ x = 4$ **32.** $f(x) = x^4 - x;\ x = -1$

En los problemas 33-38, encuentre la segunda derivada de la función dada.

**33.** $y = -x^2 + 3x - 7$ **34.** $y = 15x^2 - 24\sqrt{x}$

**35.** $y = (-4x + 9)^2$ **36.** $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$

**37.** $f(x) = 10x^{-2}$ **38.** $f(x) = x + \left(\frac{2}{x^2}\right)^3$

En los problemas 39 y 40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

**39.** $f(x) = 4x^6 + x^5 - x^3;\quad f^{(4)}(x)$

**40.** $y = x^4 - \frac{10}{x};\quad d^5y/dx^5$

En los problemas 41 y 42, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

**41.** $f(x) = x^2 + 8x - 4$ **42.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

En los problemas 43 y 44, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de $f$ donde $f''(x) = 0$.

**43.** $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$ **44.** $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los problemas 45 y 46, determine intervalos para los cuales $f''(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f''(x) < 0$.

**45.** $f(x) = (x - 1)^3$ **46.** $f(x) = x^3 + x^2$

Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina **ecuación diferencial**. En los problemas 47 y 48, demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

**47.** $y = x^{-1} + x^4;\quad x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

**48.** $y = x + x^3 + 4;\quad x^2y'' - 3xy' + 3y = 12$

**49.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ donde la pendiente de la recta tangente es 5.

**50.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y - 4 = 0$.

**51.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la pendiente de la recta normal es 2.

**52.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

**53.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto donde el valor de la segunda derivada es cero.

**54.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto donde el valor de la tercera derivada es 12.

## ≡ Aplicaciones

**55.** El volumen $V$ de una esfera de radio $r$ es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial $S$ de la esfera si $S$ es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.

**56.** Según el físico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869), la velocidad $v$ del flujo sanguíneo en una arteria cuya sección transversal circular es constante de radio $R$ es $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde $P$, $\nu$ y $l$ son constantes. ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en el valor de $r$ para el cual $v'(r) = 0$?

**57.** La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de $x$ unidades es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde $k$ es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Encuentre la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y la cantidad de estiramiento es $\frac{1}{2}$ m.

**58.** La altura $s$ por arriba del nivel del suelo de un proyectil en el instante $t$ está dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde $g$, $v_0$ y $s_0$ son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de $s$ con respecto a $t$ en $t = 4$.

## ≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, el símbolo $n$ representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

**59.** $\frac{d^n}{dx^n}x^n$ **60.** $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x}$

**61.** A partir de las gráficas de $f$ y $g$ en la FIGURA 4.3.6, determine qué función es la derivada de la otra. Explique verbalmente su decisión.

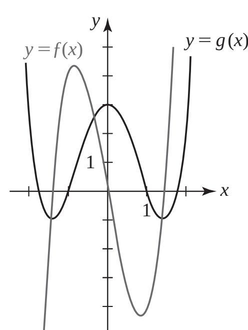



FIGURA 4.3.6 Gráficas para el problema 61

**62.** A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 4.3.7, trace la gráfica de $f'$.

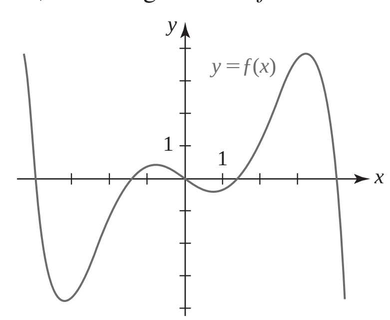



FIGURA 4.3.7 Gráfica para el problema 62

**63.** Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.

**64.** Se dice que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ son ortogonales.

**65.** Encuentre los valores de $b$ y $c$ de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.

**66.** Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y es (son) tangente(s) a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

**67.** Encuentre los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en $x$ $(-3, 0)$.

**68.** Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ tal que la recta tangente interseque al eje $y$ en $(0, -2)$.

**69.** Explique por qué la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ no tiene recta tangente con pendiente $-1$.

**70.** Encuentre coeficientes $A$ y $B$ de modo que la función $y = Ax^2 + Bx$ satisfaga la ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.

**71.** Encuentre valores de $a$ y $b$ tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea $-5$.

**72.** Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de $f(x) = x^2$ que pasan por el punto $(2, 4)$. [*Sugerencia*: Elabore una figura y observe que *en* $(2, 4)$ sólo hay una recta normal.]

**73.** Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ y un punto sobre la gráfica de $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ donde las rectas tangentes son paralelas.

**74.** Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$ donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.

**75.** Encuentre las condiciones sobre los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.

**76.** Sea $f$ una función diferenciable. Si $f'(x) > 0$ para toda $x$ en el intervalo $(a, b)$, trace gráficas posibles de $f$ sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de $f$ sobre el intervalo. Repita si $f'(x) < 0$ para toda $x$ en el intervalo $(a, b)$.

**77.** Suponga que $f$ es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Encuentre $f^{(100)}(x)$.

**78.** Las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 3$ dada por la FIGURA 4.3.8 muestran que hay dos rectas $L_1$ y $L_2$ que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

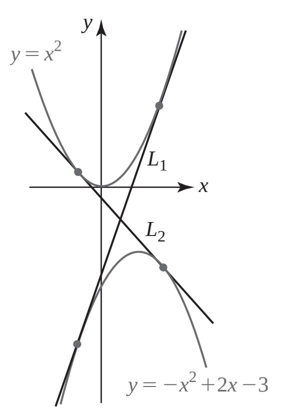



FIGURA 4.3.8 Gráficas para el problema 78

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

**79.** ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$.

***b***) Evalúe $f''(x)$ en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$.

***c***) A partir de los datos del inciso *b*), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de $f$ y los signos algebraicos de $f''$?

**80.** Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre $f'(x)$ para todos los puntos donde $f$ es diferenciable.

***a***) $f(x) = |x^2 - 2x|$  ***b***) $f(x) = |x^3 - 1|$

# 4.4 Derivada de productos y cocientes

**Introducción** Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de $x$ son, a su vez:

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{1}$$

También sabemos que para funciones diferenciables $f$ y $g$:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x). \tag{2}$$

Aunque los resultados en (1) y (2) nos permiten diferenciar rápidamente funciones algebraicas (como polinomios), ni (1) ni (2) constituyen una ayuda inmediata para encontrar la derivada de funciones como $y = x^4\sqrt{x^2+4}$ o $y = x/(2x+1)$. Se requieren reglas adicionales para diferenciar productos $fg$ y cocientes $f/g$.

**Regla del producto** Las reglas de diferenciación y las derivadas de funciones surgen en última instancia de la definición de la derivada. La regla de la suma en (2), que se obtuvo en la sección precedente, se concluye de la definición y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites siempre que los límites existan. También sabemos que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Al razonar por analogía, parecería plausible que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas. Lamentablemente, la regla del producto que se presenta a continuación *no es* tan simple.

**Teorema 4.4.1** Regla del producto

Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables en $x$, entonces $fg$ es diferenciable en $x$, y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\overbrace{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}^{\text{cero}}-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Debido a que $f$ es diferenciable en $x$, es continua ahí y entonces $\lim_{h\to 0}f(x+h) = f(x)$. Además, $\lim_{h\to 0}g(x) = g(x)$. Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$ ■

La regla del producto se memoriza mejor en palabras:

- La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

**EJEMPLO 1** Regla del producto

Diferencie $y = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$.

**Solución** De la regla del producto (3),

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(x^3-2x^2+3)}^{\text{primera}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(7x^2-4x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(7x^2-4x)}^{\text{segunda}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3)}^{\text{derivada de la primera}}$$

$$= (x^3-2x^2+3)(14x-4) + (7x^2-4x)(3x^2-4x)$$

$$= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12.$$

**Solución alterna** Los dos términos en la función dada pueden multiplicarse para obtener un polinomio de quinto grado. Luego, la derivada puede obtenerse usando la regla de la suma. ■

## EJEMPLO 2 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$.

**Solución** Antes de tomar la derivada, $\sqrt{x}$ volvemos a escribirla como $x^{1/2}$. Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2})\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(1 + x^{1/2})\\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en $x = 4$ obtenemos:

$$y(4) = (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \tfrac{7}{2}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{7}{2}x - 8.$$ ■

Aunque (3) se ha planteado sólo para el producto de dos funciones, puede aplicarse a funciones con un mayor número de factores. La idea consiste en agrupar dos (o más) funciones y tratar este agrupamiento como una función. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

## EJEMPLO 3 Producto de tres funciones

Diferencie $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

**Solución** Los dos primeros factores se identifican como la "primera función":

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{primera}}\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3 - 8x)}^{\text{segunda}}\overbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \overbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 - x) \cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}}\\ &= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (x^3 - 8x)(16x^2 - 1) + 4(x^3 - 8x)(2x^2 - x).\end{aligned}$$ ■

**Regla del cociente** A continuación se presenta la derivada del cociente de dos funciones $f$ y $g$.

**Teorema 4.4.2** Regla del cociente

Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables en $x$ y $g(x) \neq 0$, entonces $f/g$ es diferenciable en $x$, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{4}$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)\overbrace{-\,g(x)f(x)+g(x)f(x)}^{\text{cero}}-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)\cdot\lim\limits_{h\to 0}g(x)}.$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$ ■

En palabras, la regla del cociente empieza con el denominador:

- El denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

## EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{3x^2-1}{2x^3+5x^2+7}$.

**Solución** Por la regla del cociente (4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{(2x^3+5x^2+7)}^{\text{denominador}}\cdot\overbrace{\dfrac{d}{dx}(3x^2-1)}^{\text{derivada del numerador}}-\overbrace{(3x^2-1)}^{\text{numerador}}\cdot\overbrace{\dfrac{d}{dx}(2x^3+5x^2+7)}^{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2x^3+5x^2+7)^2}_{\text{cuadrado del denominador}}}$$

$$= \frac{(2x^3+5x^2+7)\cdot 6x-(3x^2-1)\cdot(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2+7)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{-6x^4+6x^2+52x}{(2x^3+5x^2+7)^2}.$$ ■

## EJEMPLO 5 Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = \dfrac{(x^2+1)(2x^2+1)}{3x^2+1}$ donde la recta tangente es horizontal.

**Solución** Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:

Regla del producto aquí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}\overbrace{[(x^2+1)(2x^2+1)]} - (x^2+1)(2x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)[(x^2+1)4x + (2x^2+1)2x] - (x^2+1)(2x^2+1)6x}{(3x^2+1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{12x^5+8x^3}{(3x^2+1)^2}.$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse $dy/dx = 0$. La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

Por supuesto, los valores de $x$ que hacen cero al numerador *no* deben hacer simultáneamente cero al denominador.

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad x^3(12x^2+8) = 0. \tag{5}$$

En (5), debido a que $12x^2 + 8 \neq 0$ para todos los números reales $x$, debe tenerse $x = 0$. Al sustituir este número en la función obtenemos $y(0) = 1$. La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje $y$, el punto $(0, 1)$. ■

**Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Recuerde que en la sección 4.3 establecimos que la regla de potencias, $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, es válida para todos los números reales exponentes $n$. Ahora ya nos es posible demostrar la regla cuando el exponente es un entero negativo $-m$. Puesto que, por definición $x^{-m} = 1/x^m$, donde $m$ es un entero positivo, la derivada de $x^{-m}$ puede obtenerse por medio de la regla del cociente y las leyes de los exponentes:

se restan los exponentes ↓

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m\cdot\frac{d}{dx}1 - 1\cdot\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

*i*) Las reglas del producto y del cociente suelen conducir a expresiones que demandan simplificación. Si su respuesta a un problema no se parece a la que se proporciona en la sección de respuestas del texto, quizá no ha realizado suficientes simplificaciones. No quede contento con sólo llevar a cabo las partes mecánicas de las diversas reglas de diferenciación; siempre resulta una buena idea poner en práctica sus habilidades algebraicas.

*ii*) Algunas veces, la regla del cociente se usa cuando no es necesario. Aunque es posible usar esta regla para diferenciar funciones como

$$y = \frac{x^5}{6} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{10}{x^3},$$

es más simple (y rápido) volver a escribir las funciones como $y = \frac{1}{6}x^5$ y $y = 10x^{-3}$, y luego usar las reglas del múltiplo constante y de potencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d}{dx}x^5 = \frac{5}{6}x^4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 10\frac{d}{dx}x^{-3} = -30x^{-4}.$$

## 4.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

### Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre $dy/dx$.

**1.** $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

**2.** $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$

**3.** $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)$

**4.** $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

**5.** $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$  **6.** $y = \dfrac{5}{4x - 3}$

**7.** $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$  **8.** $y = \dfrac{2 - 3x}{7 - x}$

**9.** $y = (6x - 1)^2$  **10.** $y = (x^4 + 5x)^2$

En los problemas 11-20, encuentre $f'(x)$.

**11.** $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)(x^3 - 5x - 1)$

**12.** $f(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 10x + \dfrac{2}{x^2}\right)$

**13.** $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + x + 1}$  **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 2}{x(x^2 - 1)}$

**15.** $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

**16.** $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)(3x^4 + 2x - 1)$

**17.** $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2}$  **18.** $f(x) = \dfrac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$

**19.** $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\left(\dfrac{x + 1}{x + 3}\right)$

**20.** $f(x) = (x + 1)\left(x + 1 - \dfrac{1}{x + 2}\right)$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**21.** $y = \dfrac{x}{x - 1}$; $x = \dfrac{1}{2}$  **22.** $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$; $x = 2$

**23.** $y = (2\sqrt{x} + x)(-2x^2 + 5x - 1)$; $x = 1$

**24.** $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3)$; $x = 0$

En los problemas 25-28, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

**25.** $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$  **26.** $y = x(x - 1)^2$

**27.** $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$  **28.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la pendiente indicada.

**29.** $y = \dfrac{x + 3}{x + 1}$; $m = -\dfrac{1}{8}$

**30.** $y = (x + 1)(2x + 5)$; $m = -3$

En los problemas 31 y 32, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la propiedad indicada.

**31.** $y = \dfrac{x + 4}{x + 5}$; perpendicular a $y = -x$

**32.** $y = \dfrac{x}{x + 1}$; paralela a $y = \dfrac{1}{4}x - 1$

**33.** Encuentre el valor de $k$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (k + x)/x^2$ tiene pendiente 5 en $x = 2$.

**34.** Demuestre que la tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 + 14)/(x^2 + 9)$ en $x = 1$ es perpendicular a la tangente de la gráfica de $g(x) = (1 + x^2)(1 + 2x)$ en $x = 1$.

En los problemas 35-40, $f$ y $g$ son funciones diferenciables. Encuentre $F'(1)$ si $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ y $g(1) = 6$, $g'(1) = 2$.

**35.** $F(x) = 2f(x)g(x)$  **36.** $F(x) = x^2 f(x)g(x)$

**37.** $F(x) = \dfrac{2g(x)}{3f(x)}$  **38.** $F(x) = \dfrac{1 + 2f(x)}{x - g(x)}$

**39.** $F(x) = \left(\dfrac{4}{x} + f(x)\right)g(x)$  **40.** $F(x) = \dfrac{xf(x)}{g(x)}$

**41.** Suponga que $F(x) = \sqrt{x}\, f(x)$, donde $f$ es una función diferenciable. Encuentre $F''(4)$ si $f(4) = -16$, $f'(4) = 2$ y $f''(4) = 3$.

**42.** Suponga que $F(x) = xf(x) + xg(x)$, donde $f$ y $g$ son funciones diferenciables. Encuentre $F''(0)$ si $f'(0) = -1$ y $g'(0) = 6$.

**43.** Suponga que $F(x) = f(x)/x$, donde $f$ es una función diferenciable. Encuentre $F''(x)$.

**44.** Suponga que $F(x) = x^3 f(x)$, donde $f$ es una función diferenciable. Encuentre $F'''(x)$.

En los problemas 45-48, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

**45.** $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 2x}$  **46.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

**47.** $f(x) = (-2x + 6)(4x + 7)$

**48.** $f(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x + 4)$

## ≡ Aplicaciones

**49.** La ley de gravitación universal establece que la fuerza $F$ entre dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ separados por una distancia $r$ es $F = km_1m_2/r^2$, donde $k$ es constante. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de $F$ con respecto a $r$ cuando $r = \frac{1}{2}$ km?

**50.** La energía potencial $U$ entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, donde $q_1$ y $q_2$ son constantes positivas y $x$ es la distancia entre los átomos. La fuerza entre los átomos se define como $F(x) = -U'(x)$. Demuestre que $F\left(\sqrt[6]{2q_1/q_2}\right) = 0$.

**51.** La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas ideal es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

donde $P$ es la presión, $V$ es el volumen por mol, $R$ es la constante universal de los gases, $T$ es la temperatura y $a$ y $b$ son constantes que dependen del gas. Encuentre $dP/dV$ en el caso donde $T$ es constante.

**52.** Para una lente convexa, la distancia focal $f$ está relacionada con la distancia al objeto $p$ y la distancia a la imagen $q$ por la **ecuación de la lente**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Encuentre la razón de cambio instantánea de $q$ con respecto a $p$ en el caso donde $f$ es constante. Explique el significado del signo negativo en su respuesta. ¿Qué ocurre a $q$ cuando $p$ crece?

## Piense en ello

**53.** ***a***) Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

***b***) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de $f$ tales que las rectas normales pasen por el origen.

**54.** Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable.

***a***) Encuentre $dy/dx$ para $y = [f(x)]^2$.

***b***) Encuentre $dy/dx$ para $y = [f(x)]^3$.

***c***) Conjeture una regla para encontrar la derivada de $y = [f(x)]^n$, donde $n$ es un entero positivo.

***d***) Use su conjetura en el inciso *c*) para encontrar la derivada de $y = (x^2 + 2x - 6)^{500}$.

**55.** Suponga que $y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' + P(x)y = 0$, donde $P$ es una función conocida. Demuestre que $y = u(x)y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y' + P(x)y = f(x)$$

siempre que $u(x)$ satisface $du/dx = f(x)/y_1(x)$.

# 4.5 Derivada de funciones trigonométricas

**Introducción** En esta sección desarrollaremos las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Una vez que se han encontrado las derivadas de sen $x$ y cos $x$ es posible determinar las derivadas de tan $x$, cot $x$, sec $x$ y csc $x$ usando la regla del cociente encontrada en la sección precedente. De inmediato veremos que la derivada de sen $x$ usa los dos siguientes resultados de límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{1}$$

que se encontraron en la sección 3.4.

**Derivadas del seno y coseno** Para encontrar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se usa la definición básica de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

y el proceso de cuatro pasos introducido en las secciones 4.1 y 4.2. En el primer paso usamos la fórmula de la suma para la función seno,

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2, \tag{3}$$

pero donde $x$ y $h$ desempeñan las partes de los símbolos $x_1$ y $x_2$.

*i*) $f(x + h) = \operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$ ← por (3)

*ii*) $f(x + h) - f(x) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x$ ← se factoriza sen $x$ de los términos primero y tercero

$= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h$

Como observamos en la línea siguiente, no es posible cancelar las $h$ en el cociente diferencial, aunque es posible volver a escribir la expresión para usar los resultados sobre límites en (1).

*iii*) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

*iv*) En esta línea, el símbolo $h$ desempeña la parte del símbolo $x$ en (1):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

A partir de los resultados sobre límites en (1), la última línea es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{4}$$

De manera semejante es posible demostrar que

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Vea el problema 50 en los ejercicios al final de esta sección.

**EJEMPLO 1** Ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 4\pi/3$.

**Solución** A partir de (4) la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$. Cuando éstas se evalúan en el mismo número $x = 4\pi/3$ obtenemos:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2}$$

A partir de la forma punto-pendiente de una recta, una ecuación de la recta tangente es

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente se muestra en la FIGURA 4.5.1. ■

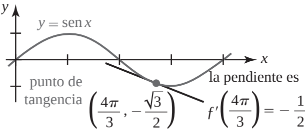



FIGURA 4.5.1 Recta tangente en el ejemplo 1

**Otras funciones trigonométricas** Los resultados en (4) y (5) pueden usarse junto con las reglas de diferenciación para encontrar las derivadas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para diferenciar $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ se usa la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{\text{esto es igual a 1}}}{\cos^2 x}.$$

Al usar la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el hecho de que $1/\cos^2 x = (1/\cos x)^2 = \sec^2 x$, la última ecuación se simplifica a

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x. \tag{6}$$

La fórmula de la derivada para la cotangente

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \tag{7}$$

se obtiene en forma análoga y se deja como ejercicio. Vea el problema 51 en la sección "Desarrolle su competencia 4.5".

Así, $\sec x = 1/\cos x$. En consecuencia, es posible usar otra vez la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}1 - 1\cdot\frac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}. \tag{8}$$

Al escribir $$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

podemos expresar (8) como

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x. \tag{9}$$

El resultado final también se concluye de inmediato a partir de la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{10}$$

Vea el problema 52 en la sección "Desarrolle su competencia 4.5".

## EJEMPLO 2 Regla del producto

Diferencie $y = x^2 \text{ sen } x$.

**Solución** La regla del producto junto con (4) da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}\text{sen}\, x + \text{sen}\, x \frac{d}{dx} x^2\\ &= x^2 \cos x + 2x \,\text{sen}\, x.\end{aligned}$$

■

## EJEMPLO 3 Regla del producto

Diferencie $y = \cos^2 x$.

**Solución** Una forma de diferenciar esta función es reconocerla como un producto: $y = (\cos x)(\cos x)$. Luego, por la regla del producto y (5),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos x \frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}\cos x\\ &= \cos x(-\text{sen}\, x) + (\cos x)(-\text{sen}\, x)\\ &= -2\,\text{sen}\, x \cos x.\end{aligned}$$

En la siguiente sección veremos que hay un procedimiento alterno para diferenciar una potencia de una función. ■

## EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{2 + \sec x}$.

**Solución** Por la regla del cociente, (4) y (9),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(2 + \sec x)\dfrac{d}{dx}\text{sen}\, x - \text{sen}\, x \dfrac{d}{dx}(2 + \sec x)}{(2 + \sec x)^2}\\ &= \frac{(2 + \sec x)\cos x - \text{sen}\, x\,(\sec x \tan x)}{(2 + \sec x)^2}\\ &= \frac{1 + 2\cos x - \tan^2 x}{(2 + \sec x)^2}.\end{aligned}$$

← $\sec x \cos x = 1$ y $\text{sen}\, x(\sec x \tan x) = \text{sen}^2 x/\cos^2 x$

■

## EJEMPLO 5 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \sec x$.

**Solución** Por (9), la primera derivada es

$$f'(x) = \sec x \tan x.$$

Para obtener la segunda derivada, ahora es necesario usar la regla del producto junto con (6) y (9):

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sec x \frac{d}{dx}\tan x + \tan x \frac{d}{dx}\sec x\\ &= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x)\\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x.\end{aligned}$$

■

Para referencia futura, a continuación se resumen las fórmulas de derivadas presentadas en esta sección.

**Teorema 4.5.1** Derivadas de funciones trigonométricas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas son

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{13}$$

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Cuando trabaje los problemas en la sección "Desarrolle su competencia 4.5", puede que no obtenga la misma respuesta que la proporcionada en la sección de respuestas al final del libro. Esto se debe a que hay muchas identidades trigonométricas cuyas respuestas pueden expresarse en una forma más breve. Por ejemplo, la respuesta en el ejemplo 3:

$$\frac{dy}{dx} = -2\operatorname{sen} x \cos x \quad \text{es la misma que} \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} 2x$$

por la fórmula del ángulo doble para la función seno. Intente resolver las diferencias entre su respuesta y la respuesta proporcionada.

## 4.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

### Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre $dy/dx$.

1. $y = x^2 - \cos x$
2. $y = 4x^3 + x + 5\operatorname{sen} x$
3. $y = 1 + 7\operatorname{sen} x - \tan x$
4. $y = 3\cos x - 5\cot x$
5. $y = x\operatorname{sen} x$
6. $y = \left(4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)\cos x$
7. $y = (x^3 - 2)\tan x$
8. $y = \cos x \cot x$
9. $y = (x^2 + \operatorname{sen} x)\sec x$
10. $y = \csc x \tan x$
11. $y = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
12. $y = x^3\cos x - x^3\operatorname{sen} x$

En los problemas 13-22, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

13. $f(x) = (\csc x)^{-1}$
14. $f(x) = \dfrac{2}{\cos x \cot x}$
15. $f(x) = \dfrac{\cot x}{x + 1}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{1 + \cos x}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$
18. $f(x) = \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{x}$
19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
20. $f(x) = \dfrac{1 + \csc x}{1 + \sec x}$
21. $f(x) = x^4\operatorname{sen} x \tan x$
22. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x\cos x}$

En los problemas 23-26, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

23. $f(x) = \cos x;\quad x = \pi/3$
24. $f(x) = \tan x;\quad x = \pi$
25. $f(x) = \sec x;\quad x = \pi/6$
26. $f(x) = \csc x;\quad x = \pi/2$

En los problemas 27-30, considere la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Encuentre las coordenadas $x$ del o de los puntos sobre la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

27. $f(x) = x + 2\cos x$
28. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$
29. $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$
30. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

31. $f(x) = \operatorname{sen} x;\quad x = 4\pi/3$
32. $f(x) = \tan^2 x;\quad x = \pi/4$
33. $f(x) = x\cos x;\quad x = \pi$
34. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen} x};\quad x = \pi/2$

En los problemas 35 y 36, use una identidad trigonométrica idónea para encontrar la derivada de la función dada.

35. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
36. $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2}$

En los problemas 37-42, encuentre la segunda derivada de la función dada.

37. $f(x) = x\operatorname{sen} x$
38. $f(x) = 3x - x^2\cos x$
39. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
40. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$
41. $y = \csc x$
42. $y = \tan x$

En los problemas 43 y 44, $C_1$ y $C_2$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

**43.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x; \quad y'' + y = \operatorname{sen} x$

**44.** $y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}; \quad x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$

## ≡ Aplicaciones

**45.** Cuando el ángulo de elevación del Sol es $\theta$, un poste telefónico de 40 pies de altura proyecta una sombra de longitud $s$ como se muestra en la FIGURA 4.5.2. Encuentre la razón de cambio de $s$ con respecto a $\theta$ cuando $\theta = \pi/3$ radianes. Explique el significado del signo menos en la respuesta.

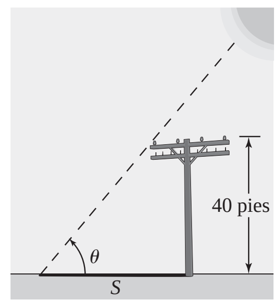



FIGURA 4.5.2 Sombra en el problema 45

**46.** Los dos extremos de una tabla de 10 pies de longitud se sujetan a rieles perpendiculares como se muestra en la FIGURA 4.5.3, de modo que el punto $P$ puede desplazarse con libertad sobre la vertical y el punto $R$ puede moverse libremente en dirección horizontal.

***a***) Exprese el área $A$ del triángulo $PQR$ como una función del ángulo $\theta$ indicado.

***b***) Encuentre la razón de cambio de $A$ con respecto a $\theta$.

***c***) Al inicio la tabla está en posición plana sobre el riel horizontal. Suponga que luego el punto $R$ se mueve en dirección del punto $Q$, obligando así al punto $P$ a moverse hacia arriba sobre el riel vertical. Al principio el área del triángulo es 0 ($\theta = 0$), pero luego aumenta durante un instante a medida que $\theta$ crece y después disminuye cuando $R$ tiende a $Q$. Cuando la tabla está vertical, el área del triángulo es 0 ($\theta = \pi/2$) de nuevo. Grafique la derivada $dA/d\theta$. Interprete la gráfica para encontrar valores de $\theta$ para los cuales $A$ es creciente y los valores de $\theta$ para los cuales $A$ es decreciente. Luego compruebe su interpretación de la gráfica de la derivada al graficar $A(\theta)$.

***d***) Use las gráficas en el inciso *c*) para encontrar el valor de $\theta$ para el cual el área del triángulo es máxima.

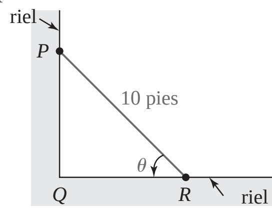



FIGURA 4.5.3 Tabla en el problema 46

## ≡ Piense en ello

**47.** ***a***) Encuentre todos los enteros positivos $n$ tales que

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos x;$$
$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \cos x.$$

***b***) Use los resultados en el inciso *a*) como ayuda para encontrar

$$\frac{d^{21}}{dx^{21}} \operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{30}}{dx^{30}} \operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{40}}{dx^{40}} \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d^{67}}{dx^{67}} \cos x.$$

**48.** Encuentre dos puntos distintos $P_1$ y $P_2$ sobre la gráfica de $y = \cos x$ de modo que la recta tangente en $P_1$ sea perpendicular a la recta tangente en $P_2$.

**49.** Encuentre dos puntos distintos $P_1$ y $P_2$ sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de modo que la recta tangente en $P_1$ sea paralela a la recta tangente en $P_2$.

**50.** Use (1), (2) y la fórmula de la suma para el coseno para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

**51.** Use (4) y (5) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x.$$

**52.** Use (4) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x.$$

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Por inspección de la gráfica, indique dónde la función puede no ser diferenciable.

**53.** $f(x) = 0.5(\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|)$ **54.** $f(x) = |x + \operatorname{sen} x|$

**55.** Como se muestra en la FIGURA 4.5.4, un joven jala un trineo donde va sentada su hermana. Si el peso total del trineo y la chica es de 70 lb, y si el coeficiente de fricción de suelo cubierto por nieve es 0.2, entonces la magnitud $F$ de la fuerza (medida en libras) necesaria para mover el trineo es

$$F = \frac{70(0.2)}{0.2 \operatorname{sen} \theta + \cos \theta},$$

donde $\theta$ es el ángulo que la cuerda forma con la horizontal.

***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $F$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

***b***) Encuentre la derivada $dF/d\theta$.

***c***) Encuentre el ángulo (en radianes) para el que $dF/d\theta = 0$.

***d***) Encuentre el valor de $F$ correspondiente al ángulo encontrado en el inciso *c*).

***e***) Use la gráfica en el inciso *a*) como ayuda para interpretar los resultados encontrados en los incisos *c*) y *d*).

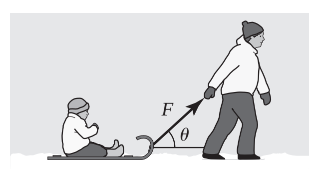



FIGURA 4.5.4 Trineo en el problema 55

# 4.6 La regla de la cadena

**Introducción** Como se analizó en la sección 4.3, la regla de potencias

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

es válida para todos los números reales exponentes $n$. En esta sección veremos que una regla semejante se cumple para la derivada de una potencia de una función $y = [g(x)]^n$. Antes de plantear el resultado formal, se considerará un ejemplo cuando $n$ es un entero positivo.

Suponga que queremos diferenciar

$$y = (x^5 + 1)^2. \tag{1}$$

Al escribir (1) como $y = (x^5 + 1) \cdot (x^5 + 1)$, podemos encontrar la derivada al usar la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 &= (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1)\\ &= (x^5 + 1) \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 5x^4\\ &= 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{2}$$

En forma semejante, para diferenciar la función $y = (x^5 + 1)^3$, es posible escribirla como $y = (x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)$ y usar la regla del producto y el resultado que se proporciona en (2):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^3 &= \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)\\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2}^{\text{sabemos esto por (2)}}\\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4\\ &= 3(x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Asimismo, al escribir $y = (x^5 + 1)^4$ como $y = (x^5 + 1)^3 \cdot (x^5 + 1)$ es posible demostrar con facilidad mediante la regla del producto y (3) que

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^4 = 4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4. \tag{4}$$

**Regla de potencias para funciones** La inspección de (2), (3) y (4) revela un patrón para diferenciar una potencia de una función $g$. Por ejemplo, en (4) vemos

el exponente se escribe como múltiplo ↓
↓ derivada de la función entre paréntesis

$$4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4$$

↑ disminuir el exponente por 1

Para recalcar lo anterior, si la función diferenciable se denota por [ ], resulta evidente que

$$\frac{d}{dx}[\ ]^n = n[\ ]^{n-1}\frac{d}{dx}[\ ].$$

El análisis anterior sugiere el resultado que se plantea en el siguiente teorema.

**Teorema 4.6.1** Regla de potencias para funciones

Si $n$ es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable en $x$, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x), \tag{5}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{6}$$

El teorema 4.6.1 constituye en sí un caso especial de un teorema más general, denominado **regla de la cadena**, que se presentará después de considerar algunos ejemplos de esta nueva regla de potencias.

**EJEMPLO 1** Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = (4x^3 + 3x + 1)^7$.

**Solución** Con la identificación de que $u = g(x) = 4x^3 + 3x + 1$, por (6) vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{7}^{n}\overbrace{(4x^3 + 3x + 1)^6}^{u^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^3 + 3x + 1)}^{du/dx} = 7(4x^3 + 3x + 1)^6(12x^2 + 3).$$

**EJEMPLO 2** Regla de potencias para funciones

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podríamos, por supuesto, usar la regla del cociente. No obstante, al volver a escribir la función como $y = (x^2 + 1)^{-1}$, también es posible usar la regla de potencias para funciones con $n = -1$:

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-1)(x^2 + 1)^{-2}\, 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

**EJEMPLO 3** Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \dfrac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

**Solución** Escribimos la función dada como $y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}$. Se identifica $u = 7x^5 - x^4 + 2$, $n = -10$ y se usa la regla de potencias (6):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \cdot \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2) = \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}.$$

**EJEMPLO 4** Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \tan^3 x$.

**Solución** Para recalcar, primero volvemos a escribir la función como $y = (\tan x)^3$ y luego se usa (6) con $u = \tan x$ y $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\tan x.$$

Recuerde por (6) de la sección 4.4 que $(d/dx)\tan x = \sec^2 x$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x \sec^2 x.$$

**EJEMPLO 5** Regla del cociente y luego regla de potencias

Diferencie $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

**Solución** Empezamos con la regla del cociente seguida por dos aplicaciones de la regla de potencias para:

Regla de potencias para funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1)^8 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3 - (x^2 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(5x + 1)^8}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{(5x + 1)^8 \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x - (x^2 - 1)^3 \cdot 8(5x + 1)^7 \cdot 5}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2 - 40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}.$$

**EJEMPLO 6** Regla de potencias y luego regla del cociente

Diferencie $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{8x+1}}$.

**Solución** Al volver a escribir la función como

$$y = \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{1/2} \quad \text{podemos identificarla} \quad u = \frac{2x-3}{8x+1}$$

y $n = \frac{1}{2}$. Por tanto, para calcular $du/dx$ en (6) es necesario usar la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(8x+1)\cdot 2 - (2x-3)\cdot 8}{(8x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{26}{(8x+1)^2}.$$

Por último, se simplifica usando las leyes de los exponentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13}{(2x-3)^{1/2}(8x+1)^{3/2}}.$$

**Regla de la cadena** Una potencia de una función puede escribirse como una función compuesta. Si identificamos $f(x) = x^n$ y $u = g(x)$, entonces $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. La regla de la cadena constituye un mecanismo para diferenciar cualquier composición $f \circ g$ de dos funciones diferenciables $f$ y $g$.

**Teorema 4.6.2** Regla de la cadena

Si la función $f$ es diferenciable en $u = g(x)$ y la función $g$ es diferenciable en $x$, entonces la composición $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en $x$ y

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{8}$$

**DEMOSTRACIÓN PARA $\Delta u \neq 0$** En esta demostración parcial resulta conveniente usar la forma de la definición de la derivada proporcionada en (3) de la sección 4.2. Para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \tag{9}$$

o bien, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$. Además,

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Cuando $x$ y $x + \Delta x$ están en algún intervalo abierto para el que $\Delta u \neq 0$, es posible escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Puesto que se supone que $g$ es diferenciable, es continua. En consecuencia, cuando $\Delta x \to 0$, $g(x + \Delta x) \to g(x)$, y así por (9) vemos que $\Delta u \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right). \quad \leftarrow \text{observe que } \Delta u \to 0 \text{ en el primer término}$$

Por la definición de derivada, (3) de la sección 4.2, se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Se supone que $\Delta u \neq 0$ sobre algunos intervalos no se cumple para toda función diferenciable $g$. Aunque el resultado proporcionado en (7) sigue siendo válido cuando $\Delta u = 0$, la demostración precedente no.

Para comprender la derivada de una composición $y = f(g(x))$ podría ser de utilidad considerar a $f$ como la *función externa* y a $u = g(x)$ como la *función interna*. Así, la derivada de $y = f(g(x)) = f(u)$ es el *producto de la derivada de la función externa* (evaluada en la función interna) *y la derivada de la función interna* (evaluada en $x$):

derivada de la función externa
↓

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\cdot u'. \tag{10}$$

↑
derivada de la función interna

El resultado en (10) lo escribimos de varias formas. Puesto que $y = f(u)$, tenemos $f'(u) = dy/du$, y, por supuesto, $u' = du/dx$. El producto de las derivadas en (10) es el mismo que en (8). Por otra parte, si los símbolos $u$ y $u'$ en (10) los sustituimos por $g(x)$ y $g'(x)$, obtenemos (7).

**Demostración de la regla de potencias para funciones** Como ya se observó, una potencia de una función puede escribirse como una composición $(f \circ g)(x)$ donde la función externa es $y = f(x) = x^n$ y la función interna es $u = g(x)$. La derivada de la función interna $y = f(u) = u^n$ es $\dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1}$ y la derivada de la función externa es $\dfrac{du}{dx}$. Así, el producto de estas derivadas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Ésta es la regla de potencias para funciones proporcionada en (5) y (6).

**Funciones trigonométricas** Las derivadas de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable $g$ se obtienen como una consecuencia directa de la regla de la cadena. Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, donde $u = g(x)$, entonces la derivada de $y$ con respecto a la variable $u$ es

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Por tanto, (8) da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}[\;] = \cos[\;]\frac{d}{dx}[\;].$$

En forma semejante, si $y = \tan u$ donde $u = g(x)$, entonces $dy/du = \sec^2 u$ y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \sec^2 u\frac{du}{dx}.$$

A continuación se resumen los resultados de la regla de la cadena para las seis funciones trigonométricas.

**Teorema 4.6.3** Derivadas de funciones trigonométricas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}. \tag{13}$$

**EJEMPLO 7** Regla de la cadena

Diferencie $y = \cos 4x$.

**Solución** La función es $\cos u$ con $u = 4x$. Por la segunda fórmula en (11) del teorema 4.6.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-\operatorname{sen} 4x}^{\frac{dy}{du}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}4x}^{\frac{du}{dx}} = -4\operatorname{sen} 4x.$$

■

**EJEMPLO 8** Regla de la cadena

Diferencie $y = \tan(6x^2 + 1)$.

**Solución** La función es $\tan u$ con $u = 6x^2 + 1$. Por la segunda fórmula en (12) del teorema 4.6.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\sec^2(6x^2 + 1)}^{\sec^2 u} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(6x^2 + 1)}^{\frac{du}{dx}} = 12x \sec^2(6x^2 + 1).$$

■

**EJEMPLO 9** Reglas del producto, de potencias y de la cadena

Diferencie $y = (9x^3 + 1)^2 \operatorname{sen} 5x$.

**Solución** Primero se usa la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot \frac{d}{dx}(9x^3 + 1)^2$$

seguida de la regla de potencias (6) y la primera fórmula (11) del teorema 4.6.3,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (9x^3 + 1)^2 \cdot \underset{\text{por (11)}}{\cos 5x \cdot \frac{d}{dx}5x} + \operatorname{sen} 5x \cdot \underset{\text{por (6)}}{2(9x^3 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(9x^3 + 1)}\\ &= (9x^3 + 1)^2 \cdot 5\cos 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot 2(9x^3 + 1) \cdot 27x^2\\ &= (9x^3 + 1)(45x^3 \cos 5x + 5\cos 5x + 54x^2 \operatorname{sen} 5x).\end{aligned}$$

■

En las secciones 4.3 y 4.4 vimos que aun cuando las reglas de la suma y el producto se plantearon en términos de dos funciones $f$ y $g$, son válidas para cualquier número finito de funciones diferenciables. De este modo, también se planteó la regla de la cadena para la composición de dos funciones $f$ y $g$, aunque es posible aplicarla a la composición de tres (o más) funciones diferenciables. En el caso de las tres, $f$, $g$ y $h$, (7) se vuelve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(g(h(x))) &= f'(g(h(x))) \cdot \frac{d}{dx}g(h(x))\\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).\end{aligned}$$

**EJEMPLO 10** Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

**Solución** Para recalcar, primero escribimos la función dada como $y = [\cos(7x^3 + 6x - 1]^4$. Observe que esta función es la composición $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ donde $f(x) = x^4$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 7x^3 + 6x - 1$. Primero aplicamos la regla de la cadena en la forma de regla de potencias (6) seguida por la segunda fórmula en (11):

$$\frac{dy}{dx} = 4[\cos(7x^3 + 6x - 1)]^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(7x^3 + 6x - 1) \quad \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar la potencia}$$

$$= 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot \left[-\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(7x^3 + 6x - 1)\right] \quad \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar el coseno}$$

$$= -4(21x^2 + 6)\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1).$$

En el ejemplo final, la función dada es una composición de cuatro funciones. ■

**EJEMPLO 11** Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)$.

**Solución** La función es $f(g(h(k(x))))$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sqrt{x}$, y $k(x) = 3x^2 + 4$. En este caso se aplica la regla de la cadena tres veces consecutivas como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \frac{d}{dx}\tan\sqrt{3x^2 + 4} \quad \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar el seno}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2 + 4} \quad \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar la tangente}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4)^{1/2} \quad \leftarrow \text{se vuelve a escribir la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4) \quad \leftarrow \text{tercera regla de la cadena: diferenciar la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 6x \quad \leftarrow \text{simplificar}$$

$$= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{3x^2 + 4}}.$$

■

Por supuesto, usted debe volverse tan apto en aplicar la regla de la cadena que al final ya no piense en el número de funciones presentes en la composición que se trate.

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

*i*) Quizás el error más frecuente es olvidar efectuar la segunda parte de la regla de la cadena; a saber: la derivada de la función interna. Ésta es la parte $du/dx$ en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo, la derivada de $y = (1 - x)^{57}$ no es $dy/dx = 57(1 - x)^{56}$ puesto que $57(1 - x)^{56}$ es sólo la parte $dy/du$. Podría ser útil usar de manera consistente el símbolo de operación $d/dx$:

$$\frac{d}{dx}(1 - x)^{57} = 57(1 - x)^{56} \cdot \frac{d}{dx}(1 - x) = 57(1 - x)^{56} \cdot (-1).$$

*ii*) Un error menos común, pero tal vez más grave que el primero, consiste en diferenciar dentro la función dada. En su examen, un estudiante escribió que la derivada de $y = \cos(x^2 + 1)$ era $dy/dx = -\text{sen}(2x)$; es decir que la derivada del coseno es el negativo del seno y que la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$. Ambas observaciones son correctas, pero la forma donde se escribieron juntas es incorrecta. Tenga en cuenta que la derivada de la función interna es un múltiplo de la derivada de la función externa. De nuevo, podría ser de ayuda usar el símbolo de operación $d/dx$. La derivada correcta de $y = \cos(x^2 + 1)$ es el producto de dos derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = -2x\,\text{sen}(x^2 + 1).$$

## 4.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

### Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre $dy/dx$.

**1.** $y = (-5x)^{30}$ **2.** $y = (3/x)^{14}$

**3.** $y = (2x^2 + x)^{200}$ **4.** $y = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$

**5.** $y = \dfrac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$ **6.** $y = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$

**7.** $y = (3x - 1)^4(-2x + 9)^5$ **8.** $y = x^4(x^2 + 1)^6$

**9.** $y = \text{sen}\sqrt{2x}$ **10.** $y = \sec x^2$

**11.** $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ **12.** $y = \dfrac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$

**13.** $y = [x + (x^2 - 4)^3]^{10}$ **14.** $y = \left[\dfrac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$

**15.** $y = x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$ **16.** $y = (2x + 1)^3\sqrt{3x^2 - 2x}$

**17.** $y = \text{sen}(\pi x + 1)$ **18.** $y = -2\cos(-3x + 7)$

**19.** $y = \text{sen}^3 5x$ **20.** $y = 4\cos^2\sqrt{x}$

En los problemas 21-38, encuentre $f'(x)$.

**21.** $f(x) = x^3\cos x^3$ **22.** $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,5x}{\cos 6x}$

**23.** $f(x) = (2 + x\,\text{sen}\,3x)^{10}$ **24.** $f(x) = \dfrac{(1 - \cos 4x)^2}{(1 + \text{sen}\,5x)^3}$

**25.** $f(x) = \tan(1/x)$ **26.** $f(x) = x\cot(5/x^2)$

**27.** $f(x) = \text{sen}\,2x\cos 3x$ **28.** $f(x) = \text{sen}^2 2x\cos^3 3x$

**29.** $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^5$ **30.** $f(x) = \csc^2 2x - \csc 2x^2$

**31.** $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\,2x)$ **32.** $f(x) = \tan\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$

**33.** $f(x) = \cos\left(\text{sen}\sqrt{2x + 5}\right)$ **34.** $f(x) = \tan(\tan x)$

**35.** $f(x) = \text{sen}^3(4x^2 - 1)$ **36.** $f(x) = \sec(\tan^2 x^4)$

**37.** $f(x) = (1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^6$

**38.** $f(x) = \left[x^2 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-4}\right]^2$

En los problemas 39-42, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**39.** $y = (x^2 + 2)^3$; $x = -1$ **40.** $y = \dfrac{1}{(3x + 1)^2}$; $x = 0$

**41.** $y = \text{sen}\,3x + 4x\cos 5x$; $x = \pi$

**42.** $y = 50x - \tan^3 2x$; $x = \pi/6$

En los problemas 43-46, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**43.** $y = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2$; $x = -\dfrac{1}{2}$ **44.** $y = x^2(x - 1)^3$; $x = 2$

**45.** $y = \tan 3x$; $x = \pi/4$

**46.** $y = (-1 + \cos 4x)^3$; $x = \pi/8$

En los problemas 47 y 48, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**47.** $y = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6x}\right)\cos(\pi x^2)$; $x = \dfrac{1}{2}$

**48.** $y = \text{sen}^3\dfrac{x}{3}$; $x = \pi$

En los problemas 49-52, encuentre la derivada indicada.

**49.** $f(x) = \text{sen}\,\pi x$; $f'''(x)$

**50.** $y = \cos(2x + 1)$; $d^5y/dx^5$

**51.** $y = x\,\text{sen}\,5x$; $d^3y/dx^3$ **52.** $f(x) = \cos x^2$; $f''(x)$

**53.** Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x/(x^2 + 1)^2$ donde la recta tangente es horizontal. La gráfica de $f$, ¿tiene alguna tangente vertical?

**54.** Determine los valores de $t$ en los que la razón de cambio instantánea de $g(t) = \text{sen}\,t + \frac{1}{2}\cos 2t$ es cero.

**55.** Si $f(x) = \cos(x/3)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f'$ en $x = 2\pi$?

**56.** Si $f(x) = (1 - x)^4$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f''$ en $x = 2$?

## ≡ Aplicaciones

**57.** La función $R = (v_0^2/g)\text{sen } 2\theta$ proporciona el rango de un proyectil disparado a un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal con una velocidad inicial $v_0$. Si $v_0$ y $g$ son constantes, encuentre los valores de $\theta$ con los cuales $dR/d\theta = 0$.

**58.** El volumen de un globo esférico de radio $r$ es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El radio es una función del tiempo $t$ y aumenta a razón constante de 5 pulg/min. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de $V$ con respecto a $r$?

**59.** Suponga que un globo esférico se infla a razón constante $dV/dt = 10$ pulg$^3$/min. ¿A qué ritmo aumenta su radio cuando $r = 2$ pulg?

**60.** Considere una masa sobre un resorte como se muestra en la FIGURA 4.6.1. En ausencia de fuerzas de amortiguación, el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa, medido desde una posición denominada **posición de equilibrio**, está dado por la función

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega}\text{sen } \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$, $k$ es la constante del resorte (un indicador de la rigidez del resorte), $m$ es la masa (medida en slugs o kilogramos), $y_0$ es el desplazamiento inicial de la masa (medido por arriba o por debajo de la posición de equilibrio), $v_0$ es la velocidad inicial de la masa y $t$ es el tiempo medido en segundos.

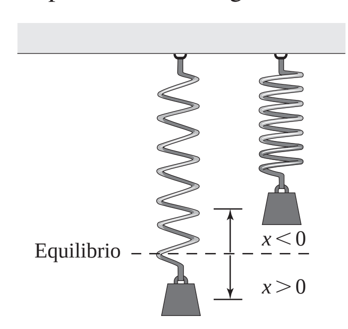



FIGURA 4.6.1 Masa en un resorte en el problema 60

*a*) Compruebe que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

*b*) Compruebe que $x(t)$ satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

## ≡ Piense en ello

**61.** Sea $F$ una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}F(3x)$?

**62.** Sea $G$ una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}[G(-x^2)]^2$?

**63.** Suponga $\frac{d}{du}f(u) = \frac{1}{u}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(-10x + 7)$?

**64.** Suponga $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(x^3)$?

En los problemas 65 y 66, el símbolo $n$ representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

**65.** $\frac{d^n}{dx^n}(1 + 2x)^{-1}$

**66.** $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{1 + 2x}$

**67.** Suponga que $g(t) = h(f(t))$, donde $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, y $h'(3) = -2$. ¿Qué es $g'(1)$?

**68.** Suponga que $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) - 1$, $f'(2) = 4$, y $f''(2) = 3$. ¿Qué es $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1}$?

**69.** Dado que $f$ es una función impar diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que $f'$ es una función par.

**70.** Dado que $f$ es una función par diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que $f'$ es una función impar.

# 4.7 La derivada implícita

**Introducción** Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son las gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

describe un círculo de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (1) no es una función, puesto que para cualquier elección de $x$ que satisfaga $-2 < x < 2$ corresponden dos valores de $y$. Vea la FIGURA 4.7.1*a*). A pesar de ello, las gráficas de ecuaciones como (1) pueden tener rectas tangentes en varios puntos $(x, y)$. La ecuación (1) define *por lo menos* dos funciones $f$ y $g$ sobre el intervalo $[-2, 2]$. Gráficamente, las funciones evidentes son la mitad superior y la mitad inferior del círculo. A fin de obtener fórmulas para éstas, se despeja $y$ de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de $x$:

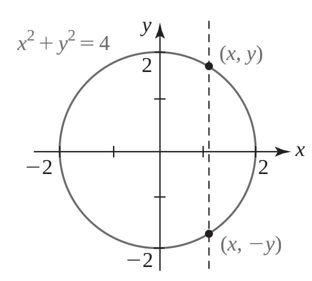
$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad \leftarrow \text{semicírculo superior} \tag{2}$$

y

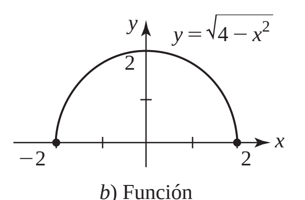
$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \quad \leftarrow \text{semicírculo inferior} \tag{3}$$

Vea las figuras 4.7.1*b*) y *c*). Ahora ya es posible encontrar pendientes de las rectas tangentes para $-2 < x < 2$ al diferenciar (2) y (3) con la regla de potencias para funciones.

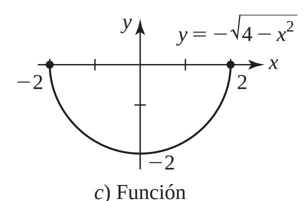
En esta sección veremos cómo obtener la derivada $dy/dx$ para (1), así como para ecuaciones más complicadas $F(x, y) = 0$, sin necesidad de resolver la ecuación para la variable $y$.




*a*) No es una función




*b*) Función




*c*) Función

FIGURA 4.7.1 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina por lo menos dos funciones

**Funciones implícitas y explícitas** Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente $x$, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita. Por otra parte, se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define **implícitamente** la función, o que $y$ es una **función implícita** de $x$. Acabamos de ver que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

En general, si una ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente una función en algún intervalo, entonces $F(x, f(x)) = 0$ es una identidad sobre el intervalo. La gráfica de $f$ es una porción o un arco (o toda) de la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$. En el caso de las funciones en (2) y (3), observe que ambas ecuaciones

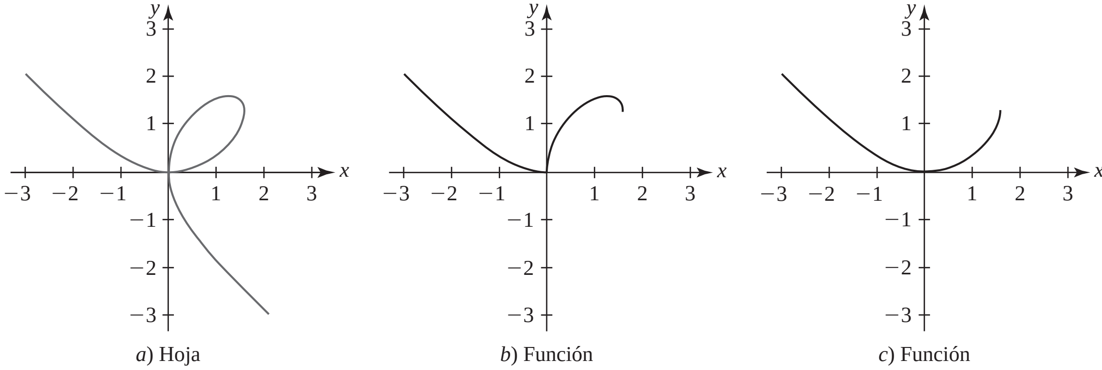
$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 4$$

son identidades sobre el intervalo $[-2, 2]$.

La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ que se muestra en la FIGURA 4.7.2*a*) es una curva famosa denominada **hoja de Descartes**. Con ayuda de un SAC como *Mathematica* o *Maple*, encontramos que una de las funciones implícitas definidas por $x^3 + y^3 = 3xy$ es

$$y = \frac{2x}{\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}. \qquad (4)$$

La gráfica de esta función es el arco que se observa en la figura 4.7.2*b*). En la figura 4.7.2*c*) se proporciona la gráfica de otra función implícita definida por $x^3 + y^3 = 3xy$.




*a*) Hoja *b*) Función *c*) Función

FIGURA 4.7.2 Las porciones de la gráfica en *a*) que se muestran en *b*) y *c*) son gráficas de dos funciones implícitas de $x$

**Diferenciación implícita** A partir del análisis anterior, no salte a la conclusión de que siempre es posible resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para una función implícita de $x$ como se hizo en (2), (3) y (4). Por ejemplo, resolver una ecuación como

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + y \qquad (5)$$

Aunque no es posible resolver ciertas ecuaciones para una función explícita, sigue siendo posible graficar la ecuación con ayuda de un SAC. Así, es posible *ver* las funciones como se hizo en la figura 4.7.2.

para $y$ en términos de $x$ es más que un ejercicio en algún desafío algebraico o una lección sobre el uso de la sintaxis correcta en un SAC. ¡Es *imposible*! Sin embargo, (5) puede determinar varias funciones implícitas sobre un intervalo restringido del eje $x$. A pesar de ello, *podemos* determinar la derivada $dy/dx$ por medio de un proceso denominado **diferenciación implícita**. Este proceso consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a $x$, usando las reglas de diferenciación y luego resolviendo para $dy/dx$. Puesto que se considera que $y$ está determinada por la ecuación dada como una función diferenciable de $x$, la regla de la cadena, en forma de la regla de potencias para funciones, proporciona el resultado útil

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \qquad (6)$$

donde $n$ es cualquier número real. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}.$$

En forma semejante, si $y$ es una función de $x$, entonces por la regla del producto

$$\frac{d}{dx}xy = x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x = x\frac{dy}{dx} + y,$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5y = \cos 5y \cdot \frac{d}{dx}5y = 5\cos 5y\frac{dy}{dx}.$$

## Directrices para diferenciación implícita

*i*) Al diferenciar con respecto a $x$ ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a $y$ como una función diferenciable de $x$. Para potencias del símbolo $y$, use (6).

*ii*) Agrupe todos los términos donde aparece $dy/dx$ en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.

*iii*) Factorice $dy/dx$ en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje $dy/dx$.

En los siguientes ejemplos se supondrá que la ecuación dada determina por lo menos una función diferenciable implícitamente.

### EJEMPLO 1 Uso de la diferenciación implícita

Encuentre $dy/dx$ si $x^2 + y^2 = 4$.

**Solución** Se diferencian ambos miembros de la ecuación y luego se usa (6):

use la regla de potencias (6) aquí
↓

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$

■

Como se ilustra en (7) del ejemplo 1, la diferenciación implícita suele producir una derivada que depende de ambas variables $x$ y $y$. En el análisis introductorio vimos que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente sobre el intervalo abierto $-2 < x < 2$. El simbolismo $dy/dx = -x/y$ representa la derivada de cualquiera de las funciones sobre el intervalo. Observe que esta derivada indica con claridad que las funciones (2) y (3) no son diferenciables en $x = -2$ y $x = 2$ puesto que $y = 0$ para estos valores de $x$. En general, la diferenciación implícita produce la derivada de cualquier función que puede derivarse implícitamente definida por una ecuación $F(x, y) = 0$.

### EJEMPLO 2 La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

**Solución** Al sustituir $x = 1$ en la ecuación dada obtenemos $y^2 = 3$ o $y = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, hay rectas tangentes en $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Aunque $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$ son puntos sobre la

gráfica de dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente, indicadas en la FIGURA 4.7.3, (7) en el ejemplo 1 proporciona la pendiente correcta en cada número en el intervalo $(-2, 2)$. Tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

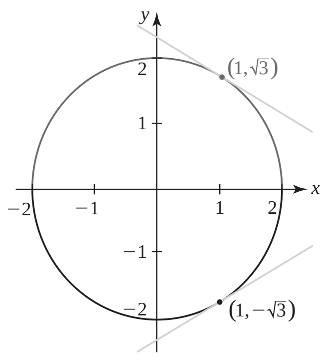



FIGURA 4.7.3 Las rectas tangentes en el ejemplo 2

## EJEMPLO 3 Uso de diferenciación implícita

Encuentre $dy/dx$ si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

**Solución** En este caso, usamos (6) y la regla del producto:

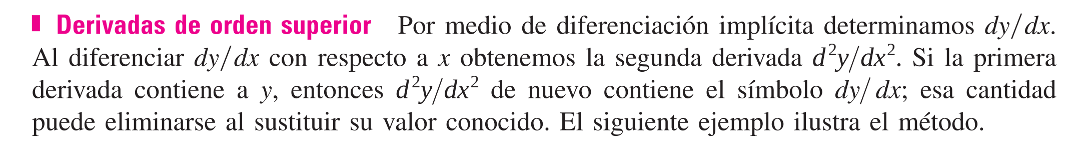
regla del producto aquí ↓ regla de potencias (6) aquí ↓

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2y^3 - \frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$$

$$4x^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 \leftarrow$$ factorice $dy/dx$ de los términos segundo y cuarto

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}.$$



**Derivadas de orden superior** Por medio de diferenciación implícita determinamos $dy/dx$. Al diferenciar $dy/dx$ con respecto a $x$ obtenemos la segunda derivada $d^2y/dx^2$. Si la primera derivada contiene a $y$, entonces $d^2y/dx^2$ de nuevo contiene el símbolo $dy/dx$; esa cantidad puede eliminarse al sustituir su valor conocido. El siguiente ejemplo ilustra el método.

## EJEMPLO 4 Segunda derivada

Encuentre $d^2y/dx^2$ si $x^2 + y^2 = 4$.

**Solución** Por el ejemplo 1, ya sabemos que la primera derivada es $dy/dx = -x/y$. La segunda derivada es la derivada de $dy/dx$, de modo que por la regla del cociente:

al sustituir por $dy/dx$ ↓ ↓

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \dfrac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Al observar que $x^2 + y^2 = 4$, es posible volver a escribir la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{y^3}.$$

## EJEMPLO 5 Reglas de la cadena y del producto

Encuentre $dy/dx$ si $\operatorname{sen} y = y \cos 2x$.

**Solución** Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}y\cos 2x$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}.$$

**Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Hasta el momento se ha demostrado la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ para todos los enteros exponentes $n$. La diferenciación implícita constituye un mecanismo para demostrar esta regla cuando el exponente es un número racional $p/q$, donde $p$ y $q$ son enteros y $q \neq 0$. En el caso donde $n = p/q$, la función

$$y = x^{p/q} \quad \text{proporciona} \quad y^q = x^p.$$

Luego, para $y \neq 0$, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p \quad \text{produce} \quad qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Al despejar $dy/dx$ en la última ecuación y simplificar con las leyes de los exponentes obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

Al examinar el último resultado observamos que se trata de (3) de la sección 4.3 con $n = p/q$.

## 4.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

### Fundamentos

En los problemas 1-4, suponga que $y$ es una función diferenciable de $x$. Encuentre la derivada indicada.

1. $\dfrac{d}{dx}x^2y^4$
2. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{y^2}$
3. $\dfrac{d}{dx}\cos y^2$
4. $\dfrac{d}{dx}y \operatorname{sen} 3y$

En los problemas 5-24, suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable implícita. Use diferenciación implícita para encontrar $dy/dx$.

5. $y^2 - 2y = x$
6. $4x^2 + y^2 = 8$
7. $xy^2 - x^2 + 4 = 0$
8. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$
9. $3y + \cos y = x^2$
10. $y^3 - 2y + 3x^3 = 4x + 1$
11. $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$
12. $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$
13. $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$
14. $y = (x - y)^2$
15. $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$
16. $y^4 - y^2 = 10x - 3$
17. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$
18. $\dfrac{x + y}{x - y} = x$
19. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 2}$
20. $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} = 5$
21. $xy = \operatorname{sen}(x + y)$
22. $x + y = \cos(xy)$
23. $x = \sec y$
24. $x \operatorname{sen} y - y \cos x = 1$

En los problemas 25 y 26, use diferenciación implícita para encontrar la derivada indicada.

25. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$; $dr/d\theta$
26. $\pi r^2 h = 100$; $dh/dr$

En los problemas 27 y 28, encuentre $dy/dx$ en el punto indicado.

27. $xy^2 + 4y^3 + 3x = 0$; $(1, -1)$
28. $y = \operatorname{sen} xy$; $(\pi/2, 1)$

En los problemas 29 y 30, encuentre $dy/dx$ en los puntos que corresponden al número indicado.

29. $2y^2 + 2xy - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$
30. $y^3 + 2x^2 = 11y$; $y = 1$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto o número indicado.

31. $x^4 + y^3 = 24$; $(-2, 2)$
32. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$; $x = 3$
33. $\tan y = x$; $y = \pi/4$
34. $3y + \cos y = x^2$; $(1, 0)$

En los problemas 35 y 36, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada donde la recta tangente es horizontal.

35. $x^2 - xy + y^2 = 3$
36. $y^2 = x^2 - 4x + 7$
37. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente de la tangente es $\frac{1}{2}$.
38. Encuentre el punto donde se cortan las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$.
39. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^3 = x^2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 3x - 5 = 0$.
40. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 - xy + y^2 = 27$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 5$.

En los problemas 41-48, encuentre $d^2y/dx^2$.

41. $4y^3 = 6x^2 + 1$
42. $xy^4 = 5$
43. $x^2 - y^2 = 25$
44. $x^2 + 4y^2 = 16$
45. $x + y = \operatorname{sen} y$
46. $y^2 - x^2 = \tan 2x$
47. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$
48. $x^3 + y^3 = 27$

En los problemas 49-52, primero use diferenciación implícita para encontrar $dy/dx$. Luego despeje $y$ explícitamente en términos de $x$ y diferencie. Demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

49. $x^2 - y^2 = x$
50. $4x^2 + y^2 = 1$
51. $x^3y = x + 1$
52. $y \operatorname{sen} x = x - 2y$

En los problemas 53-56, determine una función implícita a partir de la ecuación dada tal que su gráfica sea la curva en la figura.

**53.** $(y - 1)^2 = x - 2$

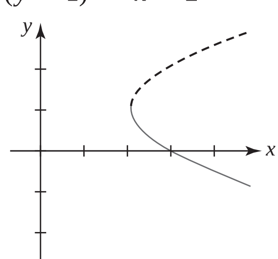
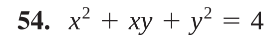



FIGURA 4.7.4 Gráfica para el problema 53



**54.** $x^2 + xy + y^2 = 4$

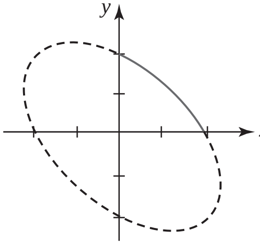



FIGURA 4.7.5 Gráfica para el problema 54

**55.** $x^2 + y^2 = 4$

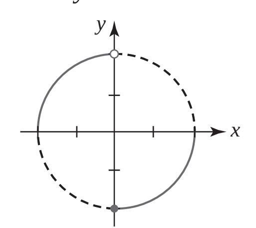
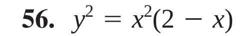



FIGURA 4.7.6 Gráfica para el problema 55



**56.** $y^2 = x^2(2 - x)$

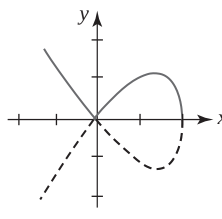



FIGURA 4.7.7 Gráfica para el problema 56

En los problemas 57 y 58, suponga que tanto $x$ como $y$ son diferenciables de una variable $t$. Encuentre $dy/dt$ en términos de $x$, $y$ y $dx/dt$.

**57.** $x^2 + y^2 = 25$

**58.** $x^2 + xy + y^2 - y = 9$

**59.** La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ es la hoja de Descartes proporcionada en la figura 4.7.2*a*).

***a***) Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto en el primer cuadrante donde la hoja corta la gráfica de $y = x$.

***b***) Encuentre el punto en el primer cuadrante donde la recta tangente es horizontal.

**60.** La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ mostrada en la FIGURA 4.7.8 se denomina **lemniscata**.

***a***) Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 1$.

***b***) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso *a*).

***c***) Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal.

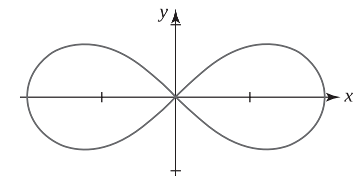



FIGURA 4.7.8 Lemniscata en el problema 60

En los problemas 61 y 62, demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son ortogonales en el punto de intersección indicado. Vea el problema 64 en la sección "Desarrolle su competencia 4.3".

**61.** $y^2 = x^3$, $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, 1)$

**62.** $y^3 + 3x^2y = 13$, $2x^2 - 2y^2 = 3x$; $(2, 1)$

Si todas las curvas de una familia de curvas $G(x, y) = c_1$, $c_1$ una constante, cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y) = c_2$, $c_2$ una constante, entonces se dice que las familias tienen **trayectorias ortogonales** entre sí. En los problemas 63 y 64, demuestre que las familias de curvas tienen trayectorias ortogonales entre sí. Trace las dos familias de curvas.

**63.** $x^2 - y^2 = c_1$, $xy = c_2$

**64.** $x^2 + y^2 = c_1$, $y = c_2x$

## ≡ Aplicaciones

**65.** Una mujer conduce hacia una señal en la carretera como se muestra en la FIGURA 4.7.9. Sea $\theta$ su ángulo de visión de la señal y sea $x$ su distancia (medida en pies) a esa señal.

***a***) Si el nivel de sus ojos está a 4 pies de la superficie de la carretera, demuestre que

$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2 + 252}.$$

***b***) Encuentre la razón a la que cambia $\theta$ con respecto a $x$.

***c***) ¿A qué distancia se cumple que la razón del inciso *b*) es igual a cero?

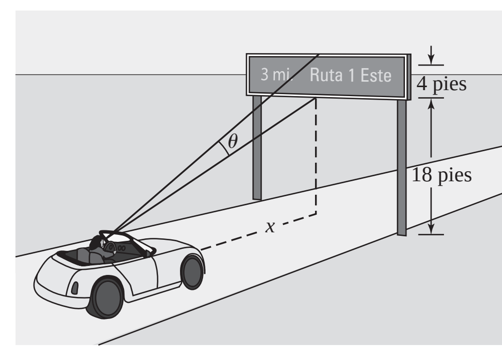



FIGURA 4.7.9 Automóvil en el problema 65

**66.** Un avión caza describe un círculo de 1 km de radio como se muestra en la FIGURA 4.7.10. Suponga que se escoge un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el origen está en el centro del círculo. La nave dispara un misil que describe una trayectoria rectilínea tangente al círculo e impacta en un blanco sobre el suelo cuyas coordenadas son $(2, -2)$.

***a***) Determine el punto sobre el círculo donde fue disparado el misil.

***b***) Si un misil se dispara en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sobre el círculo, ¿en qué punto choca contra el suelo?

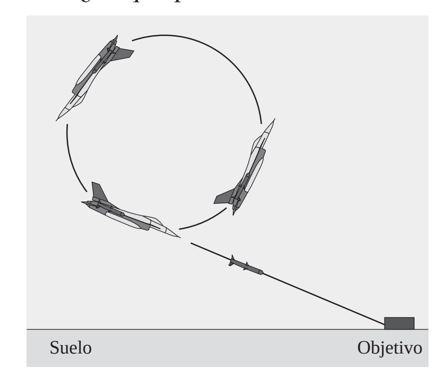



FIGURA 4.7.10 Avión caza en el problema 66

## ≡ Piense en ello

**67.** El ángulo $\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ entre dos curvas se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto $P$ de intersección. Si $m_1$ y $m_2$ son las pendientes de las rectas tangentes en $P$, es posible demostrar que $\tan\theta = (m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)$. Determine el ángulo entre las gráficas de $x^2 + y^2 + 4y = 6$ y $x^2 + 2x + y^2 = 4$ en $(1, 1)$.

**68.** Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto $(x_0, y_0)$ está dada por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

**69.** Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Establezca otra función implícita $h(x)$ definida por esta ecuación para $-2 \le x \le 2$ diferente de la proporcionada en (2), (3) y el problema 55.

**70.** Para $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$, la ecuación $x = \operatorname{sen} y$ define una función implícita diferenciable.

***a***) Encuentre $dy/dx$ en términos de $y$.

***b***) Encuentre $dy/dx$ en términos de $x$.

# 4.8 Derivada de funciones inversas

**Introducción** En la sección 2.5 vimos que las gráficas de una función $f$ uno a uno y su inversa $f^{-1}$ son **reflexiones** entre sí en la recta $y = x$. Como una consecuencia, si $(a, b)$ es un punto sobre la gráfica de $f$, entonces $(b, a)$ es un punto sobre la gráfica de $f^{-1}$. En esta sección también veremos que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función diferenciable $f$ están relacionadas con las pendientes de tangentes a la gráfica de $f^{-1}$.

Empezamos con dos teoremas sobre la continuidad de $f$ y $f^{-1}$.

**Continuidad de $f^{-1}$** Aunque los dos teoremas siguientes se plantean sin demostración, su validez se concluye a partir del hecho de que $f^{-1}$ es una reflexión de la gráfica de $f$ en la recta $y = x$.

**Teorema 4.8.1** Continuidad de la función inversa

Sea $f$ una función continua uno a uno sobre su dominio $X$. Entonces $f^{-1}$ es continua sobre su dominio.

**Funciones crecientes-decrecientes** Suponga que $y = f(x)$ es una función definida sobre un intervalo $I$, y que $x_1$ y $x_2$ son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. Entonces por la sección 2.3 y la figura 2.3.4, recuerde que se dice que $f$ es

- **creciente** sobre el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (1)
- **decreciente** sobre el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (2)

Los dos teoremas siguientes establecen una relación entre el concepto de creciente/decreciente y la existencia de una función inversa.

**Teorema 4.8.2** Existencia de una función inversa

Sea $f$ una función continua y creciente sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces $f^{-1}$ existe y es continua y creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

FIGURA 4.8.1 $f$ y $f^{-1}$ son continuas y crecientes

El teorema 4.8.2 también se cumple cuando sustituimos la palabra *creciente* por la palabra *decreciente* y el intervalo en la conclusión se reemplaza por $[f(b), f(a)]$. Vea la FIGURA 4.8.1. Además, por el teorema 4.8.2 concluimos que si $f$ es continua y creciente sobre un intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces $f^{-1}$ existe y es continua y creciente sobre su dominio de inspección. Al analizar las figuras 2.3.4 y 4.8.1 también observamos que si $f$ en el teorema 4.8.2 es una función diferenciable sobre $(a, b)$, entonces

*$f$ creciente y diferenciable significa que las rectas tangentes tienen pendiente positiva.*

- $f$ es creciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ sobre $(a, b)$, y
- $f$ es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) < 0$ sobre $(a, b)$.

Estas afirmaciones se demostrarán en la siguiente unidad.

**Teorema 4.8.3** Diferenciabilidad de una función inversa

Suponga que $f$ es una función diferenciable sobre un intervalo abierto $(a, b)$. Si $f'(x) > 0$ sobre el intervalo o $f'(x) < 0$ sobre el intervalo, entonces $f$ es uno a uno. Además, $f^{-1}$ es diferenciable para toda $x$ en el rango de $f$.

**EJEMPLO 1** Existencia de una inversa

Demuestre que $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ tiene una inversa.

**Solución** Puesto que $f$ es una función polinomial, es diferenciable en todas partes; es decir, $f$ es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. También, $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda $x$ implica que $f$ es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. Por el teorema 4.8.3 se concluye que $f$ es uno a uno y entonces $f^{-1}$ existe. ■

**Derivada de $f^{-1}$** Si $f$ es diferenciable sobre un intervalo $I$ y es uno a uno sobre ese intervalo, entonces para $a$ en $I$ el punto $(a, b)$ sobre la gráfica de $f$ y el punto $(b, a)$ sobre la gráfica de $f^{-1}$ son imágenes especulares entre sí en la recta $y = x$. Como veremos a continuación, las pendientes de las rectas tangentes en $(a, b)$ y $(b, a)$ también están relacionadas.

**EJEMPLO 2** Derivada de una inversa

En el ejemplo 5 de la sección 2.5 se demostró que la inversa de una función uno a uno $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$. En $x = 2$,

$$f(2) = 5 \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(5) = 2.$$

Luego, por

$$f'(x) = 2x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

observamos que $f'(2) = 4$ y $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$. Esto muestra que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f$ en (2, 5) y la pendiente de la tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en (5, 2) son recíprocas:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} \qquad \text{o} \qquad (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}.$$

Vea la FIGURA 4.8.2. ■

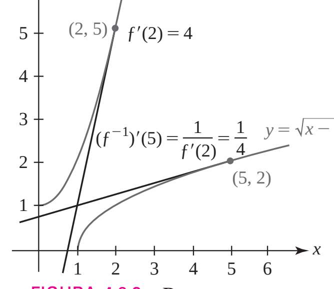


FIGURA 4.8.2 Rectas tangentes en el ejemplo 2

El siguiente teorema muestra que el resultado en el ejemplo 2 no es una coincidencia.

**Teorema 4.8.4** Derivada de una función inversa

Suponga que $f$ es diferenciable sobre un intervalo $I$ y que $f'(x)$ nunca es cero sobre $I$. Si $f$ tiene una inversa $f^{-1}$ sobre $I$, entonces $f^{-1}$ es diferenciable en un número $x$ y

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3}$$

**DEMOSTRACIÓN** Como vimos en (5) de la sección 2.5, $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda $x$ en el dominio de $f^{-1}$. Por diferenciación implícita y la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \qquad \text{o} \qquad f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1.$$

Al despejar $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ en la última ecuación obtenemos (3). ■

Resulta evidente que la ecuación (3) muestra que para encontrar la función derivada para $f^{-1}$ es necesario conocer de manera explícita $f^{-1}(x)$. Para una función uno a uno $y = f(x)$, resolver la ecuación $x = f(y)$ para $y$ algunas veces es difícil y a menudo imposible. En este

caso resulta conveniente volver a escribir (3) usando otra notación. De nuevo, por diferenciación implícita,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f(y) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Al despejar $dy/dx$ en la última ecuación y escribir $dx/dy = f'(y)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}. \tag{4}$$

Si $(a, b)$ es un punto conocido sobre la gráfica de $f$, el resultado en (4) permite evaluar la derivada de $f^{-1}$ en $(b, a)$ sin contar con una ecuación que defina $f^{-1}(x)$.

**EJEMPLO 3** Derivada de una inversa

En el ejemplo 1 se indicó que la función polinomial $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$ y por tanto es continua sobre el intervalo. Puesto que el comportamiento final de $f$ es el de la función polinomial con un solo término $y = 5x^3$, podemos concluir que el rango de $f$ también es $(-\infty, \infty)$. Además, puesto que $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda $x$, $f$ es creciente sobre su dominio $(-\infty, \infty)$. Entonces, por el teorema 4.8.3, $f$ tiene una inversa diferenciable $f^{-1}$ con dominio $(-\infty, \infty)$. Al intercambiar $x$ y $y$, la inversa se define por la ecuación $x = 5y^3 + 8y - 9$, pero resolver esta ecuación para $y$ en términos de $x$ es difícil (se requiere la fórmula cúbica). No obstante, al usar $dx/dy = 15y^2 + 8$, se encuentra que la derivada de la función inversa está dada por (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15y^2 + 8}. \tag{5}$$

Por ejemplo, puesto que $f(1) = 4$, sabemos que $f^{-1}(4) = 1$. Entonces, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en $(4, 1)$ está dada por (5):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{15y^2 + 8}\right|_{y=1} = \frac{1}{23}.$$

■

Lea otra vez este párrafo.

En el ejemplo 3, la derivada de la función inversa también puede obtenerse directamente a partir de $x = 5y^3 + 8y - 9$ usando diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(5y^3 + 8y - 9) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = 15y^2\frac{dy}{dx} + 8\frac{dy}{dx}.$$

Al resolver la ecuación para $dy/dx$ obtenemos (5). Como una consecuencia de esta observación, es posible usar diferenciación implícita para encontrar la derivada de una función inversa con el mínimo esfuerzo. En el siguiente análisis se encontrarán las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

**Derivadas de funciones trigonométricas inversas** Un repaso de las figuras 2.5.15 y 2.5.17*a*) revela que la tangente inversa y la cotangente inversa son diferenciables para toda $x$. No obstante, las cuatro funciones trigonométricas restantes no son diferenciables en $x = -1$ o $x = 1$. Centraremos la atención en obtener las fórmulas de las derivadas del seno inverso, la tangente inversa y la secante inversa, y la obtención de las otras se dejan como ejercicios.

***Seno inverso***: $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. En consecuencia, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \tag{6}$$

Para la restricción dada sobre la variable $y$, $\cos y \ge 0$ y así $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Al sustituir esta cantidad en (6), hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7}$$

Como habíamos pronosticado, observe que (7) no está definida en $x = -1$ o $x = 1$. La función seno inverso o arcsen es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$.

***Tangente inversa***: $y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\tan y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}. \tag{8}$$

Debido a la identidad $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, (8) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

***Secante inversa***: Para $|x| > 1$ y $0 \le y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \le \pi$,

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \sec y.$$

Al diferenciar implícitamente la última ecuación obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \tag{10}$$

Debido a las restricciones sobre $y$, tenemos $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, $|x| > 1$. Por tanto, (10) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{11}$$

Es posible deshacernos del signo $\pm$ en (11) al observar en la figura 2.5.17*b*) que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es positiva para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. Así, (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{12}$$

El resultado en (12) puede volver a escribirse en forma más breve usando el símbolo de valor absoluto:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{13}$$

La derivada de la composición de una función trigonométrica inversa con una función diferenciable $u = g(x)$ se obtiene a partir de la regla de la cadena.

**Teorema 4.8.5** Funciones trigonométricas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}. \tag{16}$$

En las fórmulas en (14) debe tenerse $|u| < 1$, mientras que en las fórmulas en (16) debe tenerse $|u| > 1$.

**EJEMPLO 4** Derivada del seno inverso

Diferencie $y = \operatorname{sen}^{-1} 5x$.

**Solución** Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

**EJEMPLO 5** Derivada de la tangente inversa

Diferencie $y = \tan^{-1}\sqrt{2x+1}$.

**Solución** Con $u = \sqrt{2x+1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{1+(2x+1)} \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{(2x+2)\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** Derivada de la secante inversa

Diferencie $y = \sec^{-1} x^2$.

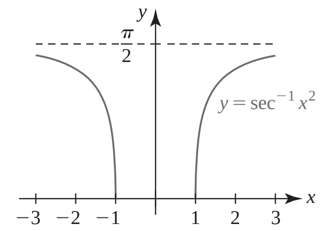


FIGURA 4.8.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

**Solución** Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}x^2 \\ &= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}. \qquad (17)\end{aligned}$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 4.8.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$.

**EJEMPLO 7** Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.

**Solución** Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x\cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones $f$ y $f'$ en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - \tfrac{2\pi}{3}$$

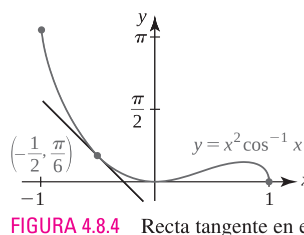


FIGURA 4.8.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de $f$ es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 4.8.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar.

## 4.8 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, sin graficar determine si la función $f$ dada tiene una inversa.

**1.** $f(x) = 10x^3 + 8x + 12$

**2.** $f(x) = -7x^5 - 6x^3 - 2x + 17$

**3.** $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

**4.** $f(x) = x^4 - 2x^2$

En los problemas 5 y 6, use (3) para encontrar la derivada de $f^{-1}$ en el punto indicado.

**5.** $f(x) = 2x^3 + 8$; $\left(f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right)$

**6.** $f(x) = -x^3 - 3x + 7$; $(f(-1), -1)$

En los problemas 7 y 8, encuentre $f^{-1}$. Use (3) para encontrar $(f^{-1})'$ y luego compruebe este resultado por diferenciación directa de $f^{-1}$.

**7.** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ **8.** $f(x) = (5x + 7)^3$

En los problemas 9-12, sin encontrar la inversa, encuentre, en el valor indicado de $x$, el punto correspondiente sobre la gráfica de $f^{-1}$. Luego use (4) para encontrar una ecuación de la recta tangente en este punto.

**9.** $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 7$; $x = 3$ **10.** $y = \dfrac{2x+1}{4x-1}$; $x = 0$

**11.** $y = (x^5 + 1)^3$; $x = 1$

**12.** $y = 8 - 6\sqrt[3]{x+2}$; $x = -3$

En los problemas 13-32, encuentre la derivada de la función dada.

**13.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(5x - 1)$ **14.** $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$

**15.** $y = 4\cot^{-1}\dfrac{x}{2}$ **16.** $y = 2x - 10\sec^{-1}5x$

**17.** $y = 2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}$ **18.** $y = (\tan^{-1}x)(\cot^{-1}x)$

**19.** $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}2x}{\cos^{-1}2x}$ **20.** $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen}x}$

**21.** $y = \dfrac{1}{\tan^{-1}x^2}$ **22.** $y = \dfrac{\sec^{-1}x}{x}$

**23.** $y = 2\operatorname{sen}^{-1}x + x\cos^{-1}x$

**24.** $y = \cot^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**25.** $y = \left(x^2 - 9\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right)^3$ **26.** $y = \sqrt{x - \cos^{-1}(x+1)}$

**27.** $F(t) = \arctan\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ **28.** $g(t) = \arccos\sqrt{3t+1}$

**29.** $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos 4x)$ **30.** $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{2}\right)$

**31.** $f(x) = \tan(\operatorname{sen}^{-1}x^2)$ **32.** $f(x) = \cos(x\operatorname{sen}^{-1}x)$

En los problemas 33 y 34, use diferenciación implícita para encontrar $dy/dx$.

**33.** $\tan^{-1}y = x^2 + y^2$ **34.** $\operatorname{sen}^{-1}y - \cos^{-1}x = 1$

En los problemas 35 y 36, demuestre que $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

**35.** $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$

**36.** $f(x) = \tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x)$.

En los problemas 37 y 38, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**37.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{2}$; $x = 1$

**38.** $y = (\cos^{-1}x)^2$; $x = 1/\sqrt{2}$

En los problemas 39 y 40, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de $x$.

**39.** $f(x) = x\tan^{-1}x$; $x = 1$

**40.** $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1)$; $x = \dfrac{1}{2}$

**41.** Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 5 - 2\operatorname{sen}x$, $0 \le x \le 2\pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = \sqrt{3}x + 1$.

**42.** Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \arctan x$ cuya pendiente es $\frac{1}{4}$.

### ≡ Piense en ello

**43.** Si $f$ y $(f^{-1})'$ son diferenciables, use (3) para encontrar una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

# 4.9 Derivada de funciones exponenciales

**Introducción** En la sección 2.6 vimos que la función exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, está definida para todos los números reales; es decir, el dominio de $f$ es $(-\infty, \infty)$. Al revisar la figura 2.6.2 observamos que $f$ es continua en todas partes. Resulta que una función exponencial también es diferenciable en todas partes. En esta sección desarrollaremos la derivada de $f(x) = b^x$.

**Derivada de una función exponencial** Para encontrar la derivada de una función exponencial $f(x) = b^x$ usamos la definición de la derivada proporcionada en (2) de la definición 4.2.1. Primero calculamos el cociente diferencial

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

en tres pasos. Para la función exponencial $f(x) = b^x$, tenemos

*i*) $f(x+h) = b^{x+h} = b^x b^h$ ← leyes de los exponentes

*ii*) $f(x+h) - f(x) = b^{x+h} - b^x = b^x b^h - b^x = b^x(b^h - 1)$ ← leyes de los exponentes y factorización

*iii*) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \cdot \dfrac{b^h - 1}{h}.$

En el cuarto paso, el paso de cálculo, hacemos $h \to 0$ pero en forma semejante a las derivadas de sen $x$ y cos $x$ en la sección 4.5, no hay forma evidente de cancelar la $h$ en el cociente diferencial *iii*). No obstante, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}. \tag{2}$$

Debido a que $b^x$ no depende de la variable $h$, (2) puede escribirse como

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}. \tag{3}$$

A continuación se presentan algunos resultados sorprendentes. Puede demostrarse que el límite en (3),

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}, \tag{4}$$

existe para toda base positiva $b$. No obstante, como sería de esperar, para cada base $b$ obtenemos una respuesta diferente. Así, por conveniencia, la expresión en (4) se denotará por el símbolo $m(b)$. Entonces, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = b^x m(b). \tag{5}$$

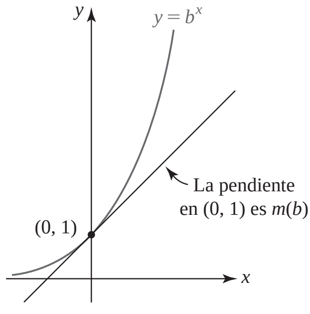



FIGURA 4.9.1 Encuentre una base $b$ de modo que la pendiente $m(b)$ de la recta tangente en (0, 1) sea 1

Se solicita al lector aproximar el valor de $m(b)$ en los cuatro casos $b = 1.5$, 2, 3 y 5 en los problemas 57-60 de la sección “Desarrolle su competencia 4.9”. Por ejemplo, puede demostrar que $m(10) \approx 2.302585\ldots$ y como una consecuencia, si $f(x) = 10^x$, entonces

$$f'(x) = (2.302585\ldots)10^x. \tag{6}$$

Es posible que comprenda mejor lo que evalúa $m(b)$ al evaluar (5) en $x = 0$. Puesto que $b^0 = 1$, tenemos $f'(0) = m(b)$. En otras palabras, $m(b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = b^x$ en $x = 0$; es decir, en la intersección $y$ (0, 1). Vea la FIGURA 4.9.1. Dado que es necesario calcular una $m(b)$ diferente para cada base $b$, y que es probable que $m(b)$ sea un número “espantoso” como en (6), con el tiempo la siguiente pregunta surge de manera *natural*:

- ¿Hay alguna base $b$ para la cual $m(b) = 1$? (7)

**Derivada de la función exponencial natural** Para contestar la pregunta planteada en (7), es necesario volver a las definiciones de $e$ proporcionadas en la sección 2.6. En específico, (4) de la sección 2.6,

$$e = \lim_{h\to 0} (1 + h)^{1/h} \tag{8}$$

constituye el mecanismo para responder la pregunta planteada en (7). Sabemos que, a nivel intuitivo, la igualdad en (8) significa que cuando $h$ se aproxima cada vez más a 0 entonces $(1 + h)^{1/h}$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número $e$. Así, para valores de $h$ cercanos a 0, tenemos la aproximación $(1 + h)^{1/h} \approx e$ y así se concluye que $1 + h \approx e^h$. La última expresión escrita en la forma

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1 \tag{9}$$

sugiere que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{10}$$

Puesto que el miembro izquierdo de (10) es $m(e)$, tenemos la respuesta a la pregunta planteada en (7):

- La base $b$ para la cual $m(b) = 1$ es $b = e$. (11)

Además, por (3) hemos descubierto un resultado maravillosamente simple. La derivada de $f(x) = e^x$ es $e^x$. En resumen,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \tag{12}$$

El resultado en (12) es el mismo que $f'(x) = f(x)$. Además, si $c \neq 0$ es una constante, entonces la otra función diferente de cero $f$ en cálculo cuya derivada es igual a sí misma es $y = ce^x$ puesto que por la regla del múltiplo constante de la sección 4.3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} ce^x = c\frac{d}{dx} e^x = ce^x = y.$$

**Otro repaso a la derivada de $f(x) = b^x$** En el análisis precedente vimos que $m(e) = 1$, pero se dejó sin contestar la pregunta de si $m(b)$ tiene un valor exacto para todo $b > 0$. Y lo tiene. A partir de la identidad $e^{\ln b} = b$, $b > 0$, podemos escribir cualquier función exponencial $f(x) = b^x$ en términos de la base $e$:

$$f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x(\ln b)}.$$

Por la regla de la cadena, la derivada de $b^x$ es

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x(\ln b)} = e^{x(\ln b)} \cdot \frac{d}{dx} x(\ln b) = e^{x(\ln b)}(\ln b).$$

Volviendo a $b^x = e^{x(\ln b)}$, la línea precedente muestra que

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x(\ln b). \tag{13}$$

Al relacionar el resultado en (5) con el de (13) concluimos que $m(b) = \ln b$. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = 10^x$ es $f'(x) = 10^x(\ln 10)$. Debido a que $\ln 10 \approx 2.302585$ observamos que $f'(x) = 10^x(\ln 10)$ es lo mismo que el resultado en (6).

A continuación se proporcionan las formas de los resultados de la regla de la cadena en (12) y (13).

**Teorema 4.9.1** Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}, \tag{14}$$

y

$$\frac{d}{dx} b^u = b^u(\ln b)\frac{du}{dx}. \tag{15}$$

## EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

***a)*** $y = e^{-x}$ ***b)*** $y = e^{1/x^3}$ ***c)*** $y = 8^{5x}$.

**Solución**

***a)*** Con $u = -x$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}.$$

***b***) Al volver a escribir $u = 1/x^3$ como $u = x^{-3}$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^{-3} = e^{1/x^3}(-3x^{-4}) = -3\,\frac{e^{1/x^3}}{x^4}.$$

***c***) Con $u = 5x$, por (15) tenemos

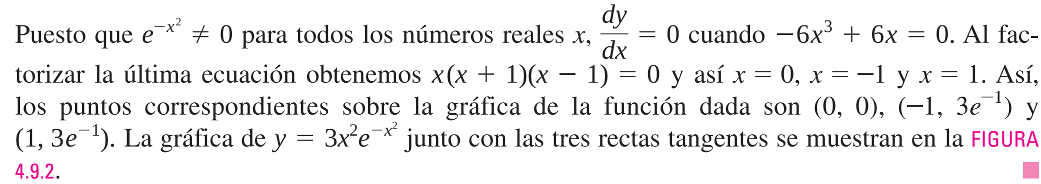
$$\frac{dy}{dx} = 8^{5x} \cdot (\ln 8) \cdot \frac{d}{dx} 5x = 5 \cdot 8^{5x} (\ln 8).$$ ■

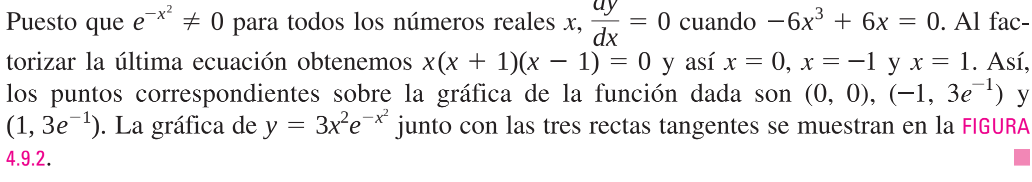
**EJEMPLO 2** Reglas del producto y de la cadena

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = 3x^2 e^{-x^2}$ donde la recta tangente es horizontal.

**Solución** Se usa la regla del producto junto con (14):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \frac{d}{dx} e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx} 3x^2\\ &= 3x^2(-2xe^{-x^2}) + 6xe^{-x^2}\\ &= e^{-x^2}(-6x^3 + 6x).\end{aligned}$$





Puesto que $e^{-x^2} \neq 0$ para todos los números reales $x$, $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $-6x^3 + 6x = 0$. Al factorizar la última ecuación obtenemos $x(x + 1)(x - 1) = 0$ y así $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Así, los puntos correspondientes sobre la gráfica de la función dada son $(0, 0)$, $(-1, 3e^{-1})$ y $(1, 3e^{-1})$. La gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ junto con las tres rectas tangentes se muestran en la FIGURA 4.9.2. ■

FIGURA 4.9.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

En el ejemplo siguiente se recuerda el hecho de que una ecuación exponencial puede escribirse en una forma logarítmica equivalente. En particular, se usa (9) de la sección 2.6 en la forma

$$y = e^x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \ln y. \tag{16}$$

**EJEMPLO 3** Recta tangente paralela a una recta

Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$.

**Solución** Sea $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 2e^{-x_0})$ el punto desconocido sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$. Entonces, a partir de la derivada $f'(x) = -2e^{-x}$, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'(x_0) = -2e^{-x_0}$. Puesto que $y = -4x - 2$ y la recta tangente es paralela en ese punto, las pendientes son iguales:

$$f'(x_0) = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad -2e^{-x_0} = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad e^{-x_0} = 2.$$

A partir de (16), la última ecuación proporciona $-x_0 = \ln 2$ o $x_0 = -\ln 2$. Por tanto, el punto es $(-\ln 2, 2e^{\ln 2})$. Puesto que $e^{\ln 2} = 2$, el punto es $(-\ln 2, 4)$. En la FIGURA 4.9.3, la línea proporcionada está a la izquierda y la recta tangente está a la derecha. ■

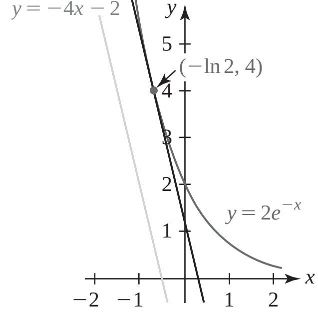



FIGURA 4.9.3 Gráfica de la función y rectas en el ejemplo 3

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Los números $e$ y $\pi$ son **trascendentes**, así como irracionales. Un número trascendente es un número que *no* es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional pero no trascendente, puesto que es una raíz de la ecuación polinomial $x^2 - 2 = 0$. El hecho de que el número $e$ sea trascendente fue demostrado por el matemático francés **Charles Hermite** (1822-1901) en 1873, mientras que el matemático alemán **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) demostró nueve años después que $\pi$ es trascendente. Esta última demostración evidenció de manera concluyente que resolver la "cuadratura del círculo" con regla y compás era imposible.

## 4.9 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-26, encuentre la derivada de la función dada.

**1.** $y = e^{-x}$

**2.** $y = e^{2x+3}$

**3.** $y = e^{\sqrt{x}}$

**4.** $y = e^{\operatorname{sen} 10x}$

**5.** $y = 5^{2x}$

**6.** $y = 10^{-3x^2}$

**7.** $y = x^3e^{4x}$

**8.** $y = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x$

**9.** $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$

**10.** $f(x) = \dfrac{xe^x}{x + e^x}$

**11.** $y = \sqrt{1 + e^{-5x}}$

**12.** $y = (e^{2x} - e^{-2x})^{10}$

**13.** $y = \dfrac{2}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$

**14.** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

**15.** $y = \dfrac{e^{7x}}{e^{-x}}$

**16.** $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$

**17.** $y = (e^3)^{x-1}$

**18.** $y = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^{100}$

**19.** $f(x) = e^{x^{1/3}} + (e^x)^{1/3}$

**20.** $f(x) = (2x + 1)^3e^{-(1-x)^4}$

**21.** $f(x) = e^{-x} \tan e^x$

**22.** $f(x) = \sec e^{2x}$

**23.** $f(x) = e^{x\sqrt{x^2+1}}$

**24.** $y = e^{\frac{x+2}{x-2}}$

**25.** $y = e^{e^{x^2}}$

**26.** $y = e^x + e^{x+e^{-x}}$

**27.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (e^x + 1)^2$ en $x = 0$.

**28.** Encuentre la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$ en $x = 0$.

**29.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = e^x$ donde la recta tangente es paralela a $3x - y = 7$.

**30.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = 5x + e^{2x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = 6x$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar y obtenga la gráfica de cada función.

**31.** $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$

**32.** $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada de orden superior indicada.

**33.** $y = e^{x^2}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

**34.** $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

**35.** $y = \operatorname{sen} e^{2x}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

**36.** $y = x^2e^x$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 37 y 38, $C_1$ y $C_2$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

**37.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$; $\quad y'' + y' - 6y = 0$

**38.** $y = C_1e^{-x} \cos 2x + C_2e^{-x} \operatorname{sen} 2x$; $\quad y'' + 2y' + 5y = 0$

**39.** Si $C$ y $k$ son constantes reales, demuestre que la función $y = Ce^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y' = ky$.

**40.** Use el problema 39 para encontrar una función que satisfaga las condiciones dadas.

*a)* $y' = -0.01y \quad$ y $\quad y(0) = 100$

*b)* $\dfrac{dP}{dt} - 0.15P = 0 \quad$ y $\quad P(0) = P_0$

En los problemas 41-46, use diferenciación implícita para encontrar $dy/dx$.

**41.** $y = e^{x+y}$

**42.** $xy = e^y$

**43.** $y = \cos e^{xy}$

**44.** $y = e^{(x+y)^2}$

**45.** $x + y^2 = e^{x/y}$

**46.** $e^x + e^y = y$

**47.** *a)* Trace la gráfica de $f(x) = e^{-|x|}$.

*b)* Encuentre $f'(x)$.

*c)* Trace la gráfica de $f'$.

*d)* ¿La función es diferenciable en $x = 0$?

**48.** *a)* Demuestre que la función $f(x) = e^{\cos x}$ es periódica con periodo $2\pi$.

*b)* Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de $f$ donde la tangente es horizontal.

*c)* Trace la gráfica de $f$.

### ≡ Aplicaciones

**49.** La función logística

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}},$$

donde $a$ y $b$ son constantes positivas, a menudo sirve como modelo matemático para una población en crecimiento pero limitada.

*a)* Demuestre que $P(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$

*b)* La gráfica de $P(t)$ se denomina **curva logística**, donde $P(0) = P_0$ es la población inicial. Considere el caso donde $a = 2$, $b = 1$ y $P_0 = 1$. Encuentre asíntotas horizontales para la gráfica de $P(t)$ al determinar los límites $\lim_{t\to-\infty} P(t)$ y $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

*c)* Grafique $P(t)$.

*d)* Encuentre el o los valores de $t$ para los cuales $P''(t) = 0$.

**50.** El **modelo matemático de Jenss** (1937) constituye una de las fórmulas empíricas más precisas para pronosticar la estatura $h$ (en centímetros) en términos de la edad $t$ (en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años):

$$h(t) = 79.04 + 6.39t - e^{3.26-0.99t}.$$

*a)* ¿Qué estatura pronostica este modelo para un niño de 2 años?

*b)* ¿Cuán rápido crece en estatura un niño de 2 años?

*c)* Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $h$ sobre el intervalo $[\frac{1}{4}, 6]$.

*d)* Use la gráfica del inciso *c)* para estimar la edad de un niño en edad preescolar que mide 100 cm de estatura.

## Piense en ello

51. Demuestre que la intersección con el eje $x$ de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = x_0$ está una unidad a la derecha de $x_0$.

52. ¿Cómo está relacionada la recta tangente a la gráfica de $y = e^x$ en $x = 0$ con la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = 0$?

53. Explique por qué sobre la gráfica de $y = e^x$ no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a $2x + y = 1$.

54. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = e^x$ que pasan por el origen.

En los problemas 55 y 56, el símbolo $n$ representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

55. $\dfrac{d^n}{dx^n}\sqrt{e^x}$

56. $\dfrac{d^n}{dx^n}xe^{-x}$

## Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 57-60, use una calculadora para estimar el valor $m(b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{b^h - 1}{h}$ para $b = 1.5$, $b = 2$, $b = 3$ y $b = 5$ al llenar la tabla siguiente.

57.

| $h \to 0$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | 0.000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{(1.5)^h - 1}{h}$ | | | | | | |

58.

| $h \to 0$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | 0.000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{2^h - 1}{h}$ | | | | | | |

59.

| $h \to 0$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | 0.000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{3^h - 1}{h}$ | | | | | | |

60.

| $h \to 0$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | 0.000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{5^h - 1}{h}$ | | | | | | |

61. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que $f$ es diferenciable para toda $x$. Use la definición de la derivada para calcular $f'(0)$.

# 4.10 Derivada de funciones logarítmicas

**Introducción** Debido a que la inversa de la función exponencial $y = b^x$ es la función logarítmica $y = \log_b x$, la derivada de la segunda función puede encontrarse de tres maneras: (3) de la sección 4.8, diferenciación implícita o a partir de la definición fundamental (2) en la sección 4.2. Demostraremos los dos últimos métodos.

**Derivada de la función logaritmo natural** Por (9) de la sección 2.6 sabemos que $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$. Por diferenciación implícita, la regla de la cadena y (14) de la sección 4.9,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}e^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = e^y\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Al sustituir $e^y$ por $x$, obtenemos el siguiente resultado:

Así como en las funciones trigonométricas inversas, la derivada de la inversa de la función exponencial natural es una función algebraica.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

**Derivada de $f(x) = \log_b x$** Precisamente de la misma manera en que se obtuvo (1), la derivada de $y = \log_b x$ puede obtenerse al diferenciar implícitamente $x = b^y$.

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}b^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = b^y(\ln b)\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y(\ln b)}.$$

Al sustituir $b^y$ por $x$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}. \tag{2}$$

Puesto que $\ln e = 1$, (2) se vuelve (1) cuando $b = e$.

## EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $f(x) = x^2 \ln x$.

**Solución** Por la regla del producto y (1), tenemos

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}\ln x + (\ln x)\cdot\frac{d}{dx}x^2 = x^2\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\cdot 2x$$

o bien,

$$f'(x) = x + 2x\ln x.$$

## EJEMPLO 2 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \log_{10} x$ en $x = 2$.

**Solución** Por (2), la derivada de $y = \log_{10} x$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 10)}.$$

Con ayuda de una calculadora, la pendiente de la recta tangente en $(2, \log_{10} 2)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2\ln 10} \approx 0.2171.$$

Los resultados en (1) y (2) se resumen en forma de regla de la cadena.

**Teorema 4.10.1** Derivadas de funciones logarítmicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \tag{3}$$

y

$$\frac{d}{dx}\log_b u = \frac{1}{u(\ln b)}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

## EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Diferencie

***a)*** $f(x) = \ln(\cos x)$ y ***b)*** $y = \ln(\ln x)$.

**Solución**

***a)*** Por (3), con $u = \cos x$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\text{sen}\, x)$$

o bien,

$$f'(x) = -\tan x.$$

***b)*** Al usar de nuevo (3), ahora con $u = \ln x$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}.$$

**EJEMPLO 4** Regla de la cadena

Diferencie $f(x) = \ln x^3$.

**Solución** Debido a que $x^3$ debe ser positiva, se entiende que $x > 0$. Así, por (3), con $u = x^3$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^3 = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}.$$

**Solución alterna:** Por *iii*) de las leyes de los logaritmos (teorema 2.6.1), $\ln N^c = c \ln N$ y así es posible volver a escribir $y = \ln x^3$ como $y = 3 \ln x$ y después diferenciar:

$$f(x) = 3\frac{d}{dx}\ln x = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Aunque el dominio del logaritmo natural $y = \ln x$ es el conjunto $(0, \infty)$, el dominio de $y = \ln|x|$ se extiende al conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Para los números en este último dominio,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} &\text{para } x > 0, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \\ &\text{para } x < 0, \quad \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Las derivadas en (5) prueban que para $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Así, el resultado en (6) se generaliza por la regla de la cadena. Para una función diferenciable $u = g(x)$, $u \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}. \tag{7}$$

**EJEMPLO 5** Uso de (6)

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -2$ y $x = 2$.

**Solución** Puesto que (6) proporciona $dy/dx = 1/x$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

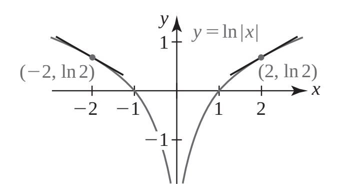



FIGURA 4.10.1 Gráficas de las rectas tangentes y función en el ejemplo 5

Debido a que $\ln|-2| = \ln 2$, (8) proporciona, respectivamente, las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(-2, \ln 2)$ y $(2, \ln 2)$. Observe en la FIGURA 4.10.1 que la gráfica de $y = \ln|x|$ es simétrica con respecto al eje $y$; de igual manera, las rectas tangentes son simétricas.

**EJEMPLO 6** Uso de (7)

Diferencie

***a***) $y = \ln(2x - 3)$ y ***b***) $y = \ln|2x - 3|$.

**Solución**

***a***) Para $2x - 3 > 0$, o $x > \frac{3}{2}$, por (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\cdot\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{9}$$

***b***) Para $2x - 3 \neq 0$, o $x \neq \frac{3}{2}$, por (7) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\cdot\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{10}$$

Aunque (9) y (10) *parecen* iguales, definitivamente no se trata de la misma función. La diferencia consiste simplemente en que el dominio de la derivada en (9) es el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, mientras el dominio de la derivada en (10) es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{3}{2}$. ■

**EJEMPLO 7** Una distinción

Las funciones $f(x) = \ln x^4$ y $g(x) = 4 \ln x$ no son las mismas. Puesto que $x^4 > 0$ para toda $x \neq 0$, el dominio de $f$ es el conjunto de números reales excepto $x = 0$. El dominio de $g$ es el intervalo $(0, \infty)$. Así,

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \text{mientras} \qquad g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$ ■

**EJEMPLO 8** Simplificar antes de diferenciar

Diferencie $y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$.

**Solución** Al usar las leyes de los logaritmos proporcionadas en la sección 2.6 para $x > 0$, podemos volver a escribir el miembro derecho de la función dada como

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(M/N) = \ln M - \ln N \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(MN) = \ln M + \ln N \\ &= \frac{1}{2}\ln x + 4\ln(2x+7) - 2\ln(3x^2+1) && \leftarrow \ln N^c = c \ln N \end{aligned}$$

de modo que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{2x+7}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{3x^2+1}\cdot 6x$$

o bien, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1}.$$ ■

**Diferenciación logarítmica** La diferenciación de una función complicada $y = f(x)$ que contiene productos, cocientes y potencias puede simplificarse por medio de una técnica denominada **diferenciación logarítmica**. El procedimiento consta de tres pasos.

## Directrices para diferenciación logarítmica

*i*) Tome el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$. Use las propiedades generales de los logaritmos para simplificar tanto como sea posible el miembro derecho de $\ln y = \ln f(x)$.

*ii*) Diferencie implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln f(x).$$

*iii*) Puesto que la derivada del miembro izquierdo es $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$, multiplique ambos miembros por $y$ y sustituya $y$ por $f(x)$.

Ahora ya sabe cómo diferenciar cualquier función del tipo

$$y = (\text{constante})^{\text{variable}} \qquad \text{y} \qquad y = (\text{variable})^{\text{constante}}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\pi^x = \pi^x(\ln \pi) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}x^{\pi} = \pi x^{\pi-1}.$$

Hay funciones donde tanto la base como el exponente son variables:

$$y = (\text{variable})^{\text{variable}}. \tag{11}$$

Por ejemplo, $f(x) = (1 + 1/x)^x$ es una función del tipo descrito en (11). Recuerde que en la sección 2.6 vimos que $f(x) = (1 + 1/x)^x$ desempeñaba un papel importante en la definición del número $e$. A pesar de que no se desarrollará una fórmula general para la derivada de funciones del tipo dado en (11), es posible obtener sus derivadas por medio del proceso de diferenciación logarítmica. El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar $dy/dx$.

**EJEMPLO 9** Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$.

**Solución** Al tomar el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación dada y simplificar obtenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x. \quad \leftarrow \text{propiedad } iii) \text{ de las leyes de los logaritmos. Sección 1.6}$$

Luego se diferencia implícitamente:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\ln x \quad \leftarrow \text{regla del producto}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye } y \text{ por } x^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x). \quad \leftarrow \text{denominador común y leyes de los exponentes}$$

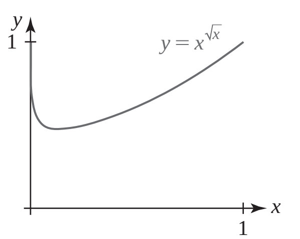



FIGURA 4.10.2 Gráfica de la función en el ejemplo 9

La gráfica de $y = x^{\sqrt{x}}$ en la FIGURA 4.10.2 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. Observe que la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto donde $dy/dx = 0$. Por tanto, la coordenada $x$ del punto de tangencia horizontal se determina a partir de $2 + \ln x = 0$ o $\ln x = -2$. La última ecuación proporciona $x = e^{-2}$. ■

**EJEMPLO 10** Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

**Solución** Observe que la función dada no contiene logaritmos. Entonces podemos encontrar $dy/dx$ usando una aplicación ordinaria de las reglas del cociente, del producto y de potencias. Este procedimiento, que es tedioso, puede evitarse al tomar primero el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada, simplificar como se hizo en el ejemplo con las leyes de los logaritmos y *luego* diferenciar implícitamente. Se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada y se simplifica el miembro derecho:

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$$

$$= \ln\sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln(8x + 3)^5 - \ln(2x^2 + 7)^{2/3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x^4 + 6x^2) + 5\ln(8x + 3) - \frac{2}{3}\ln(2x^2 + 7).$$

Al diferenciar la última línea con respecto a $x$ obtenemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4 + 6x^2}\cdot(4x^3 + 12x) + 5\cdot\frac{1}{8x + 3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x^2 + 7}\cdot 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right] \quad \leftarrow \text{ambos lados se multiplican por } y$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right]. \quad \leftarrow y \text{ se sustituye por la expresión original}$$ ■

**Posdata: Otro repaso a la derivada de $f(x) = \log_b x$** Como se afirmó en la introducción de esta sección, podemos obtener la derivada de $f(x) = \log_b x$ al usar la definición de la derivada. Por (2) de la sección 4.2,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log_b \frac{x+h}{x} \quad \leftarrow \text{álgebra y las leyes de los logaritmos}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad \leftarrow \text{división de } x + h \text{ entre } x$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad \leftarrow \text{multiplicación por } x/x = 1$$
$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \quad \leftarrow \text{las leyes de los logaritmos}$$
$$= \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]. \tag{12}$$

El último paso, tomar el límite dentro de la función logarítmica, se justifica al invocar la continuidad de la función sobre $(0, \infty)$ y suponer que el límite entre corchetes existe. Si en la última ecuación se hace $t = h/x$, entonces, puesto que $x$ es fija, $h \to 0$ implica $t \to 0$. En consecuencia, por (4) de la sección 2.6 vemos que

$$\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e.$$

Por tanto, el resultado en (12) muestra que

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x}\log_b e. \tag{13}$$

◀ Quienes poseen un ojo agudo y gran memoria han observado que (13) no es lo mismo que (2). Los resultados son equivalentes, puesto que por las fórmulas de cambio de base para logaritmos tenemos que $\log_b e = \ln e/\ln b = 1/\ln b$.

Una vez que se hace la elección "natural" de $b = e$, (13) se vuelve (1) puesto que $\log_e e = \ln e = 1$.

**Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Finalmente, ya es posible demostrar la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, (3) de la sección 4.3, para todos los números reales exponentes $n$. Nuestra demostración usa el siguiente hecho: para $x > 0$, $x^n$ se define para todos los números reales $n$. Luego, debido a la identidad $x = e^{\ln x}$ podemos escribir

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n\ln x}.$$

Así,
$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln x} = e^{n\ln x}\frac{d}{dx}(n\ln x) = \frac{n}{x}e^{n\ln x}.$$

Al sustituir $e^{n\ln x} = x^n$ en el último resultado se completa la demostración para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{n}{x}x^n = nx^{n-1}.$$

La última fórmula de derivada también es válida para $x < 0$ cuando $n = p/q$ es un número racional y $q$ es un entero impar.

## 4.10 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-24, encuentre la derivada de la función dada.

**1.** $y = 10\ln x$

**2.** $y = \ln 10x$

**3.** $y = \ln x^{1/2}$

**4.** $y = (\ln x)^{1/2}$

**5.** $y = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$

**6.** $y = \ln(x^2 + 1)^{20}$

**7.** $y = x^2\ln x^3$

**8.** $y = x - \ln|5x + 1|$

**9.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$

**10.** $y = x(\ln x)^2$

**11.** $y = \ln\dfrac{x}{x + 1}$

**12.** $y = \dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$

**13.** $y = -\ln|\cos x|$

**14.** $y = \dfrac{1}{3}\ln|\operatorname{sen} 3x|$

**15.** $y = \dfrac{1}{\ln x}$

**16.** $y = \ln\dfrac{1}{x}$

**17.** $f(x) = \ln(x\ln x)$

**18.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

**19.** $g(x) = \sqrt{\ln\sqrt{x}}$

**20.** $w(\theta) = \theta\operatorname{sen}(\ln 5\theta)$

**21.** $H(t) = \ln t^2(3t^2 + 6)$

**22.** $G(t) = \ln\sqrt{5t + 1}(t^3 + 4)^6$

**23.** $f(x) = \ln\dfrac{(x + 1)(x + 2)}{x + 3}$

**24.** $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{(3x + 2)^5}{x^4 + 7}}$

**25.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = 1$.

**26.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$.

**27.** Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(e^{3x} + x)$ en $x = 0$.

**28.** Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(xe^{-x^3})$ en $x = 1$.

**29.** Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $f'$ en el punto en que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x^2$ es 4.

**30.** Determine el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ donde la recta tangente es perpendicular a $x + 4y = 1$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

**31.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **32.** $f(x) = x^2 \ln x$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada indicada y simplifique tanto como pueda.

**33.** $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ **34.** $\dfrac{d}{dx}\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

**35.** $\dfrac{d}{dx}\ln(\sec x + \tan x)$ **36.** $\dfrac{d}{dx}\ln(\csc x - \cot x)$

En los problemas 37-40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

**37.** $y = \ln x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ **38.** $y = x \ln x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

**39.** $y = (\ln|x|)^2$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **40.** $y = \ln(5x - 3)$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 41 y 42, $C_1$ y $C_2$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada para $x > 0$.

**41.** $y = C_1x^{-1/2} + C_2x^{-1/2} \ln x$; $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

**42.** $y = C_1x^{-1}\cos\left(\sqrt{2} \ln x\right) + C_2x^{-1} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2} \ln x\right)$;
$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los problemas 43-48, use diferenciación implícita para encontrar $dy/dx$.

**43.** $y^2 = \ln xy$ **44.** $y = \ln(x + y)$

**45.** $x + y^2 = \ln\dfrac{x}{y}$ **46.** $y = \ln xy^2$

**47.** $xy = \ln(x^2 + y^2)$ **48.** $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

En los problemas 49-56, use diferenciación logarítmica para encontrar $dy/dx$.

**49.** $y = x^{\operatorname{sen} x}$ **50.** $y = (\ln|x|)^x$

**51.** $y = x(x - 1)^x$ **52.** $y = \dfrac{(x^2 + 1)^x}{x^2}$

**53.** $y = \dfrac{\sqrt{(2x + 1)(3x + 2)}}{4x + 3}$ **54.** $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

**55.** $y = \dfrac{(x^3 - 1)^5(x^4 + 3x^3)^4}{(7x + 5)^9}$ **56.** $y = x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}$

**57.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

**58.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln x)^x$ en $x = e$.

En los problemas 59 y 60, encuentre el punto sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar a fin de obtener la gráfica de cada función sobre el intervalo [0.01, 1].

**59.** $y = x^x$ **60.** $y = x^{2x}$

## ≡ Piense en ello

**61.** Encuentre las derivadas de
***a)*** $y = \tan x^x$ ***b)*** $y = x^xe^{x^x}$ ***c)*** $y = x^{x^x}$.

**62.** Encuentre $d^2y/dx^2$ para $y = \sqrt{x^x}$.

**63.** La función $f(x) = \ln|x|$ no es diferenciable sólo en $x = 0$. La función $g(x) = |\ln x|$ no es diferenciable en $x = 0$ ni en otro valor de $x > 0$. ¿Cuál es?

**64.** Encuentre una manera para calcular $\dfrac{d}{dx}\log_x e$.

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

**65.** ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$ sobre el intervalo $(0, 5\pi)$.
***b)*** Explique por qué en ciertos intervalos parece que no hay gráfica. Identifique los intervalos.

**66.** ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = |\cos x|^{\cos x}$ sobre el intervalo $[0, 5\pi]$.
***b)*** Determine, por lo menos aproximadamente, los valores de $x$ en el intervalo $[0, 5\pi]$ para los cuales la tangente a la gráfica es horizontal.

**67.** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 - 12 \ln x$. Luego encuentre al valor *exacto* del menor valor de $f(x)$.

# 4.11 Derivada de funciones hiperbólicas

**Introducción** Si alguna vez ha visitado el Arco de San Luis, Missouri, que mide 630 pies de altura, quizá se haya preguntado: ¿cuál es la forma del arco?, y recibido la respuesta críptica: la forma de una catenaria invertida. La palabra *catenaria* proviene de la palabra latina *catena* y significa literalmente "cadena colgante" (los romanos usaban una cadena para suje-

tar a los perros). Es posible demostrar que la forma que asumen un alambre flexible, una cadena, un cable o una cuerda colgantes suspendidos en dos puntos es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{k}{2}(e^{cx} + e^{-cx}) \tag{1}$$

para elecciones idóneas de las constantes $c$ y $k$. La gráfica de cualquier función de la forma dada en (1) se denomina **catenaria**.

El Arco de San Luis, Missouri.

**Funciones hiperbólicas** Combinaciones como (1) que implican las funciones exponenciales $e^x$ y $e^{-x}$ ocurren tan a menudo en matemáticas que ameritan definiciones especiales.

**Definición 4.11.1** Seno y coseno hiperbólico

Para cualquier número real $x$, el **seno hiperbólico** de $x$ es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

y el **coseno hiperbólico** de $x$ es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3}$$

Puesto que el dominio de cada una de las funciones exponenciales $e^x$ y $e^{-x}$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$, el dominio de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \cosh x$ es $(-\infty, \infty)$. Por (2) y (3) de la definición 4.11.1, también resulta evidente que

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \cosh 0 = 1.$$

La forma del Arco de San Luis, Missouri, está basada en el modelo matemático

$$y = A - B\cosh(Cx/L).$$

donde $A = 693.8597$, $B = 68.7672$, $L = 299.2239$, $C = 3.0022$, y $x$ y $y$ se miden en pies. Cuando $x = 0$, se obtiene la altura aproximada de 630 pies.

En forma análoga a las funciones trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ que están definidas en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, las cuatro funciones hiperbólicas adicionales se definen en términos de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

**Definición 4.11.2** Otras funciones hiperbólicas

Para un número real $x$, la **tangente hiperbólica** de $x$ es

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{4}$$

la **cotangente hiperbólica** de $x$, $x \neq 0$, es

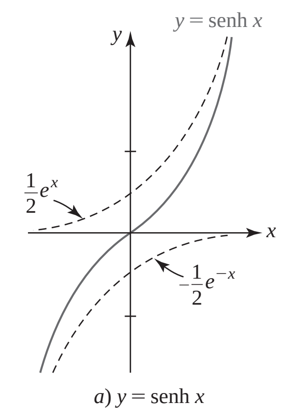
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{5}$$

la **secante hiperbólica** de $x$ es

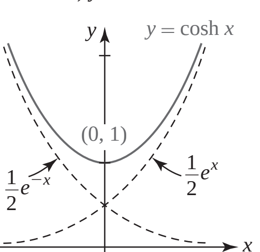
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \tag{6}$$

la **cosecante hiperbólica** de $x$, $x \neq 0$, es

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \tag{7}$$



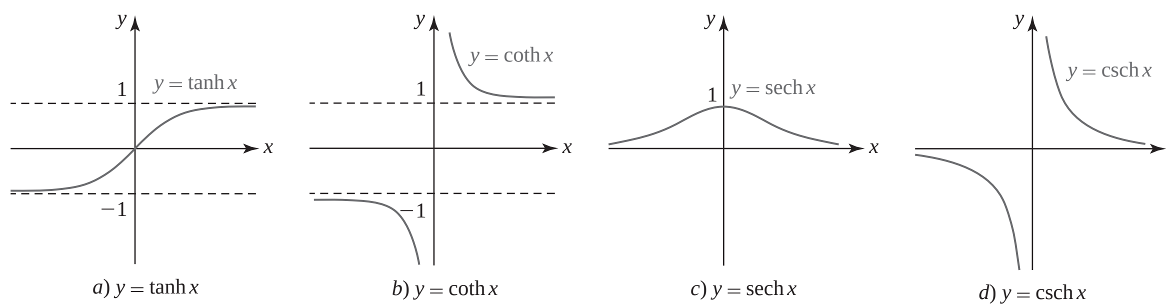

a) $y = \operatorname{senh} x$




b) $y = \cosh x$

FIGURA 4.11.1 Gráficas del seno y coseno hiperbólicos

**Gráficas de funciones hiperbólicas** Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se proporcionan en la FIGURA 4.11.1. Observe la semejanza de la gráfica en la figura 4.11.1*b*) y la forma del Arco de San Luis, Missouri, en la foto al principio de esta sección. Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se muestran en la FIGURA 4.11.2. Observe que $x = 0$ es una asíntota vertical de las gráficas de $y = \coth x$ y $y = \operatorname{csch} x$.




a) $y = \tanh x$ b) $y = \coth x$ c) $y = \operatorname{sech} x$ d) $y = \operatorname{csch} x$

FIGURA 4.11.2 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas

**Identidades** Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, cuentan con muchas identidades que son semejantes a las de las funciones trigonométricas. Observe que las gráficas en la figura 4.11.1*a*) y *b*) son simétricas con respecto al origen y al eje *y*, respectivamente. En otras palabras, $y = \operatorname{senh} x$ es una función impar y $y = \cosh x$ es una función par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x, \tag{8}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x. \tag{9}$$

En trigonometría, una identidad fundamental es $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Para funciones hiperbólicas, el análogo de esta identidad es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \tag{10}$$

Para demostrar (10) recurrimos a (2) y (3) de la definición 4.11.1:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Las ecuaciones (8) a (10) y otras once identidades se resumen en el siguiente teorema.

**Teorema 4.11.1** Identidades hiperbólicas

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ | $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$ | (11) |
| $\cosh(-x) = \cosh x$ | $\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$ | (12) |
| $\tanh(-x) = -\tanh x$ | $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$ | (13) |
| $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ | $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$ | (14) |
| $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ | $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$ | (15) |
| $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ | $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$ | (16) |
| $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$ | $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$ | (17) |

**Derivadas de funciones hiperbólicas** Las derivadas de las funciones hiperbólicas se concluyen por (14) de la sección 4.9 y las reglas de diferenciación; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x. \tag{18}$$

En forma semejante, a partir de la definición del coseno hiperbólico en (3) debe resultar evidente que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x. \tag{19}$$

Para diferenciar, por ejemplo, la tangente hiperbólica, se usan la regla del cociente y la definición que se proporcionó en (4):

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

$$= \frac{\cosh x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \cdot \frac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \leftarrow \text{por (10), esto es igual a 1}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \tag{20}$$

Las derivadas de las seis funciones hiperbólicas en el caso más general se concluyen por la regla de la cadena.

**Teorema 4.11.2** Derivadas de las funciones hiperbólicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\,\frac{du}{dx}, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\,\frac{du}{dx}, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u\,\frac{du}{dx}. \tag{23}$$

Usted debe tomar nota cuidadosa de la ligera diferencia en los resultados en las ecuaciones (21) a (23) y las fórmulas análogas para las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{mientras} \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \quad \text{mientras} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

## EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

***a)*** $y = \operatorname{senh}\sqrt{2x+1}$   ***b)*** $y = \coth x^3$.

**Solución**

***a)*** Por el primer resultado en (21),

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\sqrt{2x+1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}$$

$$= \cosh\sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2\right)$$

$$= \frac{\cosh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

*b*) Por el segundo resultado en (22),

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x^3 \cdot \frac{d}{dx}x^3$$
$$= -\operatorname{csch}^2 x^3 \cdot 3x^2.$$

## EJEMPLO 2 Valor de una derivada

Evalúe la derivada de $y = \dfrac{3x}{4 + \cosh 2x}$ en $x = 0$.

**Solución** Por la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 + \cosh 2x) \cdot 3 - 3x(\operatorname{senh} 2x \cdot 2)}{(4 + \cosh 2x)^2}.$$

Debido a que senh $0 = 0$ y cosh $0 = 1$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

**Funciones hiperbólicas inversas** Al analizar la figura 4.11.1*a*) observamos que $y = \operatorname{senh} x$ es una función uno a uno. Es decir, para cualquier número real $y$ en el rango $(-\infty, \infty)$ del seno hiperbólico corresponde sólo un número real $x$ en su dominio $(-\infty, \infty)$. Por tanto, $y = \operatorname{senh} x$ tiene una función inversa que escribimos $y = \operatorname{senh}^{-1} x$. Vea la FIGURA 4.11.3*a*). Así como en el análisis anterior de las funciones trigonométricas inversas en la sección 2.5, esta última notación es equivalente a $x = \operatorname{senh} y$. A partir de la figura 4.11.2*a*) también observamos que $y = \tanh x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(-1, 1)$ también es uno a uno y tiene una inversa $y = \tanh^{-1} x$ con dominio $(-1, 1)$ y rango $(-\infty, \infty)$. Vea la figura 4.11.3*c*). Pero por las figuras 4.11.1*b*) y 4.11.2*c*) resulta evidente que $y = \cosh x$ y $y = \operatorname{sech} x$ no son funciones uno a uno, de modo que no tienen funciones inversas a menos que sus dominios se restrinjan en forma conveniente. Al analizar la figura 4.11.1*b*) observamos que cuando el dominio de $y = \cosh x$ se restringe al intervalo $[0, \infty)$, el rango correspondiente es $[1, \infty)$. Entonces, el dominio de la función inversa $y = \cosh^{-1} x$ es $[1, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. Vea la figura 4.11.3*b*). Las gráficas de todas las funciones hiperbólicas inversas junto con sus dominios y rangos se resumen en la figura 4.11.3.

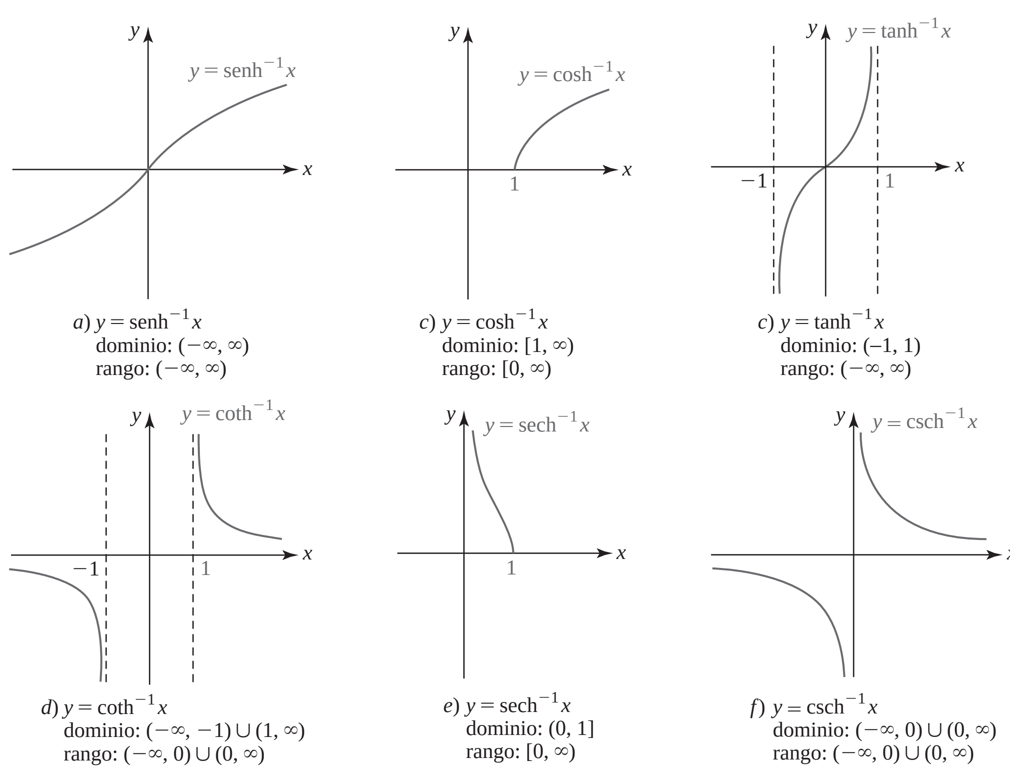



FIGURA 4.11.3 Gráficas de las inversas de las funciones hiperbólicas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

**Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos** Debido a que todas las funciones hiperbólicas están definidas en términos de combinaciones de $e^x$, no debe sorprender el hecho de encontrar que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos del logaritmo natural. Por ejemplo, $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ es equivalente a $x = \operatorname{senh} y$, de modo que

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \qquad \text{o bien,} \qquad 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \qquad \text{o bien,} \qquad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Debido a que la última ecuación es cuadrática en $e^y$, la fórmula cuadrática proporciona

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \tag{24}$$

Luego, es necesario rechazar la solución correspondiente al signo menos en (24) porque $e^y > 0$ pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. Así, tenemos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \qquad \text{o bien,} \qquad y = \operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En forma semejante, para $y = \tanh^{-1}x$, $|x| < 1$,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

proporciona

$$e^y(1 - x) = (1 + x)e^{-y}$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

o bien,

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Se han demostrado dos resultados del siguiente teorema.

**Teorema 4.11.3** Identidades logarítmicas

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1 \tag{25}$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),\ |x| < 1 \qquad \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right),\ |x| > 1 \tag{26}$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1 \qquad \operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right),\ x \neq 0 \tag{27}$$

Las identidades anteriores constituyen un medio conveniente para obtener los valores numéricos de una función hiperbólica inversa. Por ejemplo, con ayuda de una calculadora, a partir del primer resultado en (25) en el teorema 4.11.3 vemos que cuando $x = 4$,

$$\operatorname{senh}^{-1}4 = \ln\left(4 + \sqrt{17}\right) \approx 2.0947.$$

**Derivadas de funciones hiperbólicas inversas** Para encontrar la derivada de una función hiperbólica inversa es posible proceder de dos formas. Por ejemplo, si

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x \qquad \text{entonces} \qquad x = \operatorname{senh} y.$$

Al usar diferenciación implícita es posible escribir

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{senh} y$$

$$1 = \cosh y\,\frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

El resultado anterior puede obtenerse de otra manera. Por el teorema 4.11.3 sabemos que

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En consecuencia, por la derivada del logaritmo obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\right) \quad \leftarrow \text{por (3) de la sección 3.9}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Esencialmente, se ha demostrado la primera entrada en (28) en el siguiente teorema.

**Teorema 4.11.4** Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\ u > 1, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\quad |u| < 1, \qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\ |u| > 1, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\ 0 < u < 1, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx},\ u \neq 0. \tag{30}$$

## EJEMPLO 3 Derivada del coseno hiperbólico inverso

Diferencie $y = \cosh^{-1}(x^2+5)$.

**Solución** Con $u = x^2 + 5$, por la segunda fórmula en (28) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+5)^2-1}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{2x}{\sqrt{x^4+10x^2+24}}.$$

■

## EJEMPLO 4 Derivada de la tangente hiperbólica inversa

Diferencie $y = \tanh^{-1} 4x$.

**Solución** Con $u = 4x$ por la primera fórmula en (29) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(4x)^2}\cdot\frac{d}{dx}4x = \frac{4}{1-16x^2}.$$

■

## EJEMPLO 5 Reglas del producto y de la cadena

Diferencie $y = e^{x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$.

**Solución** Por la regla del producto y la primera fórmula en (30) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\underbrace{\left(\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\right)}_{\text{por la primera fórmula en (30)}} + \underbrace{2xe^{x^2}}_{\text{por (14) de la sección 4.8}}\operatorname{sech}^{-1} x$$

$$= -\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} + 2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1} x.$$

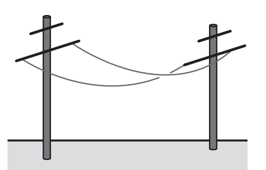
■

## $\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) Como se mencionó en la introducción de esta sección, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = k \cosh cx$, $k$ y $c$ constantes, se denomina **catenaria**. La forma que asume un alambre flexible o una cuerda pesada que cuelgan entre dos postes básicamente es la misma que la de la función coseno hiperbólico. Además, si dos anillos circulares se mantienen juntos en forma vertical y no están muy separados entre sí, entonces una película jabonosa estirada entre los anillos asume una superficie con área mínima. La superficie es una porción de una **catenoide**, que es la superficie que obtenemos al hacer girar una catenaria alrededor del eje $x$. Vea la FIGURA 4.11.4.

*ii*) La semejanza entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas va más allá de las fórmulas de derivadas y las identidades básicas. Si $t$ es un ángulo medido en radianes cuyo lado terminal es $OP$, entonces las coordenadas de $P$ sobre una *circunferencia* unitaria $x^2 + y^2 = 1$ son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Luego, el área del sector sombreado que se muestra en la FIGURA 4.11.5*a*) es $A = \frac{1}{2}t$ y así $t = 2A$. De esta forma, las *funciones circulares* $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ pueden considerarse funciones del área $A$.

Tal vez usted ya sepa que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se denomina *hipérbola*. Debido a que $\cosh t \geq 1$ y $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, se concluye que las coordenadas de un punto $P$ sobre la rama derecha de la hipérbola son $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$. Además, puede demostrarse que el área del sector hiperbólico en la figura 4.11.5*b*) está relacionado con el número $t$ por $t = 2A$. Por tanto, vemos el origen del nombre de la *función hiperbólica*.


*a*) cables colgantes

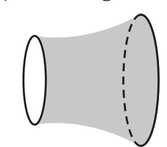
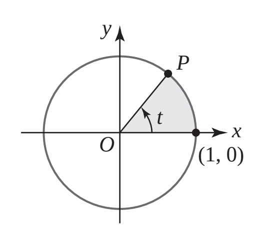
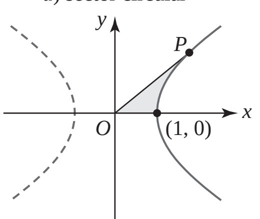

*b*) película de jabón

FIGURA 4.11.4 Catenaria en *a*); catenoide en *b*)



*a*) sector circular



*b*) sector hiperbólico

FIGURA 4.11.5 Círculo en *a*); hipérbola en *b*)

## 4.11 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

### Fundamentos

1. Si $\operatorname{senh} x = -\frac{1}{2}$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.
2. Si $\cosh x = 3$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

En los problemas 3-26, encuentre la derivada de la función dada.

3. $y = \cosh 10x$
4. $y = \operatorname{sech} 8x$
5. $y = \tanh\sqrt{x}$
6. $y = \operatorname{csch}\dfrac{1}{x}$
7. $y = \operatorname{sech}(3x - 1)^2$
8. $y = \operatorname{senh} e^{x^2}$
9. $y = \coth(\cosh 3x)$
10. $y = \tanh(\operatorname{senh} x^3)$
11. $y = \operatorname{senh} 2x \cosh 3x$
12. $y = \operatorname{sech} x \coth 4x$
13. $y = x \cosh x^2$
14. $y = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$
15. $y = \operatorname{senh}^3 x$
16. $y = \cosh^4\sqrt{x}$
17. $f(x) = (x - \cosh x)^{2/3}$
18. $f(x) = \sqrt{4 + \tanh 6x}$
19. $f(x) = \ln(\cosh 4x)$
20. $f(x) = (\ln(\operatorname{sech} x))^2$
21. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + \cosh x}$
22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + \operatorname{senh} x}$
23. $F(t) = e^{\operatorname{senh} t}$
24. $H(t) = e^t e^{\operatorname{csch} t^2}$
25. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{senh} 2t}$
26. $w(t) = \dfrac{\tanh t}{(1 + \cosh t)^2}$
27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{senh} 3x$ en $x = 0$.
28. Encuentre de la recta tangente a la gráfica de $y = \cosh x$ en $x = 1$.

En los problemas 29 y 30, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la tangente es horizontal.

29. $f(x) = (x^2 - 2)\cosh x - 2x \operatorname{senh} x$
30. $f(x) = \cos x \cosh x - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x$

En los problemas 31 y 32, encuentre $d^2y/dx^2$ para la función dada.

31. $y = \tanh x$
32. $y = \operatorname{sech} x$

En los problemas 33 y 34, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ y $k$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

33. $y = C_1 \cosh kx + C_2 \operatorname{senh} kx$; $\quad y'' - k^2 y = 0$
34. $y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + C_3 \cosh kx + C_4 \operatorname{senh} kx$; $y^{(4)} - k^4 y = 0$

En los problemas 35-48, encuentre la derivada de la función dada.

**35.** $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$

**36.** $y = \cosh^{-1}\dfrac{x}{2}$

**37.** $y = \tanh^{-1}(1 - x^2)$

**38.** $y = \coth^{-1}\dfrac{1}{x}$

**39.** $y = \coth^{-1}(\csc x)$

**40.** $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen} x)$

**41.** $y = x \operatorname{senh}^{-1} x^3$

**42.** $y = x^2 \operatorname{csch}^{-1} x$

**43.** $y = \dfrac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x}$

**44.** $y = \dfrac{\coth^{-1} e^{2x}}{e^{2x}}$

**45.** $y = \ln(\operatorname{sech}^{-1} x)$

**46.** $y = x \tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

**47.** $y = (\cosh^{-1} 6x)^{1/2}$

**48.** $y = \dfrac{1}{(\tanh^{-1} 2x)^3}$

## ≡ Aplicaciones

**49.** ***a***) Suponga que $k$, $m$ y $g$ son constantes reales. Demuestre que la función

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)$$

satisface la ecuación diferencial $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$.

***b***) La función $v$ representa la velocidad de una masa $m$ que cae cuando la resistencia del aire se considera proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Encuentre la **velocidad terminal** o limitante $v_{\text{ter}} = \lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ de la masa.

***c***) Suponga que un paracaidista de 80 kg retrasa la apertura del paracaídas hasta que alcanza la velocidad terminal. Determine la velocidad terminal si se sabe que $k = 0.25$ kg/m.

**50.** Una mujer, $M$, se mueve en la dirección positiva del eje $x$, empezando en el origen, jalando un bote a lo largo de la curva $C$, denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 4.11.6. El bote, que inicialmente se encuentra sobre el eje $y$ en $(0, a)$, es jalado por una cuerda de longitud constante $a$ que se mantiene durante todo el movimiento. Una ecuación de la tractriz está dada por

$$x = a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

***a***) Vuelva a escribir esta ecuación usando una función hiperbólica.

***b***) Use diferenciación implícita para demostrar que la ecuación de la tractriz satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

***c***) Interprete geométricamente la ecuación diferencial del inciso *b*).

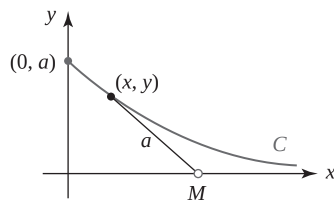



FIGURA 4.11.6 Tractriz en el problema 50

## ≡ Piense en ello

En los problemas 51 y 52, encuentre el valor numérico exacto de la cantidad dada.

**51.** $\cosh(\ln 4)$

**52.** $\operatorname{senh}(\ln 0.5)$

En los problemas 53 y 54, exprese la cantidad dada como una función racional de $x$.

**53.** $\operatorname{senh}(\ln x)$

**54.** $\tanh(3 \ln x)$

**55.** Demuestre que para cualquier entero positivo $n$,

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$$

# Competencia final de la unidad 4

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

## A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

**1.** Si $y = f(x)$ es continua en un número $a$, entonces hay una recta tangente a la gráfica de $f$ en $(a, f(a))$. _____

**2.** Si $f$ es diferenciable en cualquier número real $x$, entonces $f$ es continua en todas partes. _____

**3.** Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente en $(a, f(a))$, entonces $f$ necesariamente es diferenciable en $x = a$. _____

**4.** La razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a $x$ en $x_0$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$. _____

**5.** En $x = -1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ es paralela a la recta $y = 2$. _____

**6.** La derivada de un producto es el producto de las derivadas. _____

**7.** Una función polinomial tiene una recta tangente en todo punto de su gráfica. _____

**8.** Para $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ una ecuación de la recta tangente es $f'(x) = -2x + 5$._____

**9.** La función $f(x) = x/(x^2 + 9)$ es diferenciable sobre el intervalo $[-3, 3]$._____

**10.** Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$. _____

**11.** Si $m$ es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $-1 \leq m \leq 1$. _____

**12.** Para $y = \tan^{-1}x$, $dy/dx > 0$ para toda $x$. _____

**13.** $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\operatorname{sen}^{-1}x$ _____

**14.** La función $f(x) = x^5 + x^3 + x$ tiene una inversa. _____

**15.** Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[2, 8]$, entonces $f(3) > f(5)$. _____

**16.** Si $f$ es una función creciente diferenciable sobre un intervalo, entonces $f'(x)$ también es creciente sobre el intervalo. _____

**17.** La única función para la cual $f'(x) = f(x)$ es $f(x) = e^x$. _____

**18.** $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{|x|}$ _____

**19.** $\frac{d}{dx}\cosh^2 x = \frac{d}{dx}\operatorname{senh}^2 x$ _____

**20.** Toda función hiperbólica inversa es un logaritmo. _____

## B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

**1.** Si $y = f(x)$ es una función polinomial de grado 3, entonces $\frac{d^4}{dx^4}f(x) =$ __________.

**2.** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -\frac{1}{2}$ es __________.

**3.** La pendiente de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/3$ es __________.

**4.** $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, entonces $f'(x) =$ __________.

**5.** Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (x + 3)/(x - 2)$ en $x = 0$ es __________.

**6.** Para $f(x) = 1/(1 - 3x)$ la razón de cambio instantánea de $f'$ con respecto a $x$ en $x = 0$ es __________.

**7.** Si $f'(4) = 6$ y $g'(4) = 3$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 2f(x) - 5g(x)$ en $x = 4$ es __________.

**8.** Si $f(2) = 1$, $f'(2) = 5$, $g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$, entonces $\left.\frac{d}{dx}\frac{x^2 f(x)}{g(x)}\right|_{x=2} =$ __________.

**9.** Si $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) = -1$, $f'(2) = 4$ y $f''(2) = 3$, entonces $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1} =$ __________.

**10.** Si $f'(x) = x^2$, entonces $\frac{d}{dx}f(x^3) =$ __________.

**11.** Si $F$ es una función diferenciable, entonces $\frac{d^2}{dx^2}F(\operatorname{sen} 4x) =$ __________.

**12.** La función $f(x) = \cot x$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \pi]$ porque __________.

**13.** La función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 3$ cuando $a =$ __________ y $b =$ __________.

**14.** Si $f'(x) = \sec^2 2x$, entonces $f(x) =$ __________.

**15.** La recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5 - x + e^{x-1}$ es horizontal en el punto __________.

16. $\frac{d}{dx}2^x =$ ________.

17. $\frac{d}{dx}\log_{10} x =$ ________.

18. Si $f(x) = \ln|2x - 4|$, el dominio de $f'(x)$ es ________.

19. La gráfica de $y = \cosh x$ se denomina ________.

20. $\cosh^{-1} 1 =$ _______.

## C. Ejercicios

En los problemas 1-28, encuentre la derivada de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{4x^{0.3}}{5x^{0.2}}$

2. $y = \dfrac{1}{x^3 + 4x^2 - 6x + 11}$

3. $F(t) = \left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)^{10}$

4. $h(\theta) = \theta^{1.5}(\theta^2 + 1)^{0.5}$

5. $y = \sqrt[4]{x^4 + 16}\,\sqrt[3]{x^3 + 8}$

6. $g(u) = \sqrt{\dfrac{6u - 1}{u + 7}}$

7. $y = \dfrac{\cos 4x}{4x + 1}$

8. $y = 10 \cot 8x$

9. $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2 5x$

10. $y = \tan^2(\cos 2x)$

11. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{x}$

12. $y = \cos x \cos^{-1} x$

13. $y = (\cot^{-1}x)^{-1}$

14. $y = \operatorname{arcsec}(2x - 1)$

15. $y = 2\cos^{-1}x + 2x\sqrt{1 - x^2}$

16. $y = x^2 \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$

17. $y = xe^{-x} + e^{-x}$

18. $y = (e + e^2)^x$

19. $y = x^7 + 7^x + 7^\pi + e^{7x}$

20. $y = (e^x + 1)^{-e}$

21. $y = \ln\left(x\sqrt{4x - 1}\right)$

22. $y = \left(\ln \cos^2 x\right)^2$

23. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

24. $y = (\tan^{-1} x)(\tanh^{-1} x)$

25. $y = xe^{x \cosh^{-1} x}$

26. $y = \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$

27. $y = \operatorname{senh} e^{x^3}$

28. $y = (\tanh 5x)^{-1}$

En los problemas 29-34, encuentre la derivada indicada.

29. $y = (3x + 1)^{5/2}; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}$

30. $y = \operatorname{sen}(x^3 - 2x); \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$

31. $s = t^2 + \dfrac{1}{t^2}; \quad \dfrac{d^4s}{dt^4}$

32. $W = \dfrac{v - 1}{v + 1}; \quad \dfrac{d^3W}{dv^3}$

33. $y = e^{\operatorname{sen} 2x}; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$

34. $f(x) = x^2 \ln x; \quad f'''(x)$

35. Use primero las leyes de los logaritmos para simplificar

$$y = \ln\left|\frac{(x + 5)^4(2 - x)^3}{(x + 8)^{10}\sqrt[3]{6x + 4}}\right|,$$

y luego encuentre $dy/dx$.

36. Encuentre $dy/dx$ para $y = 5^{x^2}x^{\operatorname{sen} 2x}$.

37. Dado que $y = x^3 + x$ es una función uno a uno, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función inversa en $x = 1$.

38. Dado que $f(x) = 8/(1 - x^3)$ es una función uno a uno, encuentre $f^{-1}$ y $(f^{-1})'$.

En los problemas 39 y 40, encuentre $dy/dx$.

**39.** $xy^2 = e^x - e^y$ **40.** $y = \ln(xy)$

**41.** Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ que sea perpendicular a la recta $y = -3x$.

**42.** Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$ donde
***a***) $f''(x) = f(x)$ y ***b***) $f''(x) = f'(x)$.

**43.** Encuentre ecuaciones para las rectas que pasan por $(0, -9)$ que son tangentes a la gráfica de $y = x^2$.

**44.** ***a***) Encuentre la intersección con el eje $x$ de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.
***b***) Encuentre una ecuación de la recta con la misma intersección con el eje $x$ que es perpendicular a la recta tangente en el inciso *a*).
***c***) Encuentre el o los puntos donde la recta del inciso *a*) corta la gráfica de $y = x^2$.

**45.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(9, f(9))$.

**46.** Si $f(x) = (1 + x)/x$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f''$ en $x = 2$?

**47.** Encuentre las coordenadas $x$ de todos los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$, $0 \le x \le 2\pi$, donde la recta tangente es horizontal.

**48.** Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ tal que la recta tangente pase por el origen.

**49.** Suponga que un circuito en serie contiene un capacitor y un resistor variable. Si la resistencia en el instante $t$ está dada por $R = k_1 + k_2t$, donde $k_1$ y $k_2$ son constantes positivas conocidas, entonces la carga $q(t)$ sobre el capacitor está dada por

$$q(t) = E_0C + (q_0 - E_0C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2t}\right)^{1/Ck_2},$$

donde $C$ es una constante denominada **capacitancia** y $E(t) = E_0$ es la tensión aplicada. Demuestre que $q(t)$ satisface la condición inicial $q(0) = q_0$ y

$$(k_1 + k_2t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0.$$

**50.** Suponga que $C_1$ y $C_2$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función

$$y = C_1x + C_2\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1\right]$$

satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

En los problemas 51 y 52, $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

**51.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^{-x} + C_4xe^x$; $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

**52.** $y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + C_3\,x\cos x + C_4\,x\,\text{sen}\,x$; $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

**53.** ***a***) Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y^3 - y + x^2 - 4 = 0$ correspondientes a $x = 2$.
***b***) Encuentre las pendientes de las rectas tangentes en los puntos que se encontraron en el inciso *a*).

**54.** Trace la gráfica de $f'$ a partir de la gráfica de $f$ dada en la FIGURA 4.R.1.

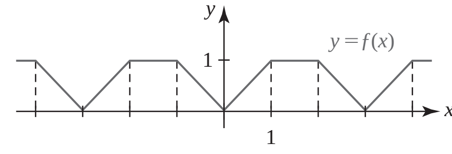



FIGURA 4.R.1 Gráfica para el problema 54

**55.** La gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que se muestra en la FIGURA 4.R.2, se denomina **hipocicloide**.* Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en los puntos correspondientes a $x = \frac{1}{8}$.

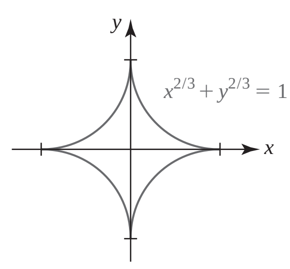



FIGURA 4.R.2 Hipocicloide en el problema 55

**56.** Encuentre $d^2y/dx^2$ para la ecuación del problema 55.

**57.** Suponga

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Encuentre $f'(x)$ para $x \neq 0$. Use la definición de derivada, (2) de la sección 4.2, para determinar si $f'(0)$ existe.

En los problemas 58-61, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de $x$. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

**58.** $f(x) = -3x^2 + 16x + 12, \quad x = 2$

**59.** $f(x) = x^3 - x^2, \quad x = -1$

**60.** $f(x) = \dfrac{-1}{2x^2}, \quad x = \dfrac{1}{2}$

**61.** $f(x) = x + 4\sqrt{x}, \quad x = 4$

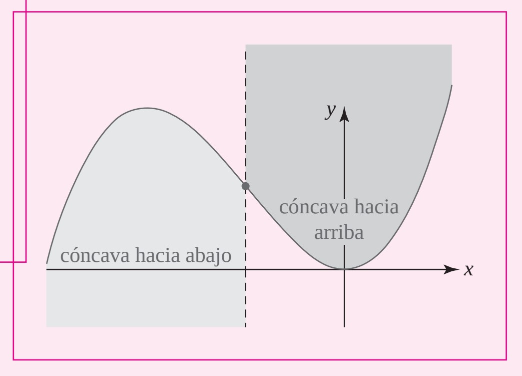
**62.** Encuentre una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta tangente en el punto $(1, 2)$ sobre la gráfica de $f(x) = -4x^2 + 6x$.

**63.** Suponga que $f(x) = 2x + 5$ y $\varepsilon = 0.01$. Encuentre un $\delta > 0$ que garantice que $|f(x) - 7| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 1| < \delta$. Al encontrar $\delta$, ¿qué límite se ha demostrado?

*Ir a la página http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html para ver varios tipos de hipocicloides y sus propiedades.

# Unidad 5

# Aplicaciones de la derivada




**En esta unidad** Las derivadas primera y segunda de una función *f* pueden usarse para determinar la forma de su gráfica. Si imagina la gráfica de una función como una curva que sube y baja, entonces los puntos alto y bajo de la gráfica o, con más precisión, los valores máximo y mínimo de la función, podemos encontrarlos usando la derivada. Como ya vimos, la derivada también proporciona una razón de cambio. En la sección 4.1 vimos brevemente que la razón de cambio con respecto al tiempo *t* de una función que proporciona la posición de un objeto en movimiento es la velocidad del objeto.

Encontrar los valores máximo y mínimo de una función junto con el problema de determinar razones de cambio son dos de los temas centrales de estudio de esta unidad.

## Competencia específica

Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y variación de funciones, y el de diferencial en problemas que requieren aproximaciones.

# 5.1 Movimiento rectilíneo

**Introducción** En la sección 4.1 se definió que el movimiento de un objeto en una línea recta, horizontal o vertical, es un **movimiento rectilíneo**. Una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina **función posición**. La variable $t$ representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta. Recuerde que sobre una escala horizontal, consideramos la dirección $s$ positiva a la derecha de $s = 0$, y sobre una escala vertical, la dirección $s$ positiva la consideramos hacia arriba.

**EJEMPLO 1** Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde $s$ se mide en centímetros y $t$ en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

**Solución** Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 5.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

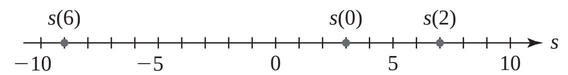



FIGURA 5.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1

**Velocidad y aceleración** Si la **velocidad media** de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud $\Delta t$ es

$$\frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

entonces la razón de cambio instantánea, o velocidad del cuerpo, está dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Así, tenemos la siguiente definición.

**Definición 5.1.1** Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante $t$ es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante $t$ es $|v(t)|$.

La velocidad se mide en centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo (pies/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mi/h), etcétera.

También es posible calcular la razón de cambio de la velocidad.

**Definición 5.1.2** Función aceleración

Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante $t$ es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son metros por segundo por segundo ($m/s^2$), pies por segundo por segundo ($pies/s^2$), millas por hora por hora ($mi/h^2$), etcétera. A menudo, las unidades de la aceleración se leen literalmente "metros por segundo al cuadrado".

**Significado de los signos algebraicos** En la sección 4.1 vimos que siempre que la derivada de una función $f$ es *positiva* sobre un intervalo $I$, entonces $f$ es *creciente* sobre $I$. Geométricamente, la gráfica de una función creciente sube cuando $x$ crece. En forma semejante, si la derivada de una función $f$ es *negativa* sobre $I$, entonces $f$ es *decreciente*, lo cual significa que su gráfica baja cuando $x$ crece. Sobre un intervalo de tiempo para el cual $v(t) = s'(t) > 0$, es posible afirmar que $s(t)$ es creciente. Por tanto, el objeto se mueve *hacia la derecha* sobre una recta horizontal, o *hacia arriba* sobre una recta vertical. Por otra parte, $v(t) = s'(t) < 0$ implica que $s(t)$ es decreciente y que el movimiento es *hacia la izquierda* sobre una recta horizontal o *hacia abajo* sobre una recta vertical. Vea la FIGURA 5.1.2. Si $a(t) = v'(t) > 0$ sobre un intervalo de tiempo, entonces la velocidad $v(t)$ del objeto es *creciente*, mientras $a(t) = v'(t) < 0$ indica que la velocidad $v(t)$ del objeto es *decreciente*. Por ejemplo, una aceleración de $-25$ $m/s^2$ significa que la velocidad decrece por 25 m/s cada segundo. No confunda los términos "velocidad decreciente" y "velocidad creciente" con los conceptos "desaceleración" o "aceleración". Por ejemplo, considere una roca que se deja caer desde la parte superior de un edificio alto. La aceleración de la gravedad es una constante negativa, $-32$ $pies/s^2$. El signo negativo significa que la velocidad de la roca disminuye a partir de cero. Una vez que la roca choca contra el suelo, su rapidez $|v(t)|$ es bastante grande, pero $v(t) < 0$. En específico, un objeto en movimiento rectilíneo sobre, por ejemplo, una recta horizontal *desacelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente). En forma semejante, un objeto en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal *acelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente). En general,

$s(t)$ — *a*) $v(t) > 0$ movimiento hacia la derecha

$s(t)$ — *b*) $v(t) < 0$ movimiento hacia la izquierda

FIGURA 5.1.2 Significado del signo de la función velocidad

Un objeto en movimiento rectilíneo

- **desacelera** cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- **acelera** cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

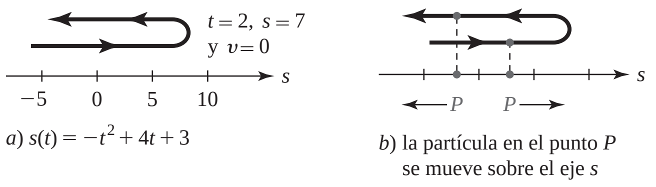
De manera alterna, un objeto desacelera cuando su rapidez $|v(t)|$ es decreciente y acelera cuando su rapidez es creciente.

## EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente. Puesto que la aceleración siempre es negativa, la velocidad siempre es decreciente. Observe que $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se deja que el tiempo $t$ sea negativo y también positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha para el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y se mueve hacia la izquierda para el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento puede representarse por la gráfica que se muestra en la FIGURA 5.1.3*a*). Puesto que el movimiento en realidad se lleva a cabo *sobre* la recta horizontal, usted debe imaginar el movimiento de un punto $P$ que corresponde a la proyección de un punto en la gráfica sobre la recta horizontal. Vea la figura 5.1.3*b*).




*a*) $s(t) = -t^2 + 4t + 3$

*b*) la partícula en el punto $P$ se mueve sobre el eje $s$

FIGURA 5.1.3 Representación del movimiento de la partícula en el ejemplo 2

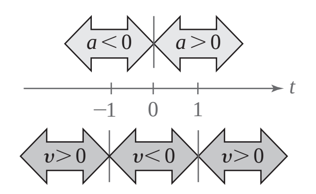



FIGURA 5.1.4 Signos de $v(t)$ y $a(t)$ en el ejemplo 3

## EJEMPLO 3 Partícula que desacelera/acelera

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

**Solución** Los signos algebraicos de las funciones velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) \qquad \text{y} \qquad a(t) = 2t$$

se muestran sobre la escala de tiempo en la FIGURA 5.1.4. Puesto que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos sobre $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, la partícula desacelera sobre estos intervalos de tiempo; $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo algebraico sobre $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, de modo que la partícula acelera sobre estos intervalos de tiempo. ■

En el ejemplo 2 verifique que la partícula desacelera sobre el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y acelera sobre el intervalo de tiempo $(2, \infty)$.

## EJEMPLO 4 Movimiento de una partícula

Un objeto se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$, donde $s$ se mide en centímetros y $t$ en segundos. Use una gráfica para representar el movimiento durante el intervalo de tiempo $[-4, 4]$.

**Solución** La función velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 36t = 4t(t + 3)(t - 3)$$

y la función aceleración es

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2 - 36 = 12\left(t + \sqrt{3}\right)\left(t - \sqrt{3}b\right).$$

Luego, a partir de las soluciones de $v(t) = 0$ podemos determinar los intervalos de tiempo para los cuales $s(t)$ es creciente o decreciente. A partir de la información que se muestra en las tablas siguientes, se construye la función mostrada en la FIGURA 5.1.5. Al inspeccionar las tablas observamos que la partícula desacelera sobre los intervalos de tiempo $(-4, -3)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 3)$ (se muestran en color claro en la figura) y acelera sobre los intervalos de tiempo $\left(-3, -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$, $(3, 4)$ (se muestran en oscuro en la figura).

| Intervalo de tiempo | Signo de $v(t)$ | Dirección de movimiento |
|---|---|---|
| $(-4, -3)$ | $-$ | a la izquierda |
| $(-3, 0)$ | $+$ | a la derecha |
| $(0, 3)$ | $-$ | a la izquierda |
| $(3, 4)$ | $+$ | a la derecha |

| Tiempo | Posición | Velocidad | Aceleración |
|---|---|---|---|
| $-4$ | $-7$ | $-112$ | 156 |
| $-3$ | $-56$ | 0 | 72 |
| 0 | 25 | 0 | $-36$ |
| 3 | $-56$ | 0 | 72 |
| 4 | $-7$ | 112 | 156 |

| Intervalo de tiempo | Signo de $a(t)$ | Velocidad |
|---|---|---|
| $\left(-4, -\sqrt{3}\right)$ | $+$ | creciente |
| $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ | $-$ | decreciente |
| $\left(\sqrt{3}, 4\right)$ | $+$ | creciente |

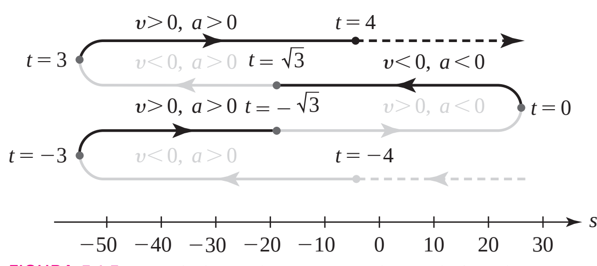



FIGURA 5.1.5 Movimiento de una partícula en el ejemplo 4 ■

## 5.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

### Fundamentos

En los problemas 1-8, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados.

1. $s(t) = 4t^2 - 6t + 1;\quad t = \frac{1}{2}, t = 3$
2. $s(t) = (2t - 6)^2;\quad t = 1, t = 4$
3. $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t;\quad t = -2, t = 2$
4. $s(t) = t^4 - t^3 + t;\quad t = -1, t = 3$
5. $s(t) = t - \frac{1}{t};\quad t = \frac{1}{4}, t = 1$
6. $s(t) = \frac{t}{t + 2};\quad t = -1, t = 0$
7. $s(t) = t + \operatorname{sen} \pi t;\quad t = 1, t = \frac{3}{2}$
8. $s(t) = t \cos \pi t;\quad t = \frac{1}{2}, t = 1$

En los problemas 9-12, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal.

9. $s(t) = t^2 - 4t - 5$
   *a)* ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
   *b)* ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

10. $s(t) = t^2 + 6t + 10$
   *a)* ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = v(t)$?
   *b)* ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $v(t) = -a(t)$?

11. $s(t) = t^3 - 4t$
   *a)* ¿Cuál es la aceleración de la partícula cuando $v(t) = 2$?
   *b)* ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 18$?
   *c)* ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?

12. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$
   *a)* ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?
   *b)* ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?
   *c)* ¿Cuándo desacelera la partícula? ¿Cuándo acelera?

En los problemas 13 y 14, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera.

13. $s(t) = t^3 - 27t$
14. $s(t) = t^4 - t^3$

En los problemas 15-20, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

15. $s(t) = t^2;\quad [-1, 3]$
16. $s(t) = t^3;\quad [-2, 2]$
17. $s(t) = t^2 - 4t - 2;\quad [-1, 5]$
18. $s(t) = (t + 3)(t - 1);\quad [-3, 1]$
19. $s(t) = 2t^3 - 6t^2;\quad [-2, 3]$
20. $s(t) = (t - 1)^2(t - 2);\quad [-2, 3]$

En los problemas 21-28, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

21. $s(t) = 3t^4 - 8t^3;\quad [-1, 3]$
22. $s(t) = t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 60;\quad [-2, 5]$
23. $s(t) = t - 4\sqrt{t};\quad [1, 9]$
24. $s(t) = 1 + \cos \pi t;\quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$
25. $s(t) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t;\quad [0, 4]$
26. $s(t) = \operatorname{sen} \pi t - \cos \pi t;\quad [0, 2]$
27. $s(t) = t^3 e^{-t};\quad [0, \infty)$
28. $s(t) = t^2 - 12 \ln(t + 1);\quad [0, \infty)$
29. En la FIGURA 5.1.6 se muestra la gráfica en el plano $st$ de una función posición $s(t)$ de una partícula que se mueve rectilíneamente. Complete la tabla siguiente si $v(t)$ y $a(t)$ son positivas, negativas o cero. Proporcione los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos sobre los cuales acelera.

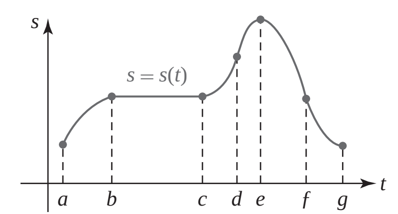



FIGURA 5.1.6 Gráfica para el problema 29

| Intervalo | $v(t)$ | $a(t)$ |
|---|---|---|
| $(a, b)$ | | |
| $(b, c)$ | | |
| $(c, d)$ | | |
| $(d, e)$ | | |
| $(e, f)$ | | |
| $(f, g)$ | | |

30. En la FIGURA 5.1.7 se muestra la gráfica de la función velocidad $v$ de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Elabore una gráfica de una función posición $s$ con esta función velocidad.

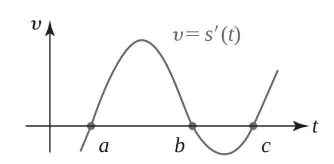



FIGURA 5.1.7 Gráfica para el problema 30

## Aplicaciones

**31.** La altura (en pies) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde un punto a 6 pies por arriba del nivel del suelo la proporciona $s(t) = -16t^2 + 48t + 6$, $0 \leq t \leq T$, donde $T$ es el instante en que el proyectil choca contra el suelo. Vea la FIGURA 5.1.8.

*a*) Determine el intervalo de tiempo para el cual $v > 0$ y el intervalo de tiempo para el cual $v < 0$.

*b*) Encuentre la altura máxima alcanzada por el proyectil.

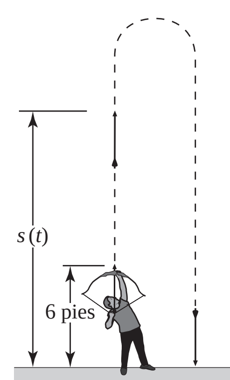



FIGURA 5.1.8 Proyectil en el problema 31

**32.** Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 10t - 20$, donde $s$ se mide en centímetros y $t$ en segundos. Determine la distancia total recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo $[1, 6]$.

En los problemas 33 y 34, use la siguiente información. Cuando se ignora la fricción, la distancia $s$ (en pies) que un cuerpo se mueve hacia abajo sobre un plano inclinado cuya inclinación es $\theta$ está dada por $s(t) = 16t^2 \operatorname{sen} \theta$, $[0, t_1]$, donde $s(0) = 0$, $s(t_1) = L$ y $t$ se mide en segundos. Vea la FIGURA 5.1.9.

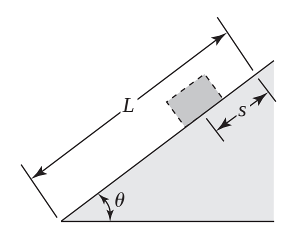



FIGURA 5.1.9 Plano inclinado

**33.** Un objeto se desliza por una colina de 256 pies de longitud con una inclinación de 30°. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del objeto en la parte superior de la colina?

**34.** Un participante en una carrera de automóviles de juguete desciende la colina mostrada en la FIGURA 5.1.10. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del automóvil en la parte inferior de la colina?

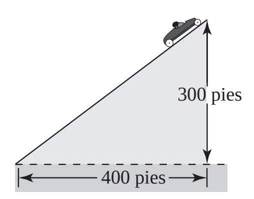



FIGURA 5.1.10 Plano inclinado en el problema 34

**35.** Un cubo, atado con una cuerda a un molinete circular, se deja caer libremente en línea recta. Si se ignora la inercia rotacional del molinete, entonces la distancia que recorre el cubo es igual a la medida en radianes del ángulo indicado en la FIGURA 5.1.11; es decir, $\theta = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 32$ pies/s$^2$ es la aceleración debida a la gravedad. Encuentre la razón a la que cambia la coordenada $y$ de un punto $P$ sobre la circunferencia del molinete en $t = \sqrt{\pi}/4$ s. Interprete el resultado.

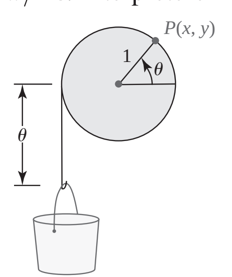



FIGURA 5.1.11 Cubo en el problema 35

**36.** En mecánica, la fuerza $F$ que actúa sobre un cuerpo se define como la razón de cambio de su cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Cuando $m$ es constante, a partir de esta fórmula obtenemos la conocida fórmula denominada segunda ley de Newton $F = ma$, donde la aceleración es $a = dv/dt$. Según la teoría de la relatividad de Einstein, cuando una partícula con masa en reposo $m_0$ se mueve rectilíneamente a gran velocidad (como en un acelerador lineal), su masa varía con la velocidad $v$ según la fórmula $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde $c$ es la velocidad constante de la luz. Demuestre que en la teoría de la relatividad la fuerza $F$ que actúa sobre la partícula es

$$F = \frac{m_0 a}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}},$$

donde $a$ es la aceleración.

# 5.2 Extremos de funciones

**Introducción** Ahora abordaremos el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f$ sobre un intervalo $I$. Veremos que al encontrar estos **extremos** de $f$ (en caso de haber alguno) en muchos casos es posible trazar fácilmente su gráfica. Al encontrar los extremos de una función también es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización. En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostramos cómo puede encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f$ que es continua sobre un intervalo cerrado $I$.

**Extremos absolutos** En la FIGURA 5.2.1 se ha ilustrado la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 3x + 4$. A partir de esta gráfica debe resultar evidente que el valor de la función $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es la coordenada $y$ del vértice, y como la parábola se abre hacia arriba, en el rango de $f$ no hay número menor que $\frac{7}{4}$. Decimos que el extremo $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es el mínimo absoluto de $f$. A continuación se definen los conceptos de máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

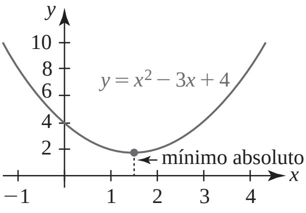


FIGURA 5.2.1 Mínimo absoluto de una función

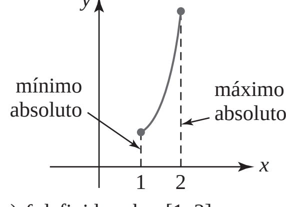
**Definición 5.2.1** Extremos absolutos

*i)* Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función $f$ si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

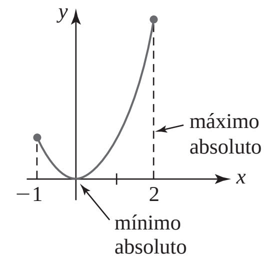
*ii)* Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función $f$ si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

Los extremos absolutos también se denominan **extremos globales**.

A partir de su experiencia al graficar funciones debe serle fácil, en algunos casos, ver cuándo una función posee un máximo o un mínimo absoluto. En general, una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto. La función $f(x) = 4 - x^2$ tiene el máximo absoluto $f(0) = 4$. Una función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene extremos absolutos. Las gráficas de las funciones conocidas $y = 1/x$, $y = x^3$, $y = \tan x$, $y = e^x$ y $y = \ln x$ muestran que éstas no tienen extremos absolutos. Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ tienen un máximo absoluto y un mínimo absoluto.



*a)* $f$ definida sobre $[1, 2]$



*b)* $f$ definida sobre $[-1, 2]$

FIGURA 5.2.2 Gráficas de funciones en el ejemplo 2

**EJEMPLO 1** Extremos absolutos

Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(\pi/2) = 1$ es su máximo absoluto y $f(3\pi/2) = -1$ es su mínimo absoluto. Por periodicidad, los valores máximo y mínimo también ocurren en $x = \pi/2 + 2n\pi$ y $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, respectivamente. ∎

El intervalo sobre el que la función está definida es muy importante en la consideración de extremos.

**EJEMPLO 2** Funciones definidas sobre un intervalo cerrado

**a)** $f(x) = x^2$, definida sólo sobre el intervalo *cerrado* $[1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$. Vea la FIGURA 5.2.2*a*).

**b)** Por otra parte, si $f(x) = x^2$ está definida sobre el intervalo *abierto* $(1, 2)$, entonces $f$ no tiene extremos absolutos. En este caso, $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.

**c)** $f(x) = x^2$ definida sobre $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$, pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$. Vea la figura 5.2.2*b*).

**d)** $f(x) = x^2$ definida sobre $(-1, 2)$, tiene un mínimo absoluto $f(0) = 0$, pero no un máximo absoluto. ∎

Los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2 ilustran el siguiente resultado general.

**Teorema 5.2.1** Teorema del valor extremo

Una función $f$ continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo.

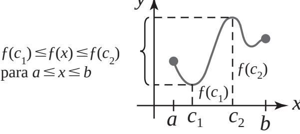
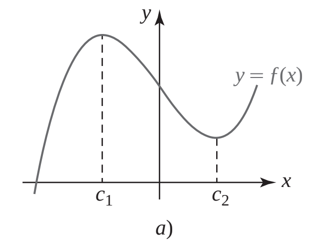


FIGURA 5.2.3 La función $f$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto

En otras palabras, cuando $f$ es continua sobre $[a, b]$, hay números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda $x$ en $[a, b]$. Los valores $f(c_2)$ y $f(c_1)$ son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Vea la FIGURA 5.2.3.

**Extremos de un punto frontera** Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en un punto frontera de un intervalo $I$, como en los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2, decimos que se trata de un **extremo de un punto frontera**. Cuando $I$ no es un intervalo cerrado; es decir, cuando $I$ es un intervalo como $(a, b]$, $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$, entonces aunque $f$ sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto. Vea la FIGURA 5.2.4.



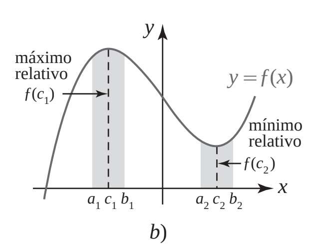




FIGURA 5.2.5 Máximo relativo en $c_1$ y mínimo relativo en $c_2$

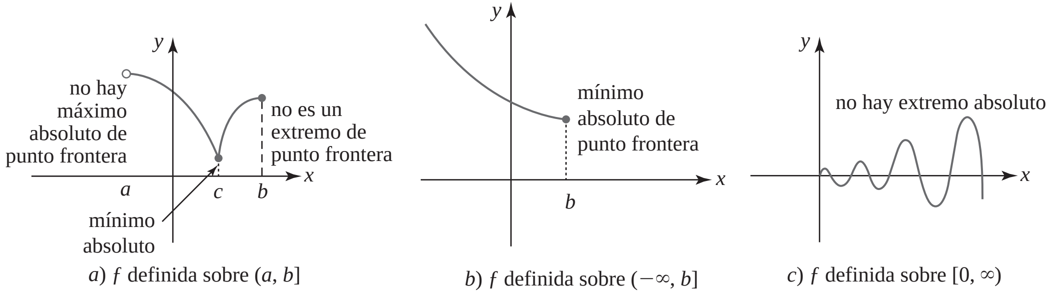



FIGURA 5.2.4 Una función $f$ continua sobre un intervalo que no tiene ningún extremo absoluto

**Extremos relativos** En la FIGURA 5.2.5*a*) se ha ilustrado la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 8$. Debido a que el comportamiento final de $f$ es el de $y = x^3$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Con base en esta observación es posible concluir que esta función polinomial no tiene extremos absolutos. No obstante, suponga que centramos la atención en valores de $x$ próximos a, o en una *vecindad* de, los números $c_1$ y $c_2$. Como se muestra en la figura 5.2.5*b*), $f(c_1)$ es el valor mayor o máximo de la función $f$ cuando se compara con todos los demás valores de la función en el intervalo abierto $(a_1, b_1)$; en forma semejante, $f(c_2)$ es el valor mínimo de $f$ en el intervalo $(a_2, b_2)$. Estos **extremos relativos**, o **locales**, se definen como sigue.

**Definición 5.2.2** Extremos relativos

*i*) Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función $f$ si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $c_1$.

*ii*) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función $f$ si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $c_1$.

Como consecuencia de la definición 5.2.2 podemos concluir que

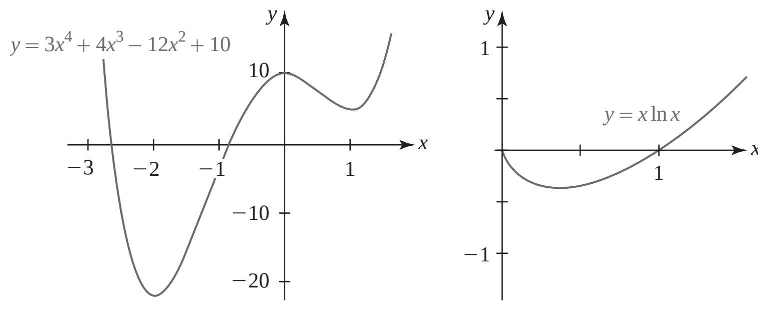
- Todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

Un extremo absoluto de un punto frontera se excluye de ser un extremo relativo con base en el tecnicismo de que alrededor de un punto frontera del intervalo no puede encontrarse un intervalo abierto contenido en el dominio de la función.

Hemos llegado al planteamiento de una pregunta evidente:

- ¿Cómo se encuentran los extremos de una función?

Incluso cuando tenemos gráficas, para la mayor parte de las funciones la coordenada $x$ en que ocurre un extremo no es evidente. Con ayuda de la herramienta para acercar o alejar una página de un dispositivo para graficar, es posible buscar y, por supuesto, aproximar tanto la ubicación como el valor de un extremo. Vea la FIGURA 5.2.6. A pesar de lo anterior, resulta aconsejable poder encontrar la ubicación exacta y el valor exacto de un extremo.




*a*) Mínimo relativo próximo a $x = -2$
Máximo relativo próximo a $x = 0$
Mínimo relativo próximo a $x = 1$

*b*) Mínimo relativo próximo a $x = 0.4$

FIGURA 5.2.6 Ubicación aproximada de extremos relativos

En la figura 5.2.6*a*) se plantea que un mínimo relativo ocurre *cerca* de $x = -2$. Con las herramientas de una calculadora o un SAC es posible convencernos de que este mínimo relativo es realmente un mínimo absoluto o global, pero con las herramientas del cálculo es posible demostrar en verdad que éste es el caso.

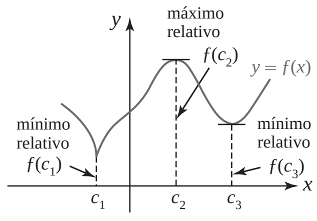



FIGURA 5.2.7 $f$ no es diferenciable en $c_1$; $f'$ es 0 en $c_2$ y $c_3$

**Números críticos** El análisis de la FIGURA 5.2.7 junto con las figuras 5.2.5 y 5.2.6 sugiere que si $c$ es un número en el que la función $f$ tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto correspondiente a $x = c$ o no es diferenciable en $x = c$. Es decir, una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número $c$ recibe un nombre especial.

**Definición 5.2.3** Número crítico

Un **número crítico** de una función $f$ es un número $c$ en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En algunos textos un número crítico $x = c$ se denomina **punto crítico**.

**EJEMPLO 3** Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = x \ln x$.

**Solución** Por la regla del producto,

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = 1 + \ln x.$$

La única solución de $f'(x) = 0$ o $\ln x = -1$ es $x = e^{-1}$. Hasta dos cifras decimales, el número crítico de $f$ es $e^{-1} \approx 0.36$. ■

**EJEMPLO 4** Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$.

**Solución** Al diferenciar y factorizar se obtiene

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Por tanto, observamos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$. Los números críticos de $f$ son $0, -2$ y $1$. ■

**EJEMPLO 5** Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = (x + 4)^{2/3}$.

**Solución** Por la regla de potencias para funciones,

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}.$$

En este caso observamos que $f'(x)$ no existe cuando $x = -4$. Puesto que $-4$ está en el dominio de $f$, concluimos que éste es su número crítico. ■

**EJEMPLO 6** Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

**Solución** Por la regla del cociente, después de simplificar encontramos,

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Ahora, $f'(x) = 0$ cuando el numerador de $f$ es 0. Al resolver la ecuación $x(x - 2) = 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Además, cuando se inspecciona el denominador de $f$ se encuentra que $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$. No obstante, al analizar $f$ se observa que $x = 1$ no está en su dominio, y así los únicos números críticos son 0 y 2. ■

**Teorema 5.2.2** Los extremos relativos ocurren en números críticos

Si una función $f$ tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces $c$ es un número crítico.

**DEMOSTRACIÓN** Suponga que $f(c)$ es un extremo relativo.

*i*) Si $f'(c)$ no existe, entonces, por la definición 5.2.3, $c$ es un número crítico.
*ii*) Si $f'(c)$ existe, entonces hay tres posibilidades: $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Para ahorrar argumentos, también se supondrá que $f(c)$ es un máximo relativo. Así, por la definición 5.2.2 hay algún intervalo abierto que contiene a $c$ donde

$$f(c + h) \leq f(c) \tag{1}$$

donde el número $h$ es suficientemente pequeño en valor absoluto. Entonces, la desigualdad en (1) implica que

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{para } h > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{para } h < 0. \tag{2}$$

Pero como $\lim_{h \to 0} [f(c + h) - f(c)]/h$ existe y es igual a $f'(c)$, las desigualdades en (2) muestran que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, respectivamente. La única forma en que esto puede ocurrir es cuando $f'(c) = 0$. El caso en que $f(c)$ es un mínimo relativo se demuestra en forma semejante. ■

**Extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado** Se ha visto que una función $f$ que es continua sobre un intervalo *cerrado* tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El siguiente teorema indica dónde ocurren estos extremos.

**Teorema 5.2.3** Determinación de extremos absolutos

Si $f$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre ya sea en un punto frontera del intervalo o en un número crítico $c$ en el intervalo abierto $(a, b)$.

El teorema 5.2.3 se resume como sigue:

### Directrices para encontrar extremos sobre un intervalo cerrado

*i*) Evalúe $f$ en los puntos frontera $a$ y $b$ del intervalo $[a, b]$.
*ii*) Encuentre todos los números críticos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo abierto $(a, b)$.
*iii*) Evalúe $f$ en todos los números críticos.
*iv*) Los valores mayor y menor en la lista

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b),$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de $f$ sobre el intervalo $[a, b]$.

**EJEMPLO 7** Determinación de extremos absolutos

Encuentre los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ sobre el intervalo

***a***) $[-3, 1]$ ***b***) $[-3, 8]$.

**Solución** Debido a que $f$ es continua, sólo es necesario evaluar $f$ en los puntos frontera de cada intervalo y en los números críticos dentro de cada intervalo. A partir de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4)$$

vemos que los números críticos de la función $f$ son $-2$ y 4.

***a***) A partir de los datos que se muestran en la tabla siguiente resulta evidente que el máximo absoluto de $f$ sobre el intervalo $[-3, 1]$ es $f(-2) = 30$, y que el mínimo absoluto es el extremo de un punto frontera $f(1) = -24$.

| Sobre $[-3, 1]$ | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $1$ |
| $f(x)$ | 20 | 30 | $-24$ |

***b***) Sobre el intervalo $[-3, 8]$ a partir de la tabla siguiente observamos que $f(4) = -78$ es un mínimo absoluto y que $f(8) = 130$ es un máximo absoluto de un punto frontera.

| Sobre $[-3, 8]$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $4$ | $8$ |
| $f(x)$ | 20 | 30 | $-78$ | 130 |

## $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

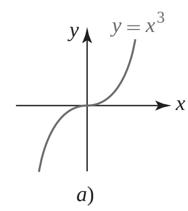
*i*) Una función puede, por supuesto, asumir sus valores máximo y mínimo más de una vez sobre un intervalo. Usted debe comprobar, con ayuda de un dispositivo para graficar, que la función $f(x) = \text{sen}\, x$ alcanza su valor de función máximo 1 cinco veces y su valor de función mínimo $-1$ cuatro veces en el intervalo $[0, 9\pi]$.

*ii*) El converso del teorema 5.2.2 no necesariamente es cierto. En otras palabras:

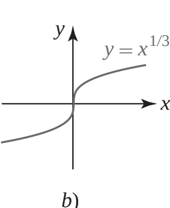
Un número crítico de una función $f$ no necesita corresponder a un extremo relativo.

Considere $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Las derivadas $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ muestran que 0 es un número crítico de ambas funciones. Pero a partir de las gráficas de $f$ y $g$ en la FIGURA 5.2.8 vemos que ninguna función posee algún extremo sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

*iii*) Hemos indicado cómo encontrar los extremos absolutos de una función $f$ que es continua sobre un intervalo cerrado. En las secciones 5.4 y 5.5 usamos la primera y segunda derivada para encontrar los extremos relativos de una función.




*a*)




*b*)

FIGURA 5.2.8 0 es un número crítico para ambas funciones, pero ninguna tiene extremos

## 5.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, use la gráfica de la función dada como ayuda para determinar cualquier extremo absoluto sobre los intervalos indicados.

**1.** $f(x) = x - 4$
***a***) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

**2.** $f(x) = |x - 4|$
***a***) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

**3.** $f(x) = x^2 - 4x$
***a***) $[1, 4]$ ***b***) $[1, 3]$ ***c***) $(-1, 3)$ ***d***) $(4, 5]$

**4.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
***a***) $[-3, 3]$ ***b***) $(-3, 3)$ ***c***) $[0, 3)$ ***d***) $[-1, 1]$

**5.** $f(x) = \tan x$
***a***) $[-\pi/2, \pi/2]$ ***b***) $[-\pi/4, \pi/4]$
***c***) $[0, \pi/3]$ ***d***) $[0, \pi]$

**6.** $f(x) = 2 \cos x$
***a***) $[-\pi, \pi]$ ***b***) $[-\pi/2, \pi/2]$
***c***) $[\pi/3, 2\pi/3]$ ***d***) $[-\pi/2, 3\pi/2]$

En los problemas 7-22, encuentre los números críticos de las funciones dadas.

**7.** $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$
**8.** $f(x) = x^3 + x - 2$
**9.** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
**10.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
**11.** $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$
**12.** $f(x) = x^2(x + 1)^3$
**13.** $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$
**14.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$
**15.** $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$
**16.** $f(x) = x^{2/3} + x$
**17.** $f(x) = (x - 1)^2\sqrt[3]{x + 2}$
**18.** $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt[3]{x + 1}}$
**19.** $f(x) = -x + \text{sen}\, x$
**20.** $f(x) = \cos 4x$
**21.** $f(x) = x^2 - 8 \ln x$
**22.** $f(x) = e^{-x} + 2x$

En los problemas 23-36, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

**23.** $f(x) = -x^2 + 6x$; $[1, 4]$
**24.** $f(x) = (x - 1)^2$; $[2, 5]$
**25.** $f(x) = x^{2/3}$; $[-1, 8]$
**26.** $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1)$; $[-1, 1]$
**27.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$; $[-3, 2]$

**28.** $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x; \quad [-2, 2]$
**29.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1; \quad [-4, 3]$
**30.** $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10; \quad [0, 4]$
**31.** $f(x) = x^4(x - 1)^2; \quad [-1, 2]$
**32.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}; \quad [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
**33.** $f(x) = 2 \cos 2x - \cos 4x; \quad [0, 2\pi]$
**34.** $f(x) = 1 + 5 \operatorname{sen} 3x; \quad [0, \pi/2]$
**35.** $f(x) = 3 + 2 \operatorname{sen}^2 24x; \quad [0, \pi]$
**36.** $f(x) = 2x - \tan x; \quad [-1, 1.5]$

En los problemas 37 y 38, encuentre todos los números críticos. Distinga entre extremos absolutos, extremos de un punto frontera y extremos relativos.

**37.** $f(x) = x^2 - 2|x|; \quad [-2, 3]$
**38.** $f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & -5 \le x \le -2 \\ x^2, & -2 < x \le 1 \end{cases}$

**39.** Considere la función $f$ continua definida sobre $[a, b]$ que se muestra en la FIGURA 5.2.9. Dado que de $c_1$ a $c_{10}$ son números críticos:

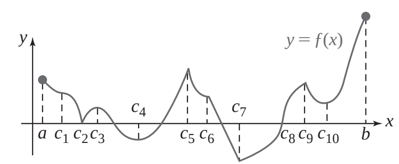


FIGURA 5.2.9 Gráfica para el problema 39

*a*) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x) = 0$.
*b*) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x)$ no está definida.
*c*) Distinga entre los extremos absolutos y los extremos absolutos de un punto frontera.
*d*) Distinga entre los máximos relativos y los mínimos relativos.

**40.** Considere la función $f(x) = x + 1/x$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.

## ≡ Aplicaciones

**41.** La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 320t$, donde $t$ se mide en segundos y $s$ en pies.

*a*) $s(t)$ está definida sólo en el intervalo [0, 20]. ¿Por qué?
*b*) Use los resultados del teorema 5.2.3 para determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil.

**42.** El físico francés **Jean Louis Poiseuille** descubrió que la velocidad $v(r)$ (en cm/s) del flujo sanguíneo que circula por una arteria con sección trasversal de radio $R$ está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde $P$, $\nu$ y $l$ son constantes positivas. Vea la FIGURA 5.2.10.

*a*) Determine el intervalo cerrado sobre el que está definida $v$.
*b*) Determine las velocidades máxima y mínima del flujo sanguíneo.

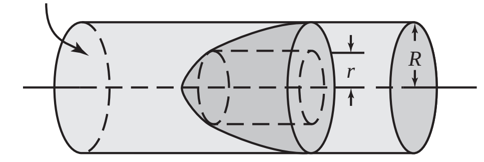


FIGURA 5.2.10 Arteria para el problema 42

## ≡ Piense en ello

**43.** Elabore una gráfica de una función continua $f$ que no tenga extremos absolutos pero sí un máximo relativo y un mínimo relativo que tengan el mismo valor.

**44.** Proporcione un ejemplo de una función continua, definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, para el cual el máximo absoluto es el mismo que el mínimo absoluto.

**45.** Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor. Demuestre que todo valor de $x$ es un número crítico.

**46.** Demuestre que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ no tiene números críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué ocurre cuando $ad - bc = 0$?

**47.** Sea $f(x) = x^n$, donde $n$ es un entero positivo. Determine los valores de $n$ para los cuales $f$ tiene un extremo relativo.

**48.** Analice: ¿por qué una función polinomial de grado $n$ puede tener a lo sumo $n - 1$ números críticos?

**49.** Suponga que $f$ es una función par continua tal que $f(a)$ es un mínimo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

**50.** Suponga que $f$ es una función impar continua tal que $f(a)$ es un máximo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

**51.** Suponga que $f$ es una función par continua que es diferenciable en todas partes. Demuestre que $x = 0$ es un número crítico de $f$.

**52.** Suponga que $f$ es una función diferenciable que tiene sólo un número crítico $c$. Si $k \neq 0$, encuentre los números críticos de:

*a*) $k + f(x)$ *b*) $kf(x)$ *c*) $f(x + k)$ *d*) $f(kx)$

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

**53.** *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = -2 \cos x + \cos 2x$.
*b*) Encuentre los números críticos de $f$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.
*c*) Encuentre los extremos absolutos de $f$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

**54.** En el estudio del crecimiento de los copos de nieve, la fórmula

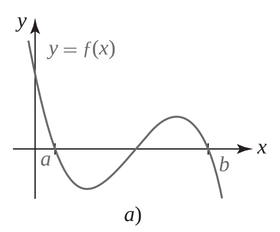
$$I(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{b}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2b}{3\pi} \cos 2\omega t$$

es un modelo matemático para la variación diaria en la intensidad de radiación solar que penetra la superficie de la nieve. Aquí $t$ representa el tiempo medido en horas después del amanecer ($t = 0$) y $\omega = 2\pi/24$.

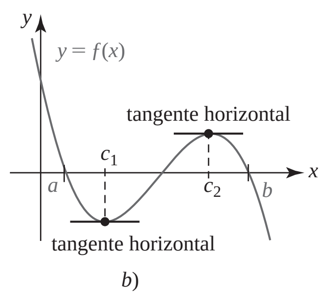
*a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $I$ sobre el intervalo [0, 24]. Use $b = 1$.
*b*) Encuentre los números críticos de $I$ en el intervalo [0, 24].

# 5.3 El teorema del valor medio

**Introducción** Suponga que una función $y = f(x)$ es continua y diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Estas condiciones significan que los números $a$ y $b$ son las coordenadas $x$ de las intersecciones $x$ de la gráfica de $f$. En la FIGURA 5.3.1*a*) se muestra una gráfica típica de una función $f$ que satisface estas condiciones. A partir de la figura 5.3.1*b*) parece válido que debe haber por lo menos un número $c$ en el intervalo abierto $(a, b)$ correspondiente a un punto sobre la gráfica de $f$ donde la tangente es horizontal. Esta observación conduce a un resultado denominado teorema de Rolle. Usaremos este teorema para demostrar el resultado más importante de esta sección: el teorema del valor medio para derivadas.



*a*)



*b*)

FIGURA 5.3.1 Dos puntos donde la tangente es horizontal

**Teorema 5.3.1 Teorema de Rolle**

Sea $f$ una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$. Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces hay un número $c$ en $(a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

**DEMOSTRACIÓN** Ocurre que $f$ es una función constante sobre el intervalo $[a, b]$ o no lo es. Si $f$ es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe tenerse $f'(c) = 0$ para todo número $c$ en $(a, b)$. Luego, si $f$ no es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe haber un número $x$ en $(a, b)$ donde $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Suponga que $f(x) > 0$. Puesto que $f$ es continua sobre $[a, b]$, por el teorema del valor extremo sabemos que $f$ alcanza un máximo absoluto en algún número $c$ en $[a, b]$. Pero por $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) > 0$ para alguna $x$ en $(a, b)$, concluimos que el número $c$ no puede ser un punto frontera de $[a, b]$. En consecuencia, $c$ está en $(a, b)$. Puesto que $f$ es diferenciable sobre $(a, b)$, es diferenciable en $c$. Entonces, por el teorema 5.2.2 tenemos $f'(c) = 0$. La demostración para el caso en que $f(x) < 0$ se concluye en forma semejante. ■

**EJEMPLO 1** Comprobación del teorema de Rolle

Considere la función $f(x) = -x^3 + x$ definida sobre $[-1, 1]$. La gráfica de $f$ se muestra en la FIGURA 5.3.2. Puesto que $f$ es una función polinomial, es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable sobre $(-1, 1)$. También, $f(-1) = f(1) = 0$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos que debe haber por lo menos un número en $(-1, 1)$ para el cual $f'(x) = -3x^2 + 1$ es cero. Para encontrar este número, se resuelve $f'(c) = 0$ o $-3c^2 + 1 = 0$. Esta última conduce a *dos* soluciones en el intervalo: $c_1 = -\sqrt{3}/3 \approx -0.57$ y $c_2 = \sqrt{3}/3 \approx 0.57$. ■

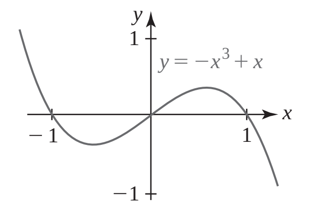


FIGURA 5.3.2 Gráfica de la función en el ejemplo 1

En el ejemplo 1, observe que la función $f$ dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[0, 1]$, así como sobre $[-1, 1]$. En el caso del intervalo $[0, 1]$, $f'(c) = -3c^2 + 1 = 0$ produce la única solución $c = \sqrt{3}/3$.

**EJEMPLO 2** Comprobación del teorema de Rolle

***a***) La función $f(x) = x - 4x^{1/3}$, que se muestra en la FIGURA 5.3.3, es continua sobre $[-8, 8]$ y satisface $f(-8) = f(8) = 0$. Pero no es diferenciable sobre $(-8, 8)$, puesto que en el origen hay una tangente vertical. No obstante, como sugiere la figura, hay dos números $c_1$ y $c_2$ en $(-8, 8)$ donde $f'(x) = 0$. Usted debe comprobar que $f'(-8\sqrt{3}/9) = 0$ y $f'(8\sqrt{3}/9) = 0$. Tenga en cuenta que las hipótesis del teorema de Rolle son condiciones suficientes pero no necesarias. En otras palabras, si no se cumple una de estas tres hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre $(a, b)$ y $f(a) = f(b) = 0$, la conclusión de que en $(a, b)$ hay un número $c$ tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

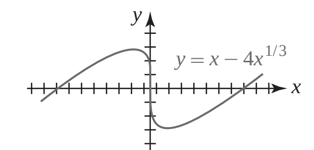


FIGURA 5.3.3 Gráfica de la función $f$ en el ejemplo 2

***b***) Considere otra función $g(x) = 1 - x^{2/3}$. Esta función es continua sobre $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1) = 0$. Pero como la función $f$ anterior, $g$ no es diferenciable en $x = 0$ y por tanto no es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$. En este caso, sin embargo, en $(-1, 1)$ no hay algún $c$ para el cual $f'(c) = 0$. Vea la FIGURA 5.3.4. ■

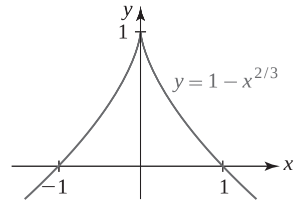


FIGURA 5.3.4 Gráfica de la función $g$ en el ejemplo 2

La conclusión del teorema de Rolle también se cumple cuando la condición $f(a) = f(b) = 0$ se sustituye por $f(a) = f(b)$. La validez de este hecho se ilustra en la FIGURA 5.3.5.

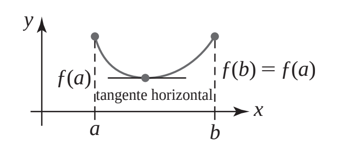


FIGURA 5.3.5 El teorema de Rolle se cumple cuando $f(a) = f(b)$

**Teorema del valor medio** El teorema de Rolle es de utilidad para demostrar el siguiente resultado importante denominado **teorema del valor medio**. Este teorema establece que

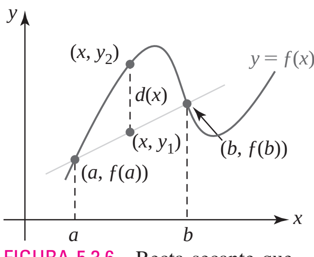



FIGURA 5.3.6 Recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

cuando una función $f$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$, entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La palabra *medio* se refiere aquí a un promedio; es decir, al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo.

**Teorema 5.3.2 Teorema del valor medio para derivadas**

Sea $f$ una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$. Entonces en $(a, b)$ existe un número $c$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**DEMOSTRACIÓN** Como se muestra en la FIGURA 5.3.6, sea $d(x)$ la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

tenemos, como se muestra en la figura, $d(x) = y_2 - y_1$, o bien,

$$d(x) = f(x) - \left[f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)\right].$$

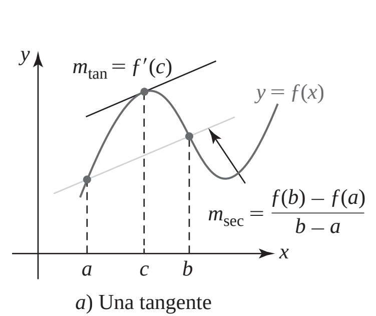
Puesto que $d(a) = d(b) = 0$ y $d(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$, el teorema de Rolle implica que en $(a, b)$ existe un número $c$ para el cual $d'(c) = 0$. Entonces,

$$d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

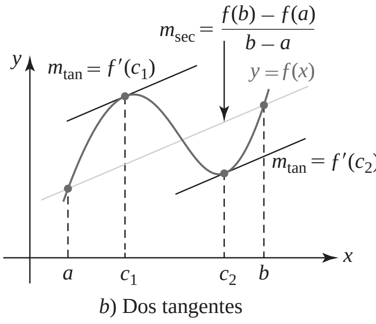
y así $d'(c) = 0$ es lo mismo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \blacksquare$$

Como se indica en la FIGURA 5.3.7, en $(a, b)$ puede haber más de un número $c$ para el que las rectas tangente y secante son paralelas.




a) Una tangente




b) Dos tangentes

FIGURA 5.3.7 Las tangentes son paralelas a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

## EJEMPLO 3 Comprobación del teorema del valor medio

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-1, 3]$, ¿existe un número $c$ en el intervalo abierto $(-1, 3)$ que cumple la conclusión del teorema del valor medio?

**Solución** Puesto que $f$ es una función polinomial, es continua sobre $[-1, 3]$ y diferenciable sobre $(-1, 3)$. Entonces, $f(3) = -9$, $f(-1) = 11$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \qquad \text{y} \qquad f'(c) = 3c^2 - 12.$$

Así, debe tenerse

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Por tanto, $3c^2 = 7$. Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, la única solución en el intervalo $(-1, 3)$ es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$. ■

El teorema del valor medio es muy útil para demostrar otros teoremas. Recuerde de la sección 4.3 que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. El converso de este resultado se demuestra en el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.3** Función constante

Si $f'(x) = 0$ para toda $x$ en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es una constante sobre el intervalo.

**DEMOSTRACIÓN** Sean $x_1$ y $x_2$ dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo $(x_1, x_2)$ hay un número $c$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Pero por hipótesis, $f'(x) = 0$. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ o $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que $x_1$ y $x_2$ se escogen de manera arbitraria, la función $f$ tiene el mismo valor en todos los puntos en el intervalo. Así, $f$ es constante. ■

**Funciones crecientes y decrecientes** Suponga que una función $y = f(x)$ está definida sobre un intervalo $I$ y que $x_1$ y $x_2$ son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. En la sección 2.3 vimos que $f$ es **creciente** sobre $I$ si $f(x_1) < f(x_2)$, y **decreciente** sobre $I$ si $f(x_1) > f(x_2)$. Vea la figura 2.3.4. Intuitivamente, la gráfica de una función creciente *sube* cuando $x$ crece (es decir, la gráfica asciende cuando se lee de izquierda a derecha) y la gráfica de una función decreciente *baja* cuando $x$ crece. Por ejemplo, $y = e^x$ crece sobre $(-\infty, \infty)$ y $y = e^{-x}$ decrece sobre $(-\infty, \infty)$. Por supuesto, una función $f$ puede ser creciente sobre ciertos intervalos y decreciente sobre intervalos diferentes. Por ejemplo, $y = \text{sen}\, x$ crece sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y decrece sobre $[\pi/2, 3\pi/2]$.

La gráfica en la FIGURA 5.3.8 ilustra una función $f$ que es creciente sobre los intervalos $[b, c]$ y $[d, e]$ y decreciente sobre $[a, b]$, $[c, d]$ y $[e, h]$.

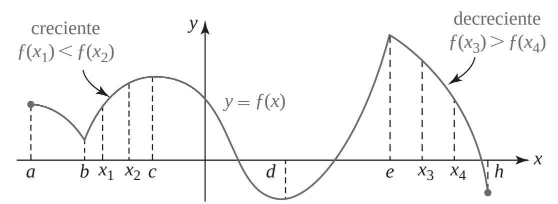


FIGURA 5.3.8 Una función puede crecer sobre algunos intervalos y decrecer en otros

El siguiente teorema es una prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento.

**Teorema 5.3.4** Prueba para crecimiento/decrecimiento

Sea $f$ una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$.

*i*) Si $f'(x) > 0$ para toda $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es creciente sobre $[a, b]$.
*ii*) Si $f'(x) < 0$ para toda $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es decreciente sobre $[a, b]$.

**DEMOSTRACIÓN** *i*) Sean $x_1$ y $x_2$ dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo $(x_1, x_2)$ hay un número $c$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pero $f'(c) > 0$ por hipótesis. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$. Puesto que $x_1$ y $x_2$ se escogen de manera arbitraria, concluimos que $f$ es creciente sobre $[a, b]$.

*ii*) Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Puesto que $x_1$ y $x_2$ se escogen de manera arbitraria, concluimos que $f$ es decreciente sobre $[a, b]$. ■

**EJEMPLO 4** Prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos sobre los cuales $f$ es decreciente.

**Solución** La derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4).$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ es necesario resolver

$$(x + 2)(x - 4) > 0 \quad \text{y} \quad (x + 2)(x - 4) < 0,$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es analizar los signos algebraicos de los factores $(x + 2)$ y $(x - 4)$ sobre los intervalos de la recta numérica determinada por los puntos críticos $-2$ y 4: $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Vea la FIGURA 5.3.9.

En precálculo, este procedimiento para resolver desigualdades no lineales se denomina *método de la tabla de signos*.

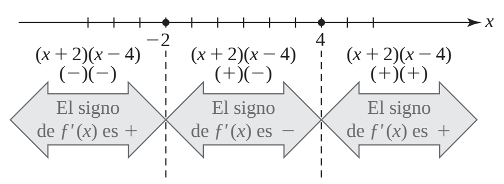



FIGURA 5.3.9 Signos de $f(x)$ en tres intervalos en el ejemplo 4

La información obtenida a partir de la figura 5.3.9 se resume en la tabla siguiente.

| Intervalo | Signo de $f'(x)$ | $y = f(x)$ |
|---|---|---|
| $(-\infty, -2)$ | + | creciente sobre $(-\infty, -2]$ |
| $(-2, 4)$ | − | decreciente sobre $[-2, 4]$ |
| $(4, \infty)$ | + | creciente sobre $[4, \infty)$ |

■

**EJEMPLO 5** Prueba de la derivada para creciente/decreciente

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ es creciente y los intervalos sobre los cuales $f$ es decreciente.

**Solución** Primero observe que el dominio de $f$ está definido por $x \geq 0$. Luego, la derivada

$$f'(x) = x^{1/2}e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x/2} = \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1 - x)$$

es cero en 1 y está indefinida en 0. Puesto que 0 está en el dominio de $f$ y ya que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, concluimos que la gráfica de $f$ tiene una tangente vertical (el eje $y$) en (0, 0). Además, debido a que $e^{-x/2}/2\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$, sólo es necesario resolver

$$1 - x > 0 \quad \text{y} \quad 1 - x < 0$$

para determinar dónde $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, respectivamente. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

| Intervalo | Signo de $f'(x)$ | $y = f(x)$ |
|---|---|---|
| (0, 1) | + | creciente sobre [0, 1] |
| $(1, \infty)$ | − | decreciente sobre $[1, \infty)$ |

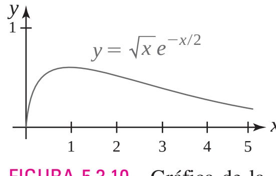



FIGURA 5.3.10 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $f$ que se observa en la FIGURA 5.3.10. ■

Si una función $f$ es discontinua en uno o en ambos puntos extremos de $[a, b]$, entonces $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre $(a, b)$ implica que $f$ es creciente (o decreciente) sobre el intervalo abierto $(a, b)$.

**Posdata: Un poco de historia** **Michel Rolle** (1652-1719), francés, maestro de escuela elemental, estaba profundamente interesado en las matemáticas, y a pesar de que su educación fue bastante deficiente resolvió varios teoremas de importancia. Pero, curiosamente, Rolle no demostró el teorema que lleva su nombre. De hecho, fue uno de los primeros críticos rotundos del, entonces, nuevo cálculo. A Rolle también se le acredita la invención del simbolismo $\sqrt[n]{x}$ para denotar la raíz $n$-ésima de un número $x$.

## $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) Como ya se mencionó, las hipótesis planteadas en el teorema de Rolle, así como las hipótesis del teorema del valor medio, son condiciones suficientes pero no necesarias. En el teorema de Rolle, por ejemplo, si una o más de las hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre $(a, b)$ y $f(a) = f(b) = 0$ no se cumple, entonces la conclusión de que en el intervalo abierto $(a, b)$ existe un número $c$ tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

*ii*) El converso de los incisos *i*) y *ii*) del teorema 5.3.4 no necesariamente son ciertos. En otras palabras, cuando $f$ es una función creciente (o decreciente) sobre un intervalo, no se concluye que $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre el intervalo. Una función puede ser creciente sobre un intervalo e incluso no ser diferenciable sobre ese intervalo.

## 5.3 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

### Fundamentos

En los problemas 1-10, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de $c$ que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^2 - 4;\quad [-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 5;\quad [1, 5]$
3. $f(x) = x^3 + 27;\quad [-3, -2]$
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x;\quad [0, 4]$
5. $f(x) = x^3 + x^2;\quad [-1, 0]$
6. $f(x) = x(x - 1)^2;\quad [0, 1]$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x;\quad [-\pi, 2\pi]$
8. $f(x) = \tan x;\quad [0, \pi]$
9. $f(x) = x^{2/3} - 1;\quad [-1, 1]$
10. $f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2;\quad [1, 8]$

En los problemas 11 y 12, establezca por qué la función $f$ cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[a, b]$.

11.

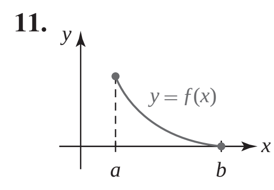



FIGURA 5.3.11 Gráfica para el problema 11

12.

FIGURA 5.3.12 Gráfica para el problema 12

En los problemas 13-22, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de $c$ que satisfacen la conclusión del teorema.

13. $f(x) = x^2;\quad [-1, 7]$
14. $f(x) = -x^2 + 8x - 6;\quad [2, 3]$
15. $f(x) = x^3 + x + 2;\quad [2, 5]$
16. $f(x) = x^4 - 2x^2;\quad [-3, 3]$
17. $f(x) = 1/x;\quad [-10, 10]$
18. $f(x) = x + \dfrac{1}{x};\quad [1, 5]$
19. $f(x) = 1 + \sqrt{x};\quad [0, 9]$
20. $f(x) = \sqrt{4x + 1};\quad [2, 6]$
21. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad [-2, -1]$
22. $f(x) = x^{1/3} - x;\quad [-8, 1]$

En los problemas 23 y 24, establezca por qué la función $f$ cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre $[a, b]$.

23.

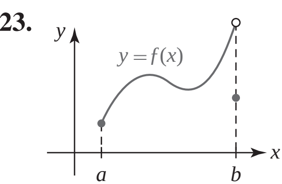



FIGURA 5.3.13 Gráfica para el problema 23

24.

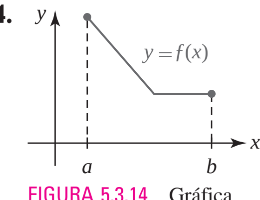



FIGURA 5.3.14 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-46, determine los intervalos sobre los cuales la función dada $f$ es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

**25.** $f(x) = x^2 + 5$ **26.** $f(x) = x^3$

**27.** $f(x) = x^2 + 6x - 1$ **28.** $f(x) = -x^2 + 10x + 3$

**29.** $f(x) = x^3 - 3x^2$ **30.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

**31.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$ **32.** $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$

**33.** $f(x) = 1 - x^{1/3}$ **34.** $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

**35.** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **36.** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

**37.** $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ **38.** $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**39.** $f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$ **40.** $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

**41.** $f(x) = x(x - 3)^2$ **42.** $f(x) = (x^2 - 1)^3$

**43.** $f(x) = \operatorname{sen} x$ **44.** $f(x) = -x + \tan x$

**45.** $f(x) = x + e^{-x}$ **46.** $f(x) = x^2e^{-x}$

En los problemas 47 y 48, demuestre, sin graficar, que la función dada no tiene extremos relativos.

**47.** $f(x) = 4x^3 + x$ **48.** $f(x) = -x + \sqrt{2 - x}$

## ≡ Aplicaciones

**49.** Un motociclista entra a una carretera de peaje y en el comprobante de pago la hora indicada es 1:15 p.m. Luego de 70 millas, cuando el motociclista paga en la caseta de peaje a las 2:15 p.m., también recibe un comprobante de pago. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que la velocidad límite es 65 mi/h.

**50.** En el análisis matemático de la tos humana se supone que la tráquea o tubo respiratorio es un tubo cilíndrico. Un modelo matemático para el volumen de aire (en $\text{cm}^3$/s) que fluye a través de la tráquea durante su contracción es

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad r_0/2 \le r \le r_0,$$

donde $k$ es una constante positiva y $r_0$ es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo respiratorio. Determine un intervalo para el cual $V$ sea creciente y un intervalo para el cual $V$ sea decreciente. ¿Con qué radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

## ≡ Piense en ello

**51.** Considere la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz en $[-1, 1]$.

**52.** Suponga que las funciones $f$ y $g$ son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $(a, b)$ de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda $x$ en $(a, b)$. Demuestre que $f + g$ es una función creciente sobre $[a, b]$.

**53.** Suponga que las funciones $f$ y $g$ son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $(a, b)$ de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda $x$ en $(a, b)$. Proporcione una condición sobre $f(x)$ y $g(x)$ que garantice que el producto $fg$ es creciente sobre $[a, b]$.

**54.** Demuestre que la ecuación $ax^3 + bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$, no puede tener dos raíces reales. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^3 + bx + c$. Suponga que hay dos números $r_1$ y $r_2$ tales que $f(r_1) = f(r_2) = 0$.]

**55.** Demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo sumo una raíz real. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que hay tres números distintos $r_1$, $r_2$ y $r_3$ tales que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$.]

**56.** Para una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ demuestre que el valor de $x_3$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

**57.** Suponga que la gráfica de una función polinomial $f$ tiene cuatro intersecciones $x$ distintas. Analice: ¿cuál es el número mínimo de puntos en los cuales una recta tangente a la gráfica de $f$ es horizontal?

**58.** Como se mencionó después del ejemplo 2, la hipótesis $f(a) = f(b) = 0$ en el teorema de Rolle puede sustituirse por la hipótesis $f(a) = f(b)$.

***a***) Encuentre una función explícita $f$ definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que $f$ sea continua sobre el intervalo, diferenciable sobre $(a, b)$ y $f(a) = f(b)$.

***b***) Encuentre un número $c$ para el que $f'(c) = 0$.

**59.** Considere la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Use $f$ y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $\cot x = -1/x$ tiene una solución sobre el intervalo $(0, \pi)$.

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

**60.** ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x - 4x^{1/3}$.

***b***) Compruebe que todas las hipótesis, excepto una del teorema de Rolle, se cumplen en el intervalo $[-8, 8]$.

***c***) Determine si en $(-8, 8)$ existe un número $c$ para el cual $f'(c) = 0$.

En los problemas 61 y 62, use una calculadora para encontrar un valor de $c$ que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

**61.** $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$

**62.** $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$; $[\pi/4, \pi/2]$

# 5.4 Criterio de la primera derivada

**Introducción** Saber que una función tiene, o no, extremos relativos es de gran ayuda al trazar su gráfica. En la sección 5.2 (teorema 5.2.2) vimos que cuando una función tiene un extremo relativo debe ocurrir en un número crítico. Al encontrar los números críticos de una función, tenemos una *lista de candidatos* para las coordenadas $x$ de los puntos que correspon-

den a extremos relativos. A continuación se combinarán las ideas de las primeras secciones de esta unidad para establecer dos pruebas para determinar cuándo un número crítico es en realidad la coordenada $x$ de un extremo relativo.

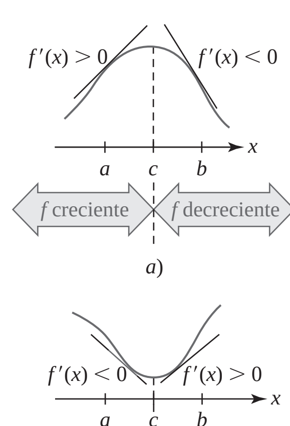



FIGURA 5.4.1 Máximo relativo en *a*); mínimo relativo en *b*)

**Prueba de la primera derivada** Suponga que $f$ es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable sobre un intervalo abierto $(a, b)$, excepto tal vez en un número crítico $c$ dentro del intervalo. Si $f'(x) > 0$ para toda $x$ en $(a, c)$ y $f'(x) < 0$ para toda $x$ en $(c, b)$, entonces la gráfica de $f$ sobre el intervalo $(a, b)$ puede ser como se muestra en la FIGURA 5.4.1*a*); es decir, $f(c)$ es un máximo relativo. Por otra parte, cuando $f'(x) < 0$ para toda $x$ en $(a, c)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x$ en $(c, b)$, entonces, como se muestra en la figura 5.4.1*b*), $f(c)$ es un mínimo relativo. Se han demostrado dos casos especiales del siguiente teorema.

**Teorema 5.4.1** Criterio de la primera derivada

Sea $f$ continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b)$ excepto tal vez en el número crítico $c$.

*i*) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $c$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
*ii*) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $c$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
*iii*) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico a cada lado de $c$, entonces $f(c)$ no es un extremo.

Las conclusiones del teorema 5.4.1 pueden resumirse en una frase:

- Una función $f$ tiene un extremo relativo en un número crítico $c$ donde $f'(x)$ cambia de signo.

En la FIGURA 5.4.2 se ilustra cuál sería el caso cuando $f'(c)$ *no* cambia de signo en un número crítico $c$. En las figuras 5.4.2*a*) y 5.4.2*b*) se muestra una tangente horizontal en $(c, f(c))$ y $f'(c) = 0$ pero $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo. En la figura 5.4.2*c*) se muestra una tangente vertical en $(c, f(c))$ y así $f'(c)$ no existe, pero de nuevo $f(c)$ no es un extremo relativo porque $f'(c)$ no cambia de signo en el número crítico $c$.

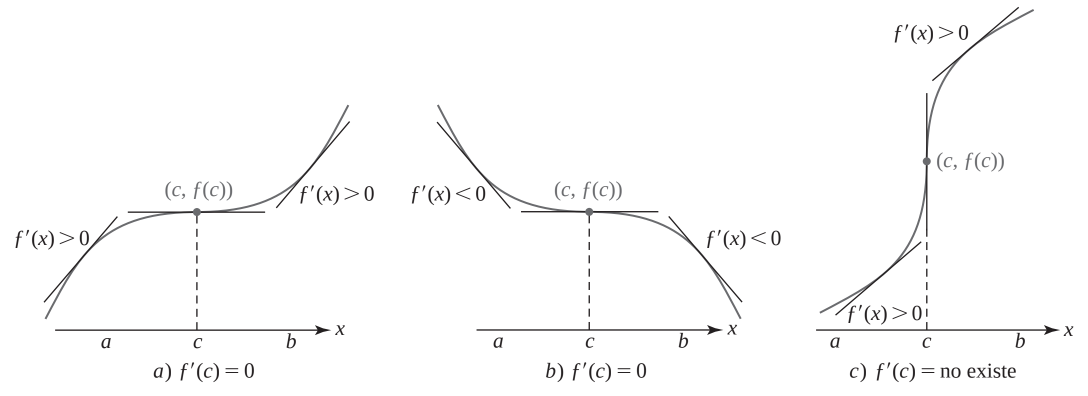



FIGURA 5.4.2 No hay extremo porque $f'(x)$ no cambia de signo en el número crítico $c$

En los cinco ejemplos siguientes se ilustra la utilidad del teorema 5.4.1 para trazar a mano la gráfica de una función $f$. Además del cálculo:

- Encuentre la derivada de $f$ y factorice $f'$ tanto como sea posible.
- Encuentre los números críticos de $f$.
- Aplique el criterio de la primera derivada a cada número crítico.

También resulta útil preguntar:

- ¿Cuál es el dominio de $f$?
- La gráfica de $f$, ¿tiene alguna intersección? ← intersecciones $x$: resuelva para $f(x) = 0$; intersección $y$: encuentre $f(0)$
- La gráfica de $f$, ¿tiene alguna simetría? ← determine si $f(-x) = f(x)$ o bien, $f(-x) = -f(x)$
- La gráfica de $f$, ¿tiene alguna asíntota?

Las funciones consideradas en los ejemplos 1 y 2 son polinomiales. Observe que estas funciones constan de potencias pares e impares de $x$; esto es suficiente para concluir que las gráficas de estas funciones no son simétricas con respecto al eje $y$ o al origen.

## EJEMPLO 1 Función polinomial de grado 3

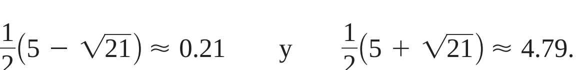
Grafique $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

**Solución** La primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \tag{1}$$

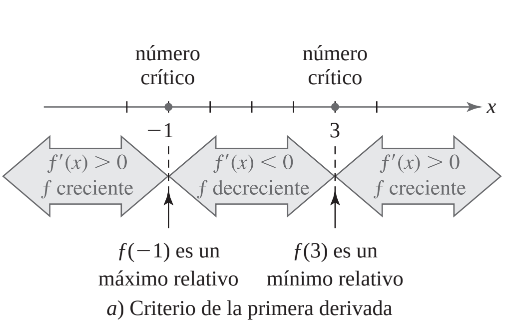
produce los números críticos $-1$ y 3. Luego, el criterio de la primera derivada es esencialmente el procedimiento que se usó para encontrar los intervalos sobre los cuales $f$ es creciente o decreciente. En la FIGURA 5.4.3*a*) vemos que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$. En otras palabras, $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $-1$ y así por el inciso *i*) del teorema 5.4.1 concluimos que $f(-1) = 7$ es un máximo relativo. En forma semejante, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < \infty$. Debido a que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 3, el inciso *ii*) del teorema 5.4.1 indica que $f(3) = -25$ es un mínimo relativo. Luego, como $f(0) = 2$, el punto $(0, 2)$ es la intersección $y$ para la gráfica de $f$. Además, al buscar si la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ tiene raíces positivas se encuentra que $x = -2$ es una raíz real. Luego, al dividir entre el factor $x + 2$ obtenemos $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. Cuando la fórmula cuadrática se aplica al factor cuadrático se encuentran dos raíces reales adicionales:

Vea las *MRS* para un breve repaso de cómo encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales.

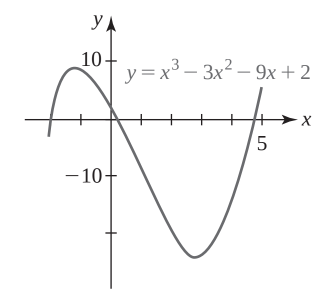


$$\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{21}\right) \approx 0.21 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{21}\right) \approx 4.79.$$

Entonces, las intersecciones $x$ son $(-2, 0)$, $\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$. Al reunir toda esta información se llega a la gráfica mostrada en la figura 5.4.3*b*):




*a*) Criterio de la primera derivada




*b*) Observe las intersecciones $x$ y $y$

FIGURA 5.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1 ■

## EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4

Grafique $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

**Solución** La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que los números críticos son 0 y 3. Luego, como se observa en la FIGURA 5.4.4*a*), $f'$ tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$. Entonces $f(0) = 10$ *no* es un extremo. En este caso $f'(0) = 0$ significa que en la intersección $y$ $(0, f(0)) = (0, 10)$ hay una sola tangente horizontal. Sin embargo, por el criterio de la primera derivada resulta evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo. En efecto, la información de que $f$ es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico 3 (la gráfica de $f$ no puede retroceder) permite concluir que $f(3) = -17$ también es un *mínimo absoluto*. Por último, vemos que la gráfica de $f$ tiene dos intersecciones $x$. Con ayuda de una calculadora o un SAC se encuentra que las intersecciones $x$ son aproximadamente $(1.61, 0)$ y $(3.82, 0)$.

*a*) Criterio de la primera derivada

*b*) $f'(0) = 0$ pero $f(0) = 10$ no es un extremo

FIGURA 5.4.4 Gráfica de la función en el ejemplo 2

## EJEMPLO 3 Gráfica de una función racional

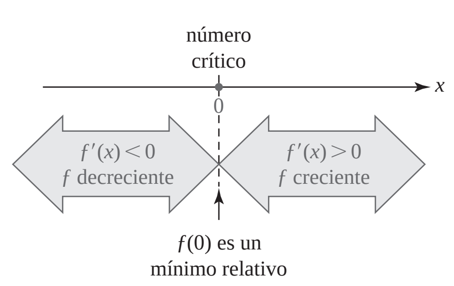
Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$.

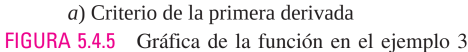
**Solución** La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional $f$ antes de graficarla realmente.

*intersección y:* $f(0) = -3$; en consecuencia, la intersección $y$ es $(0, -3)$.
*intersecciones x:* $f(x) = 0$ cuando $x^2 - 3 = 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Las intersecciones $x$ son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.
*Simetría*: Con respecto al eje $y$, puesto que $f(-x) = f(x)$.
*Asíntotas verticales*: Ninguna, puesto que $x^2 + 1 \neq 0$ para todos los números reales.
*Asíntotas horizontales*: Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada $\infty/\infty$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

y así la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal (ver sección 5.9).
*Derivada:* Con la regla del cociente obtenemos $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2 + 1)^2}$.
*Números críticos:* $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En consecuencia, 0 es el único número crítico.
*Criterio de la primera derivada:* Vea la FIGURA 5.4.5*a*); $f(0) = -3$ es un mínimo relativo.
*Grafique:* Vea la figura 5.4.5*b*).





*a*) Criterio de la primera derivada

*b*) $y = 1$ es una asíntota horizontal

FIGURA 5.4.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

## EJEMPLO 4 Gráfica con una asíntota vertical

Grafique $f(x) = x^2 + x - \ln|x|$.

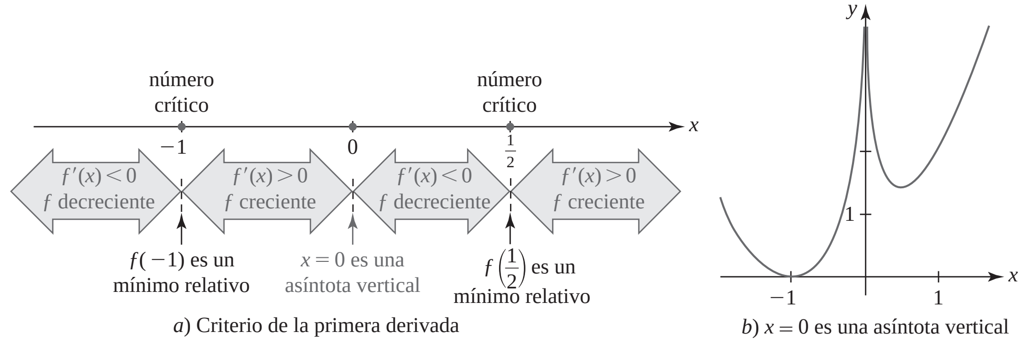
**Solución** Primero observe que el dominio de $f$ es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Luego, al igualar a cero el denominador de la derivada

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x}$$

se observa que $-1$ y $\frac{1}{2}$ son números críticos. Aunque $f$ no es diferenciable en $x = 0$, 0 no es un número crítico puesto que 0 no está en el dominio de $f$. De hecho, $x = 0$ es una asíntota vertical para $\ln|x|$ y también es una asíntota vertical para la gráfica de $f$. Los números críticos y 0 se escriben en la recta numérica porque el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de 0 indica el comportamiento de $f$. Como se observa en la FIGURA 5.4.6*a*), $f'(x) < 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$. Concluimos que $f(-1) = 0$ es un mínimo relativo (al mismo tiempo, $f(-1) = 0$ muestra que $x = -1$ es la coordenada $x$ de una intersección $x$). Al continuar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \infty$ muestra que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} \approx 1.44$ es otro mínimo relativo.

Verifique que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

Como se observó, $f$ no está definida en $x = 0$, de modo que no hay intersección $y$. Por último, no hay simetría con respecto al eje $y$ o con respecto al origen. La gráfica de la función $f$ se muestra en la figura 5.4.6*b*).




*a*) Criterio de la primera derivada *b*) $x = 0$ es una asíntota vertical

FIGURA 5.4.6 Gráfica de la función en el ejemplo 4

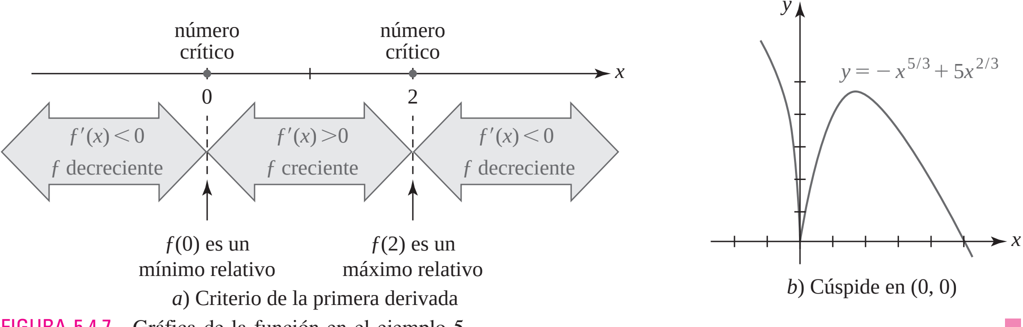
## EJEMPLO 5 Gráfica con una cúspide

Grafique $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

**Solución** La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}\frac{(-x + 2)}{x^{1/3}}.$$

Observe que $f'$ no existe en 0 pero 0 está en el dominio de la función puesto que $f(0) = 0$. Los números críticos son 0 y 2. El criterio de la primera derivada, ilustrado en la FIGURA 5.4.7*a*), muestra que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo y que $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$ es un máximo relativo. Además, puesto que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y $f'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ en (0, 0) hay una cúspide. Por último, al escribir $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$, vemos que $f(x) = 0$ y que $x = 5$. Las intersecciones $x$ son los puntos (0, 0) y (5, 0). La gráfica de $f$ se muestra en la figura 5.4.7*b*).




*a*) Criterio de la primera derivada *b*) Cúspide en (0, 0)

FIGURA 5.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Algunas veces resulta conveniente saber antes de graficar, e incluso antes de molestarse en graficar, si un extremo relativo $f(c)$ es un extremo *absoluto*. El siguiente teorema es algo útil. Usted debe trazar algunas gráficas y convencerse sobre la validez del teorema.

**Teorema 5.4.2** Prueba del único número crítico

Suponga que $c$ es el único número crítico de una función $f$ dentro de un intervalo $I$. Si se demuestra que $f(c)$ es un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto.

En el ejemplo 3, mediante el criterio de la primera derivada se demostró que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo. También se hubiera podido concluir de inmediato que este valor de la función es un mínimo absoluto. Este hecho se concluye por el teorema 5.4.2 porque 0 es el único número crítico en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

## 5.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

### Fundamentos

En los problemas 1-32, use el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique. Encuentre las intersecciones cuando sea posible.

**1.** $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ **2.** $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

**3.** $f(x) = x^3 - 3x$ **4.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

**5.** $f(x) = x(x - 2)^2$ **6.** $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$

**7.** $f(x) = x^3 + x - 3$ **8.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$

**9.** $f(x) = x^4 + 4x$ **10.** $f(x) = (x^2 - 1)^2$

**11.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ **12.** $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$

**13.** $f(x) = -x^2(x - 3)^2$ **14.** $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 2$

**15.** $f(x) = 4x^5 - 5x^4$ **16.** $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$

**17.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ **18.** $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$

**19.** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ **20.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

**21.** $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

**23.** $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ **24.** $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$

**25.** $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ **26.** $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$

**27.** $f(x) = x - 12x^{1/3}$ **28.** $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$

**29.** $f(x) = x^3 - 24\ln|x|$ **30.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

**31.** $f(x) = (x + 3)^2e^{-x}$ **32.** $f(x) = 8x^2e^{-x^2}$

En los problemas 33-36, trace una gráfica de la función $f$ cuya derivada $f'$ tiene la gráfica dada.

**33.**

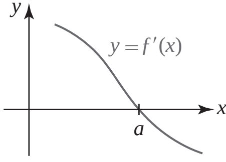



FIGURA 5.4.8 Gráfica para el problema 33

**34.**

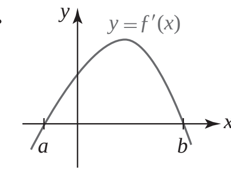



FIGURA 5.4.9 Gráfica para el problema 34

**35.**

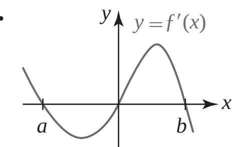



FIGURA 5.4.10 Gráfica para el problema 35

**36.**

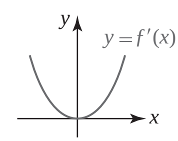



FIGURA 5.4.11 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de $f'$ a partir de la gráfica de $f$.

**37.**

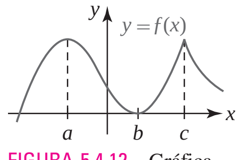



FIGURA 5.4.12 Gráfica para el problema 37

**38.**

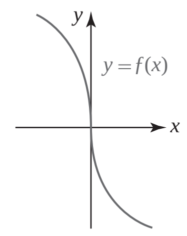



FIGURA 5.4.13 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39-42, trace una gráfica de una función $f$ que tenga las propiedades dadas.

**39.** $f(-1) = 0, f(0) = 1$
$f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$
$f'(x) > 0, x < 3$ y $x > 5$
$f'(x) < 0, 3 < x < 5$

**40.** $f(0) = 0$
$f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$
$f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$
$f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$

**41.** $f(-x) = f(x)$
$f(2) = 3$
$f'(x) < 0, 0 < x < 2$
$f'(x) > 0, x > 2$

**42.** $f(1) = -2, f(0) = -1$
$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty, f'(4) = 0$
$f'(x) < 0, x < 1$
$f'(x) < 0, x > 4$

En los problemas 43 y 44, determine dónde la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

**43.** $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$ **44.** $f(x) = x^4 - 6x^2$

**45.** ***a***) A partir de la gráfica de $g(x) = \text{sen}\, 2x$ determine los intervalos para los cuales $g(x) > 0$ y los intervalos para los cuales $g(x) < 0$.

***b***) Encuentre los números críticos de $f(x) = \text{sen}^2 x$. Use el criterio de la primera derivada y la información en el inciso *a*) para encontrar los extremos relativos de $f$.

***c***) Trace la gráfica de la función $f$ en el inciso *b*).

**46.** ***a***) Encuentre los números críticos de $f(x) = x - \text{sen}\, x$.

***b***) Demuestre que $f$ no tiene extremos relativos.

***c***) Trace la gráfica de $f$.

## ≡ Aplicaciones

**47.** La **media aritmética**, o **promedio**, de $n$ números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ está dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

***a***) Demuestre que $\bar{x}$ es un número crítico de la función

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2.$$

***b***) Demuestre que $f(\bar{x})$ es un mínimo relativo.

**48.** Cuando el sonido pasa de un medio a otro, puede perder algo de su energía debido a una diferencia en las resistencias acústicas de los dos medios. (La resistencia acústica es el producto de la densidad y la elasticidad.) La fracción de la energía transmitida está dada por

$$T(r) = \frac{4r}{(r + 1)^2},$$

donde $r$ es la razón de las resistencias acústicas de los dos medios.

***a***) Demuestre que $T(r) = T(1/r)$. Explique el significado físico de esta expresión.

***b***) Use el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de $T$.

***c***) Trace la gráfica de la función $T$ para $r \geq 0$.

## ≡ Piense en ello

**49.** Encuentre valores de $a$, $b$ y $c$ tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo 6 en $x = 2$ y la gráfica de $f$ tenga intersección $y$ igual a 4.

**50.** Encuentre valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo $-3$ en $x = 0$ y un máximo relativo 4 en $x = 1$.

**51.** Suponga que $f$ es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica con respecto al eje $y$. Demuestre que $f'(0) = 0$. ¿Tiene $f$ necesariamente un extremo relativo en $x = 0$?

**52.** Sean $m$ y $n$ enteros positivos. Demuestre que $f(x) = x^m(x - 1)^n$ siempre tiene un mínimo relativo.

**53.** Suponga que $f$ y $g$ son diferenciables y que tienen máximos relativos en el mismo número crítico $c$.

***a***) Demuestre que $c$ es un número crítico para las $f + g$, $f - g$ y $fg$.

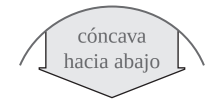
***b***) ¿Se concluye que las $f + g$, $f - g$ y $fg$ tienen máximos relativos en $c$? Demuestre sus aseveraciones o dé un contraejemplo.

# 5.5 Criterio de la segunda derivada

**Introducción** En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un extremo relativo de una función $f$ ocurre en un número crítico.

**Concavidad** Tal vez usted tiene una idea *intuitiva* del significado de concavidad. En las FIGURAS 5.5.1*a*) y 5.5.1*b*) se ilustran formas geométricas **cóncavas hacia arriba** y **cóncavas hacia abajo**, respectivamente. Por ejemplo, el Arco de San Luis Missouri es cóncavo hacia abajo; los cables entre los soportes verticales del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba. A menudo decimos que una forma cóncava hacia arriba “contiene agua”, mientras una forma cóncava hacia abajo “derrama agua”. No obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.

*a*) “Contiene agua”




*b*) “Derrama agua”

FIGURA 5.5.1 Concavidad

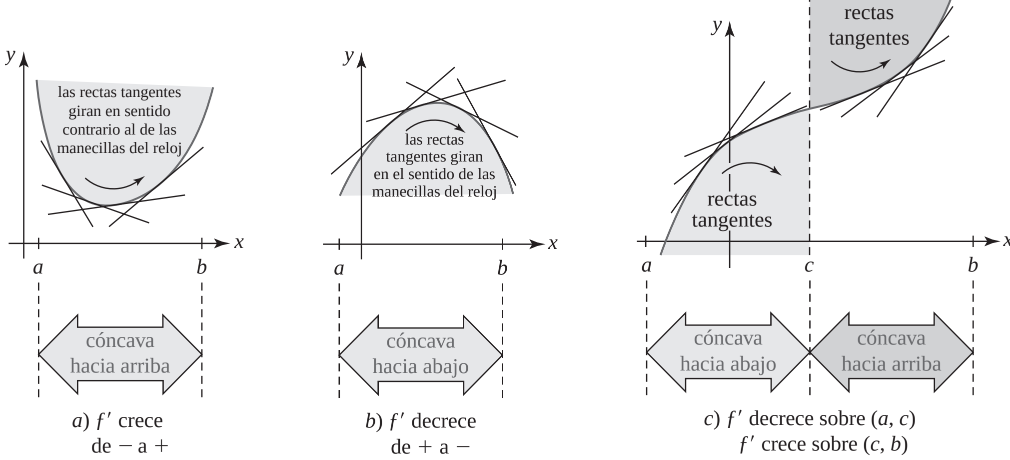
**Definición 5.5.1** Concavidad

Sea $f$ una función diferenciable sobre un intervalo $(a, b)$.

*i*) Si $f'$ es una función creciente sobre $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava **hacia arriba** sobre el intervalo.

*ii*) Si $f'$ es una función decreciente sobre $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $f$ crecen (decrecen) cuando $x$ crece sobre $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba (abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes crecen (decrecen) cuando $x$ crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo. La validez de la definición 5.5.1 se ilustra en la FIGURA 5.5.2. Una manera equivalente de considerar la concavidad también resulta evidente a partir de la figura 5.5.2. La gráfica de una función $f$ es cóncava hacia arriba (hacia abajo) sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba (abajo) de las rectas tangentes.




*a)* $f'$ crece de $-$ a $+$

*b)* $f'$ decrece de $+$ a $-$

*c)* $f'$ decrece sobre $(a, c)$ $f'$ crece sobre $(c, b)$

FIGURA 5.5.2 Concavidad sobre intervalos

**Concavidad y la segunda derivada** En el teorema 5.3.4 de la sección 5.3 vimos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente sobre un intervalo. En específico, si la función referida en la oración precedente es la derivada $f'$, entonces podemos concluir que el signo algebraico de la derivada de $f'$, es decir, $f''$, indica cuándo $f'$ es creciente o decreciente sobre un intervalo. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$ sobre $(a, b)$, entonces $f'$ es creciente sobre $(a, b)$. Debido a la definición 5.5.1, si $f'$ es creciente sobre $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. En consecuencia, se llega a la siguiente prueba para concavidad.

**Teorema 5.5.1** Prueba para concavidad

Sea $f$ una función para la cual $f''$ existe sobre $(a, b)$.

*i)* Si $f''(x) > 0$ para toda $x$ en $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba sobre $(a, b)$.

*ii)* Si $f''(x) < 0$ para toda $x$ en $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo sobre $(a, b)$.

**EJEMPLO 1** Prueba para concavidad

Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

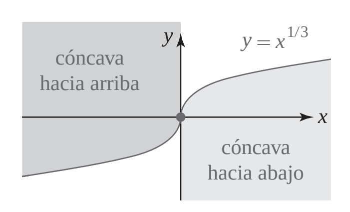
**Solución** A partir de $f'(x) = 3x^2 + 9x$ obtenemos

$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \tfrac{3}{2}\right).$$

Se observa que $f''(x) < 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$ o $x < -\frac{3}{2}$ y que $f''(x) > 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ o $x > -\frac{3}{2}$. Por el teorema 5.5.1 concluimos que la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. ■

**Punto de inflexión** La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = -\frac{3}{2}$. Cuando $x$ crece a través de $-\frac{3}{2}$, la gráfica de $f$ cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$. Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.

a) $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$




b) $f''(x)$ no existe en 0

FIGURA 5.5.3 Puntos de inflexión

**Definición 5.5.2** Punto de inflexión

Sea $f$ continua sobre un intervalo $(a, b)$ que contiene al número $c$. Un punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de $f$ si en $(c, f(c))$ hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en este punto.

Al volver a examinar el ejemplo 1 se observa que $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es continua en $-\frac{3}{2}$, tiene una recta tangente en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ y cambia de concavidad en este punto. Por tanto, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ es un punto de inflexión. También observe que $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Vea la FIGURA 5.5.3*a*). También sabemos que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en 0 y tiene una tangente vertical en (0, 0) (vea el ejemplo 10 de la sección 4.2). A partir de $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ se observa que $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y que $f''(x) < 0$ para $x > 0$. Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión. Observe que en este caso $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ no está definida en $x = 0$. Vea la figura 5.5.3*b*). Estos dos casos se ilustran en el siguiente teorema.

**Teorema 5.5.2** Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función $f$, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

**Criterio de la segunda derivada** Si $c$ es un número crítico de una función $y = f(x)$ y, por ejemplo, $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba sobre algún intervalo abierto $(a, b)$ que contiene a $c$. Entonces, necesariamente $f(c)$ es un mínimo relativo. En forma semejante, $f''(c) < 0$ en un valor crítico $c$ implica que $f(c)$ es un máximo relativo. Este teorema se denomina **criterio de la segunda derivada** y se ilustra en la FIGURA 5.5.4.

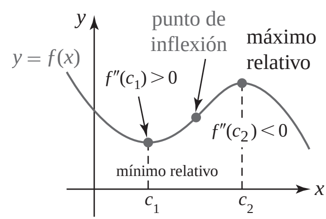



FIGURA 5.5.4 Criterio de la segunda derivada

**Teorema 5.5.3** Criterio de la segunda derivada

Sea $f$ una función para la cual $f''$ existe sobre un intervalo $(a, b)$ que contiene al número crítico $c$.

*i)* Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
*ii)* Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
*iii)* Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso usamos el criterio de la primera derivada.

En este punto podría plantearse la pregunta: ¿por qué se requiere otra prueba para extremos relativos cuando ya se cuenta con el criterio de la primera derivada? Si la función $f$ en consideración es un polinomio, es muy sencillo calcular la segunda derivada. Al usar el teorema 5.5.3 sólo necesitamos determinar el signo algebraico de $f''(x)$ *en* el número crítico. Compare esto con el teorema 5.4.1, donde es necesario determinar el signo de $f'(x)$ en los números a la derecha y a la izquierda del número crítico. Si no es fácil factorizar $f'$, el último procedimiento puede ser algo difícil. Por otra parte, puede resultar igualmente tedioso usar el teorema 5.5.3 en el caso de algunas funciones que impliquen productos, cocientes, potencias, etcétera. Por tanto, los teoremas 5.4.1 y 5.5.3 pueden tener ventajas y desventajas,

**EJEMPLO 2** Criterio de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 4x^4 - 4x^2$.

**Solución** A partir de $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^2(x + 1)(x - 1)$ se observa que la gráfica de $f$ tiene las intersecciones (−1, 0), (0, 0) y (1, 0). Además, puesto que $f$ es un polinomio que sólo tiene potencias pares, concluimos que su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$ (función par). Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x\left(\sqrt{2}x + 1\right)\left(\sqrt{2}x - 1\right)$$
$$f''(x) = 48x^2 - 8 = 8\left(\sqrt{6}x + 1\right)\left(\sqrt{6}x - 1\right).$$

A partir de $f'$ vemos que los números críticos de $f$ son 0, $-\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}/2$. El criterio de la segunda derivada se resume en la tabla siguiente.

| $x$ | Signo de $f''(x)$ | $f(x)$ | Conclusión |
|---|---|---|---|
| 0 | $-$ | 0 | máximo relativo |
| $\sqrt{2}/2$ | $+$ | $-1$ | mínimo relativo |
| $-\sqrt{2}/2$ | $+$ | $-1$ | mínimo relativo |

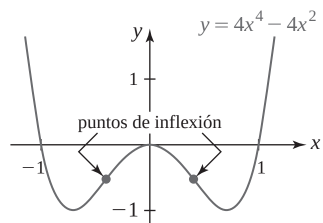
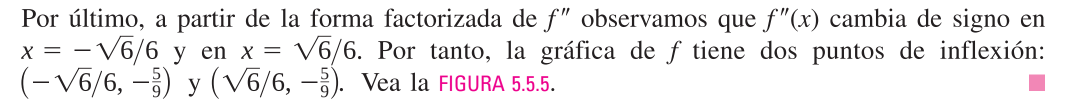


FIGURA 5.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2



Por último, a partir de la forma factorizada de $f''$ observamos que $f''(x)$ cambia de signo en $x = -\sqrt{6}/6$ y en $x = \sqrt{6}/6$. Por tanto, la gráfica de $f$ tiene dos puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$. Vea la FIGURA 5.5.5. ■

## EJEMPLO 3 Fracaso del criterio de la segunda derivada

Considere la función simple $f(x) = x^4 + 1$. A partir de $f'(x) = 4x^3$ vemos que 0 es un número crítico. Pero por la segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ obtenemos $f''(0) = 0$. Por tanto, el criterio de la segunda derivada no conduce a ninguna conclusión. No obstante, a partir de la primera derivada $f'(x) = 4x^3$ vemos lo siguiente:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

El criterio de la primera derivada indica que $f(0) = 1$ es un mínimo relativo. La FIGURA 5.5.6 muestra que $f(0) = 1$ es realmente un mínimo absoluto. ■

FIGURA 5.5.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

## EJEMPLO 4 Criterio de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

**Solución** Debido a que $\cos x$ y $\cos 2x$ son pares, la gráfica de $f$ es simétrica con respecto al eje $y$. También, $f(0) = 1$ produce la intersección $(0, 1)$. Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = -2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x.$$

Al usar la identidad trigonométrica $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\cos x$ es posible simplificar la ecuación $f'(x) = 0$ a $\text{sen}\,x(1 - 2\cos x) = 0$. Las soluciones de $\text{sen}\,x = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ y las soluciones de $\cos x = \frac{1}{2}$ son $\pm\pi/3, \pm 5\pi/3, \ldots$ Pero como el periodo de $f$ es $2\pi$ (¡demuéstrelo!), es suficiente considerar sólo los números críticos en $[0, 2\pi]$, a saber, $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y $2\pi$. En la tabla siguiente se resume la aplicación del criterio de la segunda derivada a estos valores.

| $x$ | Signo de $f''(x)$ | $f(x)$ | Conclusión |
|---|---|---|---|
| 0 | $+$ | 1 | mínimo relativo |
| $\pi/3$ | $-$ | $\frac{3}{2}$ | máximo relativo |
| $\pi$ | $+$ | $-3$ | mínimo relativo |
| $5\pi/3$ | $-$ | $\frac{3}{2}$ | máximo relativo |
| $2\pi$ | $+$ | 1 | mínimo relativo |

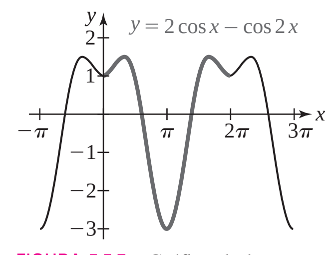


FIGURA 5.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

La gráfica de $f$ es la extensión con periodo $2\pi$ de la porción más gruesa que se muestra en la FIGURA 5.5.7 sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. ■

## $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

*i)* Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. El converso de esta afirmación no necesariamente es verdadero. No es posible concluir, simplemente a partir del hecho de que cuando $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. En este sentido, en el ejemplo 3 vimos que $f''(0) = 0$ para $f(x) = x^4 + 1$. Pero a partir de la figura 5.5.6 resulta evidente que $(0, f(0))$ no es un punto de inflexión.

También, para $f(x) = 1/x$, vemos que $f''(x) = 2/x^3$ está indefinida en $x = 0$ y que la gráfica de $f$ cambia de concavidad en $x = 0$:

$$f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

No obstante, $x = 0$ no es la coordenada $x$ de un punto de inflexión porque $f$ no es continua en 0.

*ii*) Usted no debe pensar que la gráfica de una función *debe tener* concavidad. Hay funciones perfectamente bien diferenciables cuyas gráficas no poseen concavidad. Vea el problema 60 en la sección "Desarrolle su competencia 5.5".

*iii*) Usted debe estar al tanto de que los libros de texto no coinciden respecto a la definición precisa de punto de inflexión. Esto no es algo por lo cual deba preocuparse, pero si usted tiene interés, vea el problema 65 en la sección "Desarrolle su competencia 5.5".

## 5.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

### Fundamentos

En los problemas 1-12, use la segunda derivada para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo. Grafique.

**1.** $f(x) = -x^2 + 7x$

**2.** $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$

**3.** $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$

**4.** $f(x) = (x + 5)^3$

**5.** $f(x) = x(x - 4)^3$

**6.** $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$

**7.** $f(x) = x^{1/3} + 2x$

**8.** $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$

**9.** $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$

**10.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$

**11.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

**12.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

En los problemas 13-16, a partir de la gráfica de la función dada $f$ calcule los intervalos sobre los cuales $f'$ es creciente y los intervalos sobre los cuales $f'$ es decreciente.

**13.**

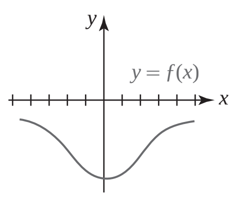



FIGURA 5.5.8 Gráfica para el problema 13

**14.**

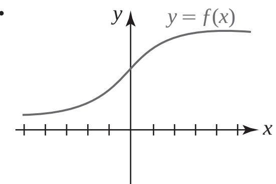



FIGURA 5.5.9 Gráfica para el problema 14

**15.**

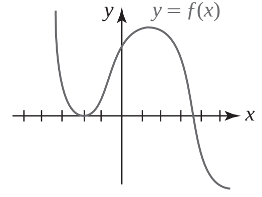



FIGURA 5.5.10 Gráfica para el problema 15

**16.**

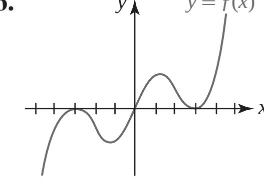



FIGURA 5.5.11 Gráfica para el problema 16

**17.** Demuestre que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\cos x < 0$.

**18.** Demuestre que la gráfica de $f(x) = \csc x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x < 0$.

En los problemas 19-26, use la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

**19.** $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$

**20.** $f(x) = x^{5/3} + 4x$

**21.** $f(x) = \operatorname{sen} x$

**22.** $f(x) = \cos x$

**23.** $f(x) = x - \operatorname{sen} x$

**24.** $f(x) = \tan x$

**25.** $f(x) = x + xe^{-x}$

**26.** $f(x) = xe^{-x^2}$

En los problemas 27-44, use el criterio de la segunda derivada, cuando sea pertinente aplicarlo, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique y encuentre todos los puntos de inflexión cuando sea posible.

**27.** $f(x) = -(2x - 5)^2$

**28.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$

**29.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

**30.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

**31.** $f(x) = 6x^5 - 10x^3$

**32.** $f(x) = x^3(x + 1)^2$

**33.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

**34.** $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

**35.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

**36.** $f(x) = x\sqrt{x - 6}$

**37.** $f(x) = x^{1/3}(x + 1)$

**38.** $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$

**39.** $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$

**40.** $f(x) = 2 + \operatorname{sen} 2x$, $[0, 2\pi]$

**41.** $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$

**42.** $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$, $[0, 2\pi]$

**43.** $f(x) = 2x - x \ln x$

**44.** $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

En los problemas 45-48, determine si la función dada tiene un extremo relativo en el número crítico indicado.

**45.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$; $\pi/4$

**46.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$; $0$

**47.** $f(x) = \tan^2 x$; $\pi$

**48.** $f(x) = (1 + \operatorname{sen} 4x)^3$; $\pi/8$

En los problemas 49-52, trace una gráfica de una función que tenga las propiedades dadas.

**49.** $f(-2) = 0, f(4) = 0$
$f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$
$f''(x) < 0, x < 1, x > 2$
$f''(x) > 0, 1 < x < 2$

**50.** $f(0) = 5, f(2) = 0$
$f'(2) = 0, f''(3)$ no existe
$f''(x) > 0, x < 3$
$f''(x) < 0, x > 3$

**51.** $f(0) = -1, f(\pi/2) > 0$
$f'(x) \geq 0$ para toda $x$
$f''(x) > 0, (2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n$ par
$f''(x) < 0, (2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n$ impar

**52.** $f(-x) = -f(x)$
asíntota vertical $x = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$f''(x) < 0, 0 < x < 2$
$f''(x) > 0, x > 2$

## Piense en ello

**53.** Encuentre valores de $a$, $b$ y $c$ tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.

**54.** Encuentre valores de $a$, $b$ y $c$ tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión en $(1, 1)$.

**55.** Use el criterio de la segunda derivada como ayuda para graficar $f(x) = \text{sen}(1/x)$. Observe que $f$ es discontinua en $x = 0$.

**56.** Demuestre que la gráfica de una función polinomial general

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$$

puede tener cuando mucho $n - 2$ puntos de inflexión.

**57.** Sea $f(x) = (x - x_0)^n$, donde $n$ es un entero positivo.

*a*) Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f$ si $n$ es un entero impar.

*b*) Demuestre que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de $f$, sino que corresponde a un mínimo relativo cuando $n$ es un entero par.

**58.** Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, es cóncava hacia arriba sobre el eje $x$ cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo sobre el eje $x$ cuando $a < 0$.

**59.** Sea $f$ una función para la cual $f''$ existe sobre un intervalo $(a, b)$ que contiene al número $c$. Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, ¿qué puede afirmarse sobre $(c, f(c))$?

**60.** Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad. No piense demasiado.

**61.** Demuestre o refute lo siguiente. Un punto de inflexión para una función $f$ debe ocurrir en un valor crítico de $f'$.

**62.** Sin graficar, explique por qué la gráfica de $f(x) = 10x^2 - x - 40 + e^x$ no puede tener un punto de inflexión.

**63.** Demuestre o refute lo siguiente. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

**64.** Suponga que $f$ es una función polinomial de grado 3 y que $c_1$ y $c_2$ son números críticos distintos.

*a*) $f(c_1)$ y $f(c_2)$, ¿son necesariamente extremos relativos de la función? Demuestre su respuesta.

*b*) ¿Cuál considera que es la coordenada $x$ del punto de inflexión para la gráfica de $f$? Demuestre su respuesta.

## Proyecto

**65. Puntos de inflexión** Encuentre otros libros de texto de cálculo y anote cómo definen el punto de inflexión. Luego, investigue en internet acerca de la definición de punto de inflexión. Escriba un breve artículo en que compare estas definiciones. Ilustre su artículo con gráficas idóneas.

# 5.6 Razones de cambio

**Introducción** En esta sección abordaremos las **razones de cambio**. La derivada $dy/dx$ de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable $x$. En la sección 5.1 vimos que cuando una función $s = s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo $ds/dt$ se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad? Por ejemplo, si $V$ representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces $dV/dt$ es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo $t$. Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies$^3$/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 5.6.1. En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 5.6.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s. Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia $x$ de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

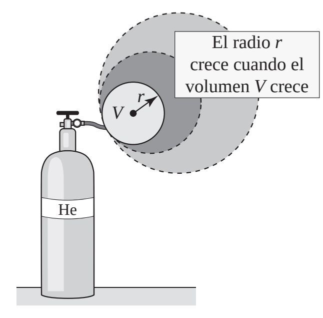


FIGURA 5.6.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

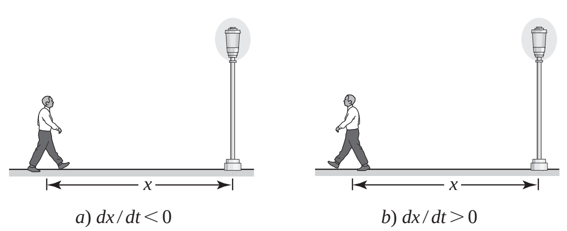



FIGURA 5.6.2 $x$ decreciente en *a*); $x$ creciente en *b*)

**Regla de potencias para funciones** Recuerde por (6) de la sección 4.7 que si $y$ denota una función de $x$, entonces con la regla de potencias para funciones obtenemos

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

donde $n$ es un número real. Por supuesto, (1) es aplicable a cualquier función; por ejemplo $r$, $x$ o $z$, que dependa de la variable $t$:

$$\frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}z^n = nz^{n-1}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

**EJEMPLO 1** Uso de (2)

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

**Solución** En el instante $t$, el volumen $V$ de una esfera es una función del radio $r$; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d}{dt}r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$$

es lo mismo que

razones relacionadas

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

Debido a que los problemas de esta sección se describen con palabras, usted debe interpretar el planteamiento en términos de símbolos matemáticos. La clave para resolver problemas planteados en lenguaje coloquial consiste en la organización. A continuación se presentan algunas sugerencias.

## Directrices para resolver problemas relacionados

*i*) Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.
*ii*) Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
*iii*) Escriba todas las razones que se **proporcionan**. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea **encontrar**.
*iv*) Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.
*v*) Diferencie con respecto al tiempo $t$ la ecuación o la función encontrada en el paso *iv*). Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

**EJEMPLO 2** Otro repaso al ejemplo 1

Un globo esférico se infla con aire a razón de 20 pies$^3$/min. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

**Solución** Como se muestra en la figura 5.6.1, denotamos el radio del globo con $r$ y su volumen con $V$. Ahora, las interpretaciones de "Un globo esférico se infla … a razón de 20

pies³/min" y "¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?" son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 20 \text{ pies}^3/\text{min}$$

y la razón que se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}.$$

Debido a que por el ejemplo 1 ya sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2(dr/dt)$. Al despejar $dr/dt$ en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

Por tanto, $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \text{ pies/min} \approx 0.18 \text{ pies/min}$$ ■

## EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto $P$ en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto $P$ en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto $P$?

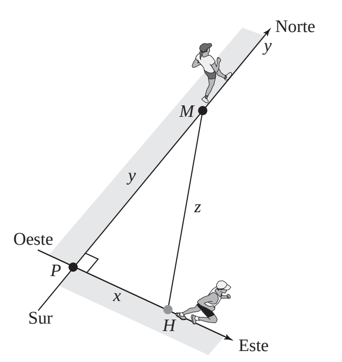


FIGURA 5.6.3 Corredores en el ejemplo 3

**Solución** Sea el tiempo $t$ medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto $P$. Como se muestra en la FIGURA 5.6.3, a $t > 0$ sean el hombre $H$ y la mujer $M$ que están en $x$ y $y$ km, respectivamente, a partir del punto $P$. Sea $z$ la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\textbf{Dado}: \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \tag{3}$$

y se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} \quad \leftarrow 20 \text{ min} = \tfrac{1}{3}\text{h}$$

En la figura 5.6.3 vemos que el triángulo $HPM$ es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables $x$, $y$ y $z$ están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{4}$$

Al diferenciar (4) con respecto a $t$,

$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \tag{5}$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$h usamos *distancia* = *razón* × *tiempo* para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h}.$$ ■

FIGURA 5.6.4 Faro en el ejemplo 4

## EJEMPLO 4 Uso de trigonometría

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 grados/s. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a 3 mi del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?

**Solución** Primero se introducen las variables $\theta$ y $x$ como se muestra en la FIGURA 5.6.4. Además, se cambia la información sobre $\theta$ a radianes al recordar que $1^{\circ}$ es equivalente a $\pi/180$ radianes. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}.$$

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan\theta \qquad \text{o bien,} \qquad x = 2\tan\theta.$$

Al diferenciar la última ecuación con respecto a $t$ y usar la razón dada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15}\sec^2\theta. \leftarrow \text{Regla de la cadena: } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$. Por tanto,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60} \text{ mi/s.}$$

■

En el siguiente ejemplo es necesario usar la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura $H$ y radio en la base $R$:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2H. \tag{6}$$

FIGURA 5.6.5 Reloj de arena en el ejemplo 5

## EJEMPLO 5 Uso de triángulos semejantes

Desde la parte superior del reloj de arena que se muestra en la FIGURA 5.6.5, la arena cae a razón constante de 4 cm$^3$/s. Exprese la razón a que crece la altura de la pila inferior en términos de la altura de la arena.

**Solución** Primero, como sugiere la figura 5.6.5, se establece la hipótesis de que la pila de arena en la parte inferior del reloj de arena tiene la forma del *frustrum* de un cono. En el instante $t > 0$, sean $V$ el volumen de la pila de arena, $h$ su altura y $r$ el radio de su superficie plana inferior. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3\text{/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \frac{dh}{dt}.$$

Necesitamos encontrar el volumen $V$ de la pila de arena en el instante $t > 0$. Esto puede lograrse como se muestra a continuación:

$V$ = volumen de todo el cono inferior – volumen del cono que no es arena.

Al usar la figura 5.6.5 y (6) con $R = 6$ y $H = 12$,

$$V = \frac{1}{3}\pi 6^2(12) - \frac{1}{3}\pi r^2(12 - h)$$

o

$$V = \pi\left(144 - 4r^2 + \frac{1}{3}r^2h\right). \tag{7}$$

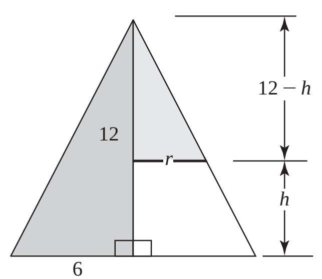



FIGURA 5.6.6 En sección transversal, el cono inferior del reloj de arena en el ejemplo 5 es un triángulo

Podemos eliminar la variable $r$ de la última ecuación al usar triángulos semejantes. Como se muestra en la FIGURA 5.6.6, el triángulo rectángulo claro es semejante al triángulo rectángulo oscuro, y así las proporciones de lados correspondientes son iguales:

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{6} \qquad \text{o bien,} \qquad r = 6 - \frac{h}{2}.$$

La última expresión se sustituye en (7) y se simplifica.

$$V = \pi\left(\frac{1}{12}h^3 - 3h^2 + 36h\right). \tag{8}$$

Al diferenciar (8) con respecto a $t$ obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(\frac{1}{4}h^2\frac{dh}{dt} - 6h\frac{dh}{dt} + 36\frac{dh}{dt}\right) = \pi\left(\frac{1}{4}h^2 - 6h + 36\right)\frac{dh}{dt}.$$

Por último, al usar la razón dada $dV/dt = 4$ es posible despejar $dh/dt$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(h-12)^2}. \tag{9}$$ ■

Observe en (9) del ejemplo 5 que la altura de la pila de arena en el reloj de arena crece más rápido cuando la altura $h$ de la pila está próxima a 12 cm.

## 5.6 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-17.

### Fundamentos

En los siguientes problemas, una solución puede requerir una fórmula especial que usted tal vez no conozca. En caso de ser necesario, consulte la lista de fórmulas que se encuentra en las páginas de recursos, al final de esta obra.

1. Un cubo se expande con el tiempo. ¿Cómo está relacionada la razón a la cual crece el volumen con la razón a la que aumenta la arista?
2. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Dado que cada lado se expande a una razón constante de 10 cm/min, encuentre la razón a la cual se expande el volumen cuando $x = 1$ cm, $y = 2$ cm y $z = 3$ cm.
3. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. La longitud de un lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿A qué razón crece el área cuando un lado mide 8 cm?
4. En el problema 3, ¿a qué razón crece el área en el instante en que el área es $\sqrt{75}$ cm$^2$?
5. Un rectángulo se expande con el tiempo. La diagonal del rectángulo aumenta a razón de 1 pulg/h y la longitud crece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg/h. ¿Cuán rápido crece el ancho cuando éste mide 6 pulg y la longitud mide 8 pulg?
6. Las longitudes de las aristas de un cubo aumentan a razón de 5 cm/h. ¿A qué razón crece la longitud de la diagonal del cubo?
7. Un velero se dirige hacia el acantilado vertical mostrado en la FIGURA 5.6.7. ¿Cómo están relacionadas las razones a las que cambian $x$, $s$ y $\theta$?

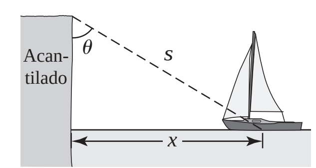


FIGURA 5.6.7 Velero en el problema 7

8. Un escarabajo se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$, donde $x$ y $y$ se miden en centímetros. Si la coordenada $x$ de la posición del escarabajo $(x, y)$ cambia a razón constante de 3 cm/min, ¿cuán rápido cambia la coordenada $y$ cuando el escarabajo está en el punto (2, 13)? ¿Cuán rápido cambia la coordenada $y$ cuando el escarabajo está 6 cm arriba del eje $x$?
9. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y^2 = x + 1$ de modo que $dx/dt = 4x + 4$. ¿Cuál es $dy/dt$ cuando $x = 8$?
10. Una partícula en movimiento continuo se mueve sobre la gráfica de $4y = x^2 + x$. Encuentre el punto $(x, y)$ sobre la gráfica en el que la razón de cambio de la coordenada $x$ y la razón de cambio de la coordenada $y$ son iguales.
11. La coordenada $x$ del punto $P$ mostrado en la FIGURA 5.6.8 aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ cm/h. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo $OPA$ cuando las coordenadas de $P$ son (8, 2)?

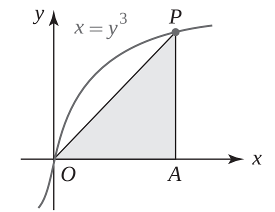


FIGURA 5.6.8 Triángulo en el problema 11

12. Una maleta está sobre la banda transportadora mostrada en la FIGURA 5.6.9 que se mueve a razón de 2 pies/s. ¿Cuán rápido aumenta la distancia vertical de la maleta a partir de la parte inferior de la banda?

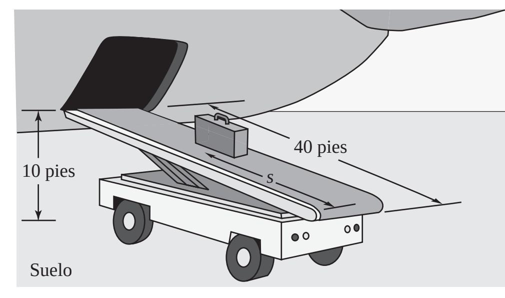


FIGURA 5.6.9 Banda transportadora en el problema 12

13. Una persona de 5 pies de estatura se aleja caminando de un poste de 20 pies de altura a razón constante de 3 pies/s. Vea la FIGURA 5.6.10.

*a*) ¿A qué razón crece la sombra de la persona?
*b*) ¿A qué razón se aleja la punta de la sombra desde la base del poste?

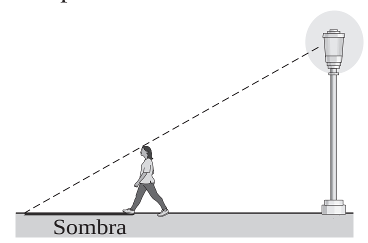



FIGURA 5.6.10 Sombra en el problema 13

**14.** Una roca arrojada a un estanque tranquilo provoca una onda circular. Suponga que el radio de la onda se expande a razón constante de 2 pies/s.
*a*) ¿Cuán rápido crece el diámetro de la onda circular?
*b*) ¿Cuán rápido crece la circunferencia de la onda circular?
*c*) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el radio es de 3 pies?
*d*) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el área es $8\pi$ pies$^2$?

**15.** Una escalera de 15 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte inferior de la escalera se aleja de la base del muro a razón constante de 2 pies/min. ¿A qué razón desciende la parte superior de la escalera en el instante en que la parte inferior de la escalera está a 5 pies del muro?

**16.** Una escalera de 20 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de $\frac{1}{2}$ pie/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en que la parte superior de la escalera está a 18 pies por arriba del suelo?

**17.** Considere la escalera cuya parte inferior se desliza alejándose de la base del muro vertical mostrado en la FIGURA 5.6.11. Demuestre que la razón a la cual crece $\theta_1$ es la misma que la razón a la cual decrece $\theta_2$.

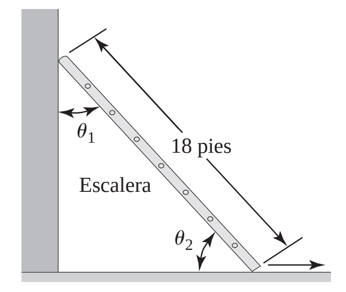



FIGURA 5.6.11 Escalera en el problema 17

**18.** La cuerda de un cometa se suelta a razón constante de 3 pies/s. Si el viento se lleva al cometa horizontalmente a una altitud de 200 pies, ¿cuán rápido se mueve el cometa cuando se han soltado 400 pies de cuerda?

**19.** Dos buques tanque zarpan de la misma terminal petrolera. Uno se dirige hacia el este a mediodía a una velocidad de 10 nudos. (1 nudo = 1 milla náutica/h. Una milla náutica mide 6 080 pies o 1.15 milla estándar.) El otro buque se dirige hacia el norte a la 1:00 p.m. a razón de 15 nudos. ¿A qué razón cambia la distancia entre los dos buques a las 2:00 p.m.?

**20.** A las 8:00 a.m., el barco $S_1$ está a 20 km dirección norte del barco $S_2$. El barco $S_1$ navega hacia el sur a razón de 9 km/h y el barco $S_2$ se dirige hacia el oeste a razón de 12 km/h. A las 9:20 a.m., ¿a qué razón cambia la distancia entre los dos barcos?

**21.** Una polea está asegurada a una orilla de un muelle situado a 15 pies por arriba de la superficie del agua. Un bote pequeño es jalado hacia el muelle por medio de una cuerda en la polea. La cuerda está unida a la proa del bote a 3 pies antes de la línea del agua. Vea la FIGURA 5.6.12. Si la cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s, ¿cuán rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 16 pies de éste?

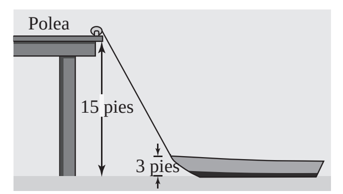



FIGURA 5.6.12 Bote y muelle en el problema 21

**22.** Un bote se jala hacia un muelle por medio de un cabrestante. El cabrestante está situado al final del muelle y se encuentra a 10 pies por arriba del nivel al que la cuerda de arrastre está atada a la proa del bote. La cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual cambia el ángulo de elevación entre la proa del bote y el final del muelle cuando se han soltado 30 pies de cuerda.

**23.** Un reflector en un bote patrulla que está a $\frac{1}{2}$ km de la costa sigue un buque de dunas de arena que se mueve en forma paralela al agua a lo largo de una playa recta. El buque se desplaza a razón constante de 15 km/h. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual gira el reflector cuando el buque está a $\frac{1}{2}$ km del punto sobre la playa más próximo al bote.

**24.** Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Vea la FIGURA 5.6.13. Un jugador golpea la pelota y corre hacia la primera base a razón de 20 pies/s. ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a segunda base en el instante en que el corredor está a 60 pies de *home*? ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a tercera base en ese mismo instante?

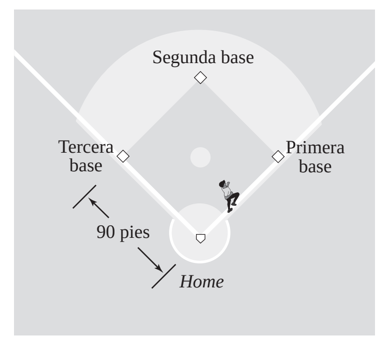



FIGURA 5.6.13 Diamante de beisbol en el problema 24

**25.** Un avión que se mueve en forma paralela al nivel del suelo a razón constante de 600 mi/h se aproxima a una estación de radar. Si la altitud del avión es de 2 mi, ¿cuán rápido disminuye la distancia entre el avión y la estación de radar cuando la distancia horizontal entre ambos es 1.5 mi? Vea la FIGURA 5.6.14.

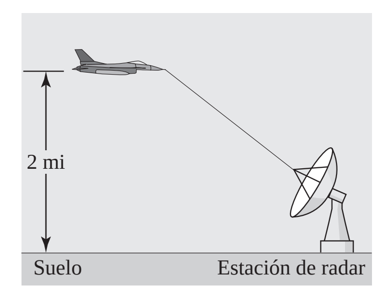



FIGURA 5.6.14 Avión en el problema 25

**26.** En el problema 25, en el punto directamente por arriba de la estación de radar, el avión asciende formando un ángulo de 30° sin aminorar su velocidad. ¿Cuán rápido aumenta la distancia entre el avión y la estación 1 minuto después? [*Sugerencia*: Use la ley de los cosenos.]

**27.** Un avión a una altitud de 4 km pasa directamente por arriba de un telescopio de rastreo ubicado en tierra. Cuando el ángulo de elevación es de 60°, se observa que el ángulo decrece a razón de 30 grados/min. ¿Cuán rápido se mueve el avión?

**28.** Una cámara de rastreo, ubicada a 1 200 pies del punto de lanzamiento, sigue a un globo de aire caliente con ascenso vertical. En el instante en que el ángulo de elevación $\theta$ de la cámara es $\pi/6$, el ángulo $\theta$ crece a razón de 0.1 rad/min. Vea la FIGURA 5.6.15. ¿A qué razón sube el globo en ese instante?

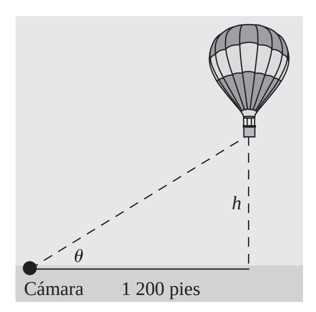



FIGURA 5.6.15 Globo en el problema 28

**29.** Un cohete se desplaza a razón constante de 1 000 mi/h a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Vea la FIGURA 5.6.16.

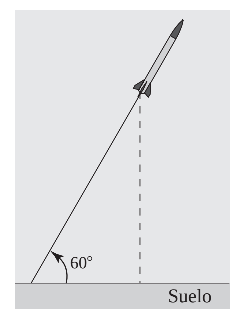



FIGURA 5.6.16 Cohete en el problema 29

***a***) ¿A qué razón crece su altitud?
***b***) ¿Cuál es la velocidad del cohete con respecto a tierra?

**30.** Un tanque de agua en forma de cilindro circular recto de 40 pies de diámetro se drena de modo que el nivel del agua disminuye a razón constante de $\frac{3}{2}$ pies/min. ¿Cuán rápido decrece el volumen del agua?

**31.** Un tanque de aceite en forma de cilindro circular recto de 8 m de radio se llena a razón constante de 10 $m^3$/min. ¿Cuán rápido sube el volumen del aceite?

**32.** Como se muestra en la FIGURA 5.6.17, un tanque rectangular de agua de 5 pies de ancho está dividido en dos tanques por medio de una separación que se mueve en la dirección indicada a razón de 1 pulg/min cuando al tanque frontal se bombea agua a razón de 1 $\text{pie}^3$/min.

***a***) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el volumen de agua en el tanque frontal es de 40 $\text{pies}^3$ y $x = 4$ pies?
***b***) En ese instante, el nivel del agua ¿sube o baja?

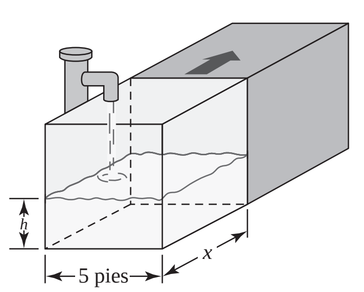



FIGURA 5.6.17 Tanque en el problema 32

**33.** Por la parte inferior de un tanque cónico se fuga agua a razón de 1 $\text{pie}^3$/min, como se muestra en la FIGURA 5.6.18.

***a***) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
***b***) ¿A qué razón cambia el radio del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
***c***) Suponga que el tanque estaba lleno en $t = 0$. ¿A qué razón cambia el nivel del agua en $t = 6$ min?

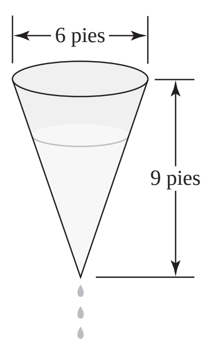



FIGURA 5.6.18 Tanque en el problema 33

**34.** Un canal de agua con extremos verticales en forma de trapezoides isósceles tiene las dimensiones mostradas en la FIGURA 5.6.19. Si se bombea agua a razón constante de $\frac{1}{2}$ $m^3$/s, ¿cuán rápido sube el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de $\frac{1}{4}$ m?

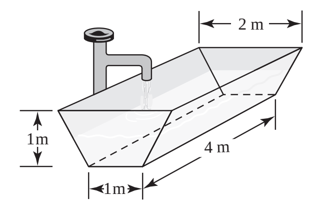


FIGURA 5.6.19 Tanque en el problema 34

**35.** Cada uno de los extremos verticales de un canal de agua de 20 pies de longitud es un triángulo equilátero con el vértice hacia abajo. Se bombea agua a razón constante de 4 pies$^3$/min.

*a*) ¿Cuán rápido sube el nivel $h$ del agua cuando la profundidad del agua es de 1 pie?

*b*) Si $h_0$ es la profundidad inicial del agua en el canal, demuestre que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10}\left(h_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{5}t\right)^{-1/2}.$$

[*Sugerencia*: Considere la diferencia de volumen después de $t$ minutos.]

*c*) Si $h_0 = \frac{1}{2}$ pie y la altura del extremo triangular es 5 pies, determine el instante en que el canal está lleno. ¿Cuán rápido sube el nivel del agua cuando el canal está lleno?

**36.** El volumen $V$ entre dos esferas concéntricas está en expansión. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras el radio de la esfera interior disminuye a razón constante $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón cambia $V$ cuando el radio exterior es 3 m y el radio interior es 1 m?

**37.** Muchos objetos esféricos, como las gotas de lluvia, las bolas de nieve y las bolas de naftalina se evaporan a una razón proporcional a su área superficial. En este caso, demuestre cómo el radio del objeto decrece a razón constante.

**38.** Si la razón a la cual cambia el volumen de una esfera es constante, demuestre que la razón a la cual cambia su área superficial es inversamente proporcional al radio.

**39.** Suponga que un cubo de hielo se derrite de modo que siempre conserva su forma cúbica. Si el volumen del cubo decrece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg$^3$/min, ¿cuán rápido cambia el área superficial del cubo cuando el área superficial es de 54 pulg$^2$?

**40.** La rueda de la fortuna mostrada en la FIGURA 5.6.20 gira una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cada 2 minutos. ¿Cuán rápido sube una pasajera en el instante en que está 64 pies por arriba del suelo? ¿Cuán rápido se mueve horizontalmente en el mismo instante?

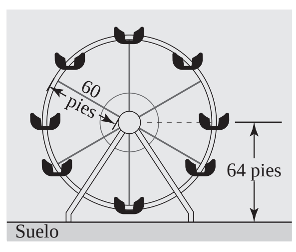


FIGURA 5.6.20 Rueda de la fortuna en el problema 40

**41.** Suponga que la rueda de la fortuna en el problema 40 está equipada con reflectores de colores fijos situados en varios puntos a lo largo de su circunferencia. Considere el reflector ubicado en el punto $P$ en la FIGURA 5.6.21. Si los haces de luz son tangentes a la rueda en el punto $P$, ¿a qué razón se aleja el reflector en $Q$ en tierra del punto $R$ en el instante en que $\theta = \pi/4$?

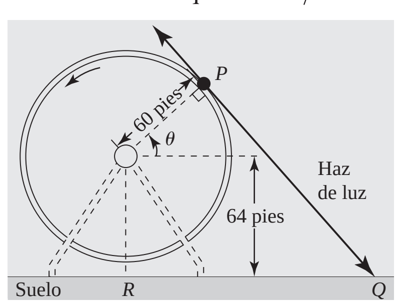


FIGURA 5.6.21 Rueda de la fortuna en el problema 41

**42.** Un clavadista salta desde una plataforma elevada con velocidad inicial hacia abajo de 1 pie/s hacia el centro de un gran tanque circular de agua. Vea la FIGURA 5.6.22. Por física, la altura del clavadista por arriba del nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 - t + 200$, donde $t \geq 0$ es el tiempo medido en segundos.

*a*) Use una función trigonométrica inversa para expresar $\theta$ en términos de $s$.

*b*) Encuentre la razón a la cual el ángulo $\theta$ subtendido por el tanque circular, según lo ve el clavadista, crece en $t = 3$ s.

*c*) ¿Cuál es el valor de $\theta$ cuando el clavadista golpea el agua?

*d*) ¿Cuál es la razón de cambio de $\theta$ cuando el clavadista golpea el agua?

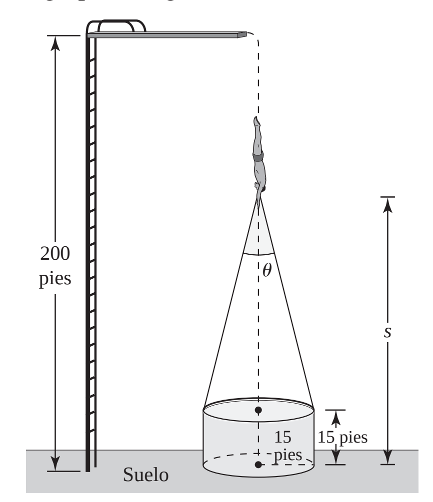


FIGURA 5.6.22 Clavadista en el problema 42

## ≡ Modelos matemáticos

**43. Resistencia** La resistencia total $R$ en un circuito paralelo que contiene dos resistores de resistencias $R_1$ y $R_2$ está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Si cada resistencia cambia con el tiempo $t$, entonces ¿cómo están relacionadas $dR/dt$, $dR_1/dt$ y $dR_2/dt$?

**44. Presión** En la expansión adiabática del aire, la presión $P$ y el volumen $V$ están relacionados por $PV^{1.4} = k$, donde $k$ es una constante. En cierto instante, la presión es 100 lb/pulg$^2$ y el volumen es 32 pulg$^3$. ¿A qué razón cambia la presión en ese instante si el volumen disminuye a razón de 2 pulg$^3$/s?

**45. Cangrejos de río** Un estudio acerca de cangrejos de río (*Orconectes virilis*) indica que el caparazón de longitud $C$ está relacionado con la longitud total $T$ según la fórmula $C = 0.493T - 0.913$, donde $C$ y $T$ se miden en milímetros. Vea la FIGURA 5.6.23.

***a*)** A medida que el cangrejo de río crece, la razón $R$ de la longitud del caparazón a la longitud total, ¿aumenta o disminuye?

***b*)** Si el cangrejo de río crece en longitud a razón de 1 mm por día, ¿a qué razón cambia la relación del caparazón a la longitud total cuando el caparazón es un tercio de la longitud total?

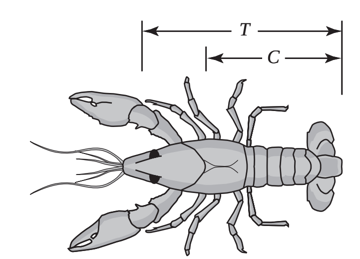



FIGURA 5.6.23 Cangrejo de río en el problema 45

**46. Peso del cerebro** Según estudios de alometría, el peso del cerebro $E$ en los peces está relacionado con el peso corporal $P$ por $E = 0.007P^{2/3}$, y el peso corporal está relacionado con la longitud del cuerpo por $P = 0.12L^{2.53}$, donde $E$ y $P$ se miden en gramos y $L$ se mide en centímetros. Suponga que la longitud de cierta especie de pez evolucionó a razón constante desde 10 cm hasta 18 cm a lo largo de 20 millones de años. ¿A qué razón, en gramos por millones de años, creció el cerebro de esta especie cuando el pez pesaba la mitad de su peso corporal final?

**47. Cantidad de movimiento** En física, la cantidad de movimiento $p$ de un cuerpo de masa $m$ que se mueve en línea recta con velocidad $v$ está dada por $p = mv$. Suponga que un avión de masa $10^5$ kg vuela en línea recta mientras en los bordes de entrada de sus alas se acumula hielo a razón constante de 30 kg/h. Vea la FIGURA 5.6.24.

***a*)** ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión si vuela a razón constante de 800 km/h?

***b*)** ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión en $t = 1$ h si en ese instante su velocidad es 750 km/h y aumenta a razón de 20 km/h?

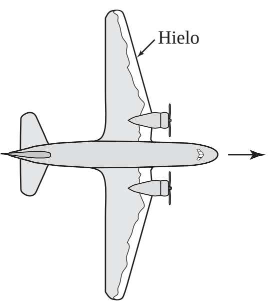



FIGURA 5.6.24 Avión en el problema 47

# 5.7 Optimización

**Introducción** En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función; por ejemplo, una empresa tiene interés natural en maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos. La próxima vez que vaya al supermercado, observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 15 oz de alimento (0.01566569 pies$^3$) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. En el mismo tenor, muchos de los denominados automóviles económicos comparten muchas características extraordinariamente semejantes. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado.

**Jugar con algunos números** Se empezará con un problema simple:

Encontrar dos números no negativos cuya suma sea 5 tales que el producto de uno y el cuadrado del otro sea el más grande posible. (1)

◀ En este punto se recomienda bastante repasar la sección 2.7.

En el ejemplo 1 de la sección 2.7 presentamos el problema:

La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números. (2)

Al comparar (1) y (2) se observa que (2), donde simplemente se pide establecer una función, está contenido en el problema de cálculo (1). La parte de cálculo de (1) requiere encontrar números no negativos de modo que su producto sea máximo. Al revisar los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.7 se indica que el producto descrito en (1) es

$$P = x(5 - x)^2 \quad \text{o bien,} \quad P(x) = 25x - 10x^2 + x^3. \tag{3}$$

El dominio de la función $P(x)$ en (3) es el intervalo [0, 5]. Este hecho proviene de la combinación de las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ o del reconocimiento de que si se permite que $x$ fuese más grande que 5, entonces $y$ sería negativo, contradiciendo la hipótesis inicial. Hay una cantidad infinita de pares de números reales no negativos (racionales e irracionales) cuya suma es 5. ¡Observe que no dijimos *enteros* no negativos! Por ejemplo

| Números: $x$, $y$ | Producto: $P = xy^2$ |
|---|---|
| $1, 4$ | $P = 1 \cdot 4^2 = 16$ |
| $2, 3$ | $P = 2 \cdot 3^2 = 18$ |
| $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$ | $P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 10.125$ |
| $\pi, 5 - \pi$ | $P = \pi \cdot (5 - \pi)^2 \approx 10.85$ |

Pares de números como $-1$ y 6, cuya suma es 5, se rechazan porque ambos números deben ser no negativos. ¿Cómo saber cuándo se han descubierto los números $x$ y $y$ que proporcionan el valor más grande; es decir, el máximo óptimo, de $P$? La respuesta reside en darse cuenta que el dominio de la función $P(x)$ es el intervalo cerrado [0, 5]. Por el teorema 5.2.3 sabemos que la función continua $P(x)$ tiene un extremo absoluto ya sea en el punto frontera del intervalo o en un número crítico en el intervalo abierto (0, 5). Por (3) vemos que $P'(x) = 25 - 20x + 3x^2 = (3x - 5)(x - 5)$ de modo que el único número crítico en el intervalo abierto (0, 5) es $\frac{5}{3}$. Resulta evidente que los valores de la función $P(0) = 0$ y $P(5) = 0$ representan el producto mínimo, de modo que el producto máximo absoluto es $P\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}(5) - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{500}{27} \approx 18.52$. En otras palabras, los dos números son $x = \frac{5}{3}$ y $y = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

**Terminología** En general, la función que describe la cantidad que se quiere optimizar, al encontrar su valor máximo o mínimo, se denomina **función objetivo**. La función en (3) es la función objetivo para el problema dado en (1). Una relación entre las variables en un problema de optimización, como la ecuación $x + y = 5$ entre los números $x$ y $y$ en el análisis anterior, se denomina **restricción**. La restricción permite eliminar una de las variables en la construcción de la función objetivo, como $P(x)$ en (3), así como impone una limitación sobre la forma en que variables como $x$ y $y$ pueden variar en realidad. Vimos que las limitaciones $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ fueron de utilidad para inferir que el dominio de la función $P(x)$ en (3) era el intervalo [0, 5]. Usted debe considerar que el tipo de problemas coloquiales en esta sección *pueden* o *pueden no* tener una restricción.

**Sugerencias** En los ejemplos y problemas siguientes se proporciona una función objetivo y es necesario traducir el lenguaje coloquial a símbolos matemáticos y construir una función objetivo. Éstos son los tipos de problemas coloquiales que muestran el poder del cálculo y constituyen una de muchas respuestas posibles a la vieja pregunta: ¿para qué es bueno? Mientras no se garantice nada, hay algunas sugerencias que es necesario tomar en cuenta al resolver un problema de optimización. Primero y lo más importante:

Desarrolle una actitud positiva y analítica. Trate de ser claro y organizado.

## Directrices para resolver problemas de optimización

*i*) Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo.
*ii*) Elabore un dibujo cuando sea posible; hágalo sencillo.

*iii*) Introduzca variables (en su dibujo, en caso de haber alguna) y observe cualquier restricción entre las variables.
*iv*) Use todas las variables necesarias para establecer la función objetivo. Si usa más de una variable, aplique la restricción para reducir la función a una variable.
*v*) Note el intervalo en que está definida la función. Determine todos los números críticos.
*vi*) Si la función objetivo es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto $(a, b)$.
*vii*) Si la función objetivo está definida sobre un intervalo que no es cerrado, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada número crítico en ese intervalo.

En el primer ejemplo se analiza un modelo matemático que proviene de física.

## EJEMPLO 1 Alcance máximo

Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal $R$ de un proyectil está dado por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g}\text{sen } 2\theta, \tag{4}$$

donde $v_0$ es la velocidad inicial constante, $g$ es la aceleración de la gravedad y $\theta$ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil.

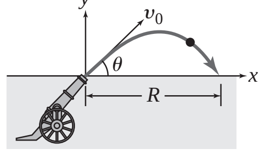


FIGURA 5.7.1 Bala de cañón en el ejemplo 1

**Solución** Como modelo físico del problema puede imaginarse que el proyectil es una bala de cañón. Vea la FIGURA 5.7.1. Para ángulos $\theta$ mayores que $\pi/2$, la bala de cañón mostrada en la figura debe salir hacia atrás. Por tanto, tiene sentido físico restringir la función en (4) al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. A partir de

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}2 \cos 2\theta$$

se observa que $dR/d\theta = 0$ cuando $\cos 2\theta = 0$ o $2\theta = \pi/2$, de modo que el único número crítico en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ es $\pi/4$. Al evaluar la función en los puntos finales y el número crítico obtenemos

$$R(0) = 0, \quad R(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}, \quad R(\pi/2) = 0.$$

Puesto que $R(\theta)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$, estos valores indican que el alcance mínimo es $R(0) = R(\pi/2) = 0$ y que el alcance máximo es $R(\pi/4) = v_0^2/g$. En otras palabras, para lograr la distancia máxima, el proyectil debe ser lanzado a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ■

Si las balas de cañón en el ejemplo 1 se disparan con la velocidad inicial $v_0$ pero con ángulos de elevación variables $\theta$ diferentes de 45°, entonces sus alcances horizontales son menores que $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$. Al analizar la función en (4) se observa que obtenemos el mismo alcance horizontal para ángulos complementarios como 20° y 70°, y 30° y 60°. Vea la FIGURA 5.7.2. Si se toma en cuenta la resistencia del aire, el alcance de todos los proyectiles es más corto que $v_0^2/g$, aunque se hayan disparado a un ángulo de elevación de 45°.

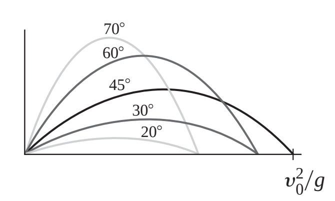


FIGURA 5.7.2 Mismo alcance para ángulos complementarios

## EJEMPLO 2 Volumen máximo

Un canalón para agua de 20 pies de longitud tiene extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados miden 4 pies de longitud. Determine la dimensión a través del extremo triangular de modo que el volumen del canalón sea máximo. Encuentre el volumen máximo.

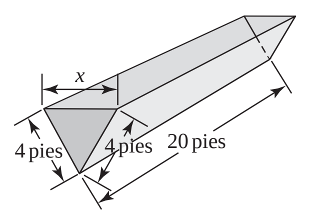


FIGURA 5.7.3 Canalón de agua en el ejemplo 2

**Solución** El canalón con la dimensión desconocida $x$ se muestra en la FIGURA 5.7.3. El volumen $V$ del canalón es

$$V = (\text{área del extremo triangular}) \times (\text{longitud}).$$

FIGURA 5.7.4 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 2

Por la FIGURA 5.7.4 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular como una función de $x$ es $\frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2/4}$. En consecuencia, el volumen del canalón como una función de $x$, la función objetivo, es

$$V(x) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{1}{4}x^2}\right) = 5x\sqrt{64 - x^2}.$$

La función $V(x)$ sólo tiene sentido sobre el intervalo cerrado $[0, 8]$. (¿Por qué?)

Al tomar la derivada y simplificar se obtiene

$$V'(x) = -10\frac{x^2 - 32}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único número crítico en el intervalo abierto $(0, 8)$ es $4\sqrt{2}$. Puesto que la función $V(x)$ es continua sobre $[0, 8]$, sabemos por el teorema 5.2.3 que $V(0) = V(8) = 0$ debe ser su mínimo absoluto. Entonces, el máximo absoluto de $V(x)$ debe ocurrir cuando el ancho a través de la parte superior del canalón es $4\sqrt{2} \approx 5.66$ pies. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160$ pies$^3$. ■

**Nota:** A menudo un problema puede resolverse en más de una forma. En retrospectiva, usted debe comprobar que la solución del ejemplo 2 es ligeramente "más limpia" si la dimensión a través de la parte superior del extremo del canalón se identifica como $2x$ en vez de como $x$. En efecto, como se muestra en el siguiente ejemplo, el ejemplo 2 puede resolverse usando una variable completamente distinta.

### EJEMPLO 3 Solución alterna del ejemplo 2

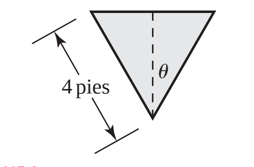



FIGURA 5.7.5 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 3

Como se muestra en la FIGURA 5.7.5, $\theta$ denota el ángulo entre la vertical y uno de los lados. A partir de trigonometría de triángulos rectángulos, la altura y la base del extremo triangular son $4 \cos \theta$ y $8 \operatorname{sen} \theta$, respectivamente. Cuando $V$ se expresa como una función de $\theta$ obtenemos $(\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}) \times (\text{longitud})$, o bien,

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \tfrac{1}{2}(4 \cos \theta)(8 \operatorname{sen} \theta) \cdot 20 \\ &= 320 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 160(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ &= 160 \operatorname{sen} 2\theta, \qquad \leftarrow \text{fórmula de ángulo doble} \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al proceder como en el ejemplo 1, encontramos que el valor máximo $V = 160$ pies$^3$ ocurre en $\theta = \pi/4$. La dimensión a través de la parte superior del canalón, o la base del triángulo isósceles, es $8 \operatorname{sen}(\pi/4) = 4\sqrt{2}$ pies. ■

**Problemas con restricciones** A menudo es más conveniente plantear una función en términos de dos variables en lugar de una. En este caso es necesario encontrar una relación entre estas variables que pueden usarse para eliminar una de las variables de la función en consideración. Como se analizó junto con (1), esta relación suele ser una ecuación denominada **restricción**. Este concepto lo ilustran los dos siguientes ejemplos.

### EJEMPLO 4 Punto más próximo

Encuentre el punto en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ más próximo a $(2, 4)$.

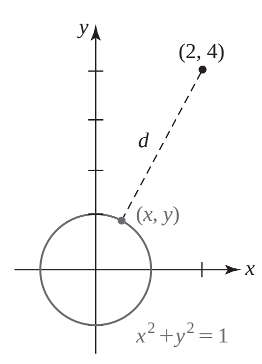



FIGURA 5.7.6 Círculo y punto en el ejemplo 4

**Solución** Sea $(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$ el punto sobre el círculo más próximo al punto $(2, 4)$. Vea la FIGURA 5.7.6.

Como se muestra en la figura, la distancia $d$ entre $(x, y)$ y $(2, 4)$ es

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} \qquad \text{o bien,} \qquad d^2 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2.$$

Luego, el punto que minimiza el cuadrado de la distancia $d^2$ también minimiza la distancia $d$. Se escribirá $D = d^2$. Al desarrollar $(x - 2)^2$ y $(y - 4)^2$ y usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$ en la forma $y = \sqrt{1 - x^2}$, encontramos

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 - 4x + 4 + \overbrace{(1 - x^2)}^{y^2} - 8\overbrace{\sqrt{1 - x^2}}^{y} + 16 \\ &= -4x - 8\sqrt{1 - x^2} + 21. \end{aligned}$$

Debido a que se ha supuesto que $x$ y $y$ son positivos, el dominio de la función anterior es el intervalo abierto (0, 1). No obstante, la solución del problema no es afectada de ninguna manera si se supone que el dominio es el intervalo cerrado [0, 1].

Al diferenciar obtenemos

$$D'(x) = -4 - 4(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-4\sqrt{1 - x^2} + 8x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Luego, $D'(x) = 0$ sólo si $-4\sqrt{1 - x^2} + 8x = 0$ o $2x = \sqrt{1 - x^2}$. Después de elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar, encontramos que $\sqrt{5}/5$ es el único número crítico en el intervalo (0, 1). Debido a que $D(x)$ es continua sobre [0, 1], a partir de los valores de la función

$$D(0) = 13, \qquad D\left(\sqrt{5}/5\right) = 21 - 4\sqrt{5} \approx 12.06 \qquad \text{y} \qquad D(1) = 17$$

concluimos que $D$ y, por consiguiente, la distancia $d$ son mínimos cuando $x = \sqrt{5}/5$. Al usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$, de manera correspondiente encontramos que $y = 2\sqrt{5}/5$. Esto significa que $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$ es el punto sobre el círculo más próximo a (2, 4). ■

## EJEMPLO 5 Cerca mínima

Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de 1 500 m$^2$. El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.

**Solución** Como se muestra en la FIGURA 5.7.7, $x$ y $y$ denotan las dimensiones del terreno cercado. La función que queremos minimizar es la cantidad total de cerca; es decir, la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca. Si esta suma se denota por el símbolo $L$, tenemos

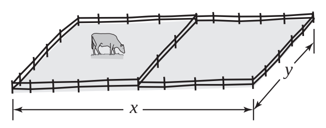


FIGURA 5.7.7 Terreno rectangular en el ejemplo 5

$$L = 2x + 3y. \tag{5}$$

Debido a que el área del terreno cercado debe ser de 1 500 m$^2$, $x$ y $y$ deben estar relacionados por el requisito de que $xy = 1\,500$. Usamos esta restricción en la forma $y = 1\,500/x$ para eliminar $y$ en (5) y escribir la función objetivo $L$ como una función de $x$:

$$L(x) = 2x + \frac{4\,500}{x} \tag{6}$$

Puesto que $x$ representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,500$, concluimos que es positiva. Pero aparte de esta restricción, sobre $x$ no hay ninguna otra restricción. Por tanto, a diferencia de los ejemplos anteriores, la función en consideración no está definida sobre un intervalo cerrado; $L(x)$ está definida sobre el intervalo no acotado $(0, \infty)$.

Al igualar a cero la derivada

$$L'(x) = 2 - \frac{4\,500}{x^2}$$

y despejar $x$, encontramos que el único número crítico es $15\sqrt{10}$. Puesto que es fácil calcular la segunda derivada, usamos el criterio de la segunda derivada. A partir de

$$L''(x) = \frac{9\,000}{x^3}$$

observamos que $L''\left(15\sqrt{10}\right) > 0$. Por el teorema 5.5.3 concluimos que $L\left(15\sqrt{10}\right) = 2\left(15\sqrt{10}\right) + 4\,500/\left(15\sqrt{10}\right) = 60\sqrt{10}$ m es la cantidad mínima requerida de cerca. Volviendo a la restricción $y = 1\,500/x$, encontramos que el valor correspondiente de $y$ es $10\sqrt{10}$. En consecuencia, las dimensiones del terreno deben ser $15\sqrt{10}$ m $\times$ $10\sqrt{10}$ m. ■

Si un objeto se mueve a razón constante, entonces la distancia, la razón y el tiempo están relacionados por *distancia* = *razón* $\times$ *tiempo*. Este resultado se usará en el último ejemplo en la forma

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{razón}}. \tag{7}$$

FIGURA 5.7.8 Mujer que se desplaza en el ejemplo 6

## EJEMPLO 6 Tiempo mínimo

Una mujer en el punto $P$ sobre una isla desea llegar a una población situada en el punto $S$ sobre una playa recta en tierra firme. El punto $P$ está a 9 millas del punto más próximo $Q$ sobre la playa y la población en el punto $S$ está a 15 millas de $Q$. Vea la FIGURA 5.7.8. Si la mujer rema un bote a razón de 3 mi/h hacia un punto $R$ en tierra, luego camina el resto del camino hacia $S$ a razón de 5 mi/h, determine dónde debe desembarcar en la playa a fin de minimizar el tiempo total de viaje.

**Solución** Como se muestra en la figura, si $x$ denota la distancia del punto $Q$ en la playa al punto $R$ donde la mujer desembarca en la playa, entonces por el teorema de Pitágoras, la distancia que ella rema es $\sqrt{81 + x^2}$. La distancia que camina es $15 - x$. Por (7), el tiempo total del viaje desde $P$ hasta $S$ es

$$T = \text{tiempo de remado} + \text{tiempo caminando}, \quad \text{o bien,} \quad T(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{3} + \frac{15 - x}{5}.$$

Puesto que $0 \le x \le 15$, la función $T(x)$ está definida sobre el intervalo cerrado [0, 15].

La derivada de $T$ es

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{6}(81 + x^2)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Igualamos esta derivada a cero y despejamos $x$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} &= \frac{1}{5} \\ \frac{x^2}{81 + x^2} &= \frac{9}{25} \\ 16x^2 &= 729 \\ x &= \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Es decir, $\frac{27}{4}$ es el único número crítico en [0, 15]. Puesto que $T(x)$ es continua sobre el intervalo, a partir de los tres valores de la función

$$T(0) = 6 \text{ h}, \quad T\left(\tfrac{27}{4}\right) = 5.4 \text{ h} \qquad \text{y} \qquad T(15) \approx 5.83 \text{ h}$$

el tiempo de viaje mínimo ocurre cuando $x = \frac{27}{4} = 6.75$. En otras palabras, la mujer desembarca en el punto $R$, a 6.75 millas del punto $Q$, y luego camina las 8.25 millas restantes hacia el punto $S$. ■

## $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Un lector perspicaz podría cuestionar por lo menos dos aspectos del ejemplo 5.

*i)* En la solución, ¿dónde entra la hipótesis de que el terreno sea dividido en dos partes iguales? De hecho, no lo hace. Lo importante es que la cerca divisoria sea paralela a los dos extremos. Pregúntese cuál sería $L(x)$ si éste *no* fuera el caso. No obstante, la ubicación real de la cerca divisoria entre los extremos es irrelevante en tanto sea paralela a éstos.

*ii)* En un problema aplicado, por supuesto que tenemos interés sólo en los extremos absolutos. En consecuencia, otra pregunta podría ser: puesto que la función $L$ en (6) no está definida sobre un intervalo cerrado y como el criterio de la segunda derivada no garantiza extremos absolutos, ¿cómo puede tenerse la certeza de que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo absoluto? Cuando se tengan dudas, siempre es posible trazar una gráfica. La FIGURA 5.7.9 responde la pregunta para $L(x)$. También, observe de nuevo el teorema 5.4.2 en la sección 5.4. Debido a que $15\sqrt{10}$ es el *único* número crítico en el intervalo que $(0, \infty)$ y ya que se demostró que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo relativo, el teorema 5.4.2 garantiza que el valor de la función $L(15\sqrt{10}) = 60\sqrt{10}$ es un mínimo absoluto.

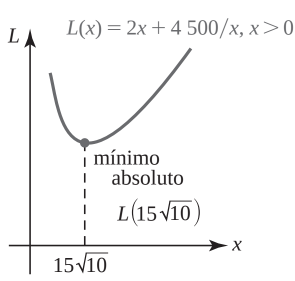



FIGURA 5.7.9 Gráfica de la función objetivo en el ejemplo 5

## 5.7 DESARROLLE SU COMPETENCIA Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-17.

### Fundamentos

1. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.
2. Encuentre dos números no negativos cuyo producto sea 50 y cuya suma sea mínima.
3. Encuentre un número que exceda su cuadrado por la mayor cantidad.
4. Sean $m$ y $n$ enteros positivos. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea $S$ de modo que el producto de la $m$-ésima potencia de uno y la $n$-ésima potencia del otro sea máximo.
5. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 1 de modo que la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro sea mínima.
6. Encuentre el valor mínimo de la suma de un número no negativo y su recíproco.
7. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^2 = 6x$ más próximo(s) a (5, 0), más próximo(s) a (3, 0).
8. Encuentre el punto sobre la gráfica de $x + y = 1$ más próximo a (2, 3).
9. Determine el punto sobre la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente mínima.
10. Determine el punto sobre la gráfica de $y = 8x^2 + 1/x$ en que la recta tangente tiene pendiente máxima.

En los problemas 11 y 12, encuentre las dimensiones de la región sombreada de modo que su área sea máxima.

11.

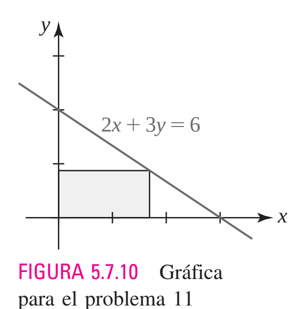



FIGURA 5.7.10 Gráfica para el problema 11

12.

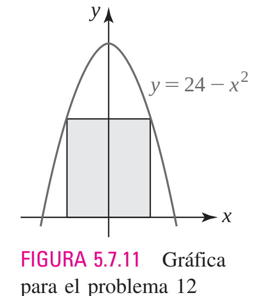



FIGURA 5.7.11 Gráfica para el problema 12

13. Encuentre los vértices $(x, 0)$ y $(0, y)$ de la región triangular sombreada en la FIGURA 5.7.12 tal que su área sea mínima.

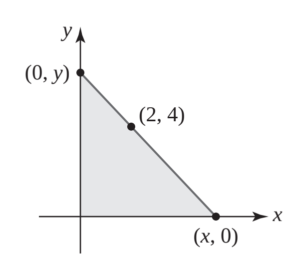



FIGURA 5.7.12 Gráfica para el problema 13

14. Encuentre la distancia vertical máxima $d$ entre las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x$ para $-2 \le x \le 1$. Vea la FIGURA 5.7.13.

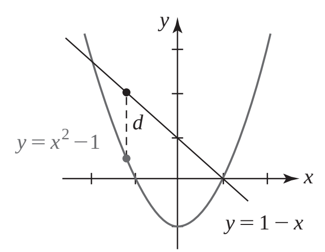



FIGURA 5.7.13 Gráfica para el problema 14

15. Un granjero tiene 3 000 pies de cerca a la mano. Determine las dimensiones de un corral rectangular que contenga el área máxima.
16. Un terreno rectangular ha de cercarse en tres porciones iguales al dividir cercas paralelas a dos lados. Vea la FIGURA 5.7.14. Si el área a encerrar es de 4 000 m$^2$, encuentre las dimensiones de terreno que requiere la cantidad mínima de cerca.

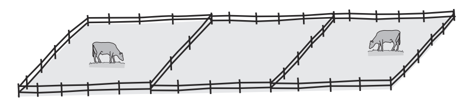


FIGURA 5.7.14 Terreno rectangular en el problema 16

17. Si la cantidad total de cerca usada es 8 000 m, encuentre las dimensiones de terreno encerrado en la figura 5.7.14 que tenga el área máxima.
18. Se piensa cercar un patio rectangular sujetando la cerca a una casa de 40 pies de ancho. Vea la FIGURA 5.7.15. La cantidad de cerca es 160 pies. Describa cómo debe usar la cerca de modo que se abarque la mayor área.

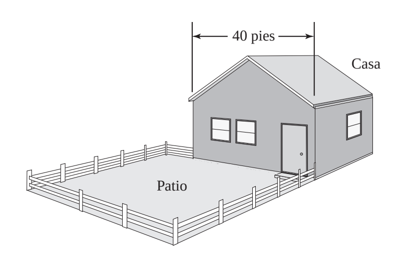



FIGURA 5.7.15 Casa y patio en el problema 18

19. Resuelva el problema 18 si la cantidad de cerca a usar mide 80 pies.
20. Un granjero desea construir un corral rectangular de 128 000 pies$^2$ con un lado a lo largo de un acantilado vertical. El cercado a lo largo del acantilado cuesta \$1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados cuesta \$2.50 por pie. Encuentre las dimensiones del corral, de modo que el costo del cercado sea mínimo.

**21.** Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32 000 $cm^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.

**22.** En el problema 21, encuentre las dimensiones de una caja cerrada que requiera la menor cantidad de material.

**23.** Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza cuadrada de cartón cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados. En la FIGURA 5.7.16, los cuadrados blancos se han cortado y el cartón se ha doblado a lo largo de las líneas discontinuas. Dado que la pieza de cartón mide 40 cm por lado, encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

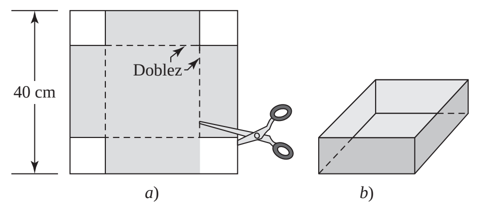



FIGURA 5.7.16 Caja abierta en el problema 23

**24.** Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza rectangular de cartón que mide 30 pulg de largo por 20 pulg de ancho. La caja puede cerrarse al cortar un cuadrado en cada esquina, al cortar sobre las líneas sólidas interiores y doblar luego el cartón por las líneas discontinuas. Vea la FIGURA 5.7.17. Exprese el volumen de la caja como una función de la variable indicada $x$. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

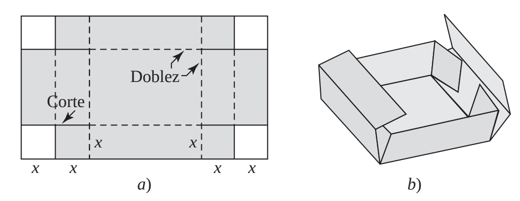



FIGURA 5.7.17 Caja abierta en el problema 24

**25.** Se producirá un canalón con sección transversal rectangular al doblar cantidades iguales de los extremos de una plancha de aluminio de 30 cm de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal de modo que el volumen sea máximo?

**26.** Se producirá un canalón cuya sección transversal es un trapezoide isósceles con dimensiones indicadas en la FIGURA 5.7.18. Determine el valor de $\theta$ tal que maximice el volumen.

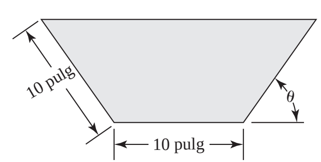



FIGURA 5.7.18 Canalón en el problema 26

**27.** Dos astabanderas están aseguradas con cables sujetos a un solo punto entre las astas. Vea la FIGURA 5.7.19. ¿Dónde debe ubicarse el punto a fin de minimizar la cantidad de cable usado?

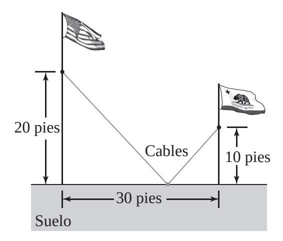



FIGURA 5.7.19 Astabanderas en el problema 27

**28.** La pista de carreras que se muestra en la FIGURA 5.7.20 debe constar de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares. La longitud de la pista debe medir 2 km. Encuentre el diseño de la pista de modo que el terreno rectangular encerrado por la pista sea máximo.

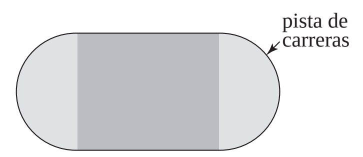



FIGURA 5.7.20 Pista de carreras en el problema 28

**29.** Una ventana normanda es un rectángulo con un semicírculo arriba de éste. Encuentre las dimensiones de la ventana con mayor área si su perímetro mide 10 m. Vea la FIGURA 5.7.21.

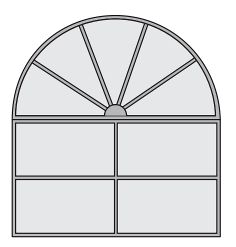


FIGURA 5.7.21 Ventana normanda en el problema 29

**30.** Vuelva a trabajar el problema 29 dado que el rectángulo está arriba de un triángulo equilátero.

**31.** Un muro de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio, como se muestra en la FIGURA 5.7.22. Encuentre la longitud $L$ de la escalera más corta, apoyada en el muro, que llega desde el suelo hasta el edificio.

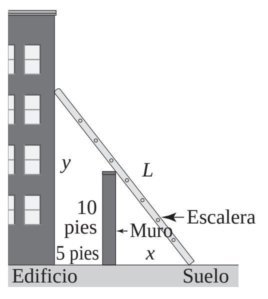



FIGURA 5.7.22 Escalera en el problema 31

**32.** Las regulaciones del servicio postal estadounidense establecen que una caja rectangular enviada por servicio de cuarta clase debe satisfacer el requerimiento de que su longitud más su circunferencia (perímetro de un extremo) no debe exceder 108 pulg. Dado que se elaborará una caja con base cuadrada, encuentre las dimensiones de la caja que tenga volumen máximo. Vea la FIGURA 5.7.23.

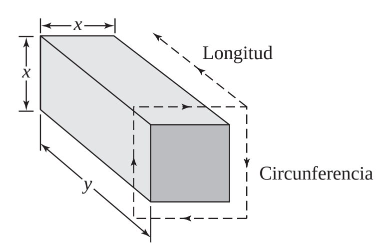



FIGURA 5.7.23 Caja en el problema 32

**33.** Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de 8 pulg de radio y 12 pulg de altura. Vea la FIGURA 5.7.24.

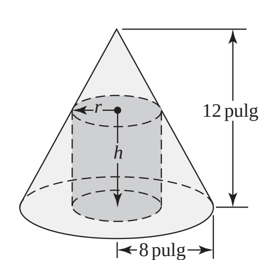



FIGURA 5.7.24 Cilindro inscrito en el problema 33

**34.** Encuentre la longitud máxima $L$ de una lámina delgada que puede transportarse horizontalmente alrededor de una esquina en ángulo recto mostrada en la FIGURA 5.7.25. [*Sugerencia*: Utilice triángulos similares.]

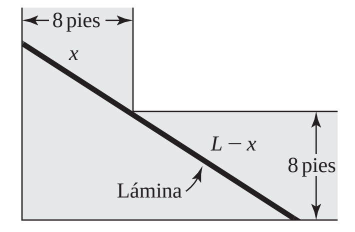



FIGURA 5.7.25 Lámina en el problema 34

**35.** Se producirá una lata para jugo en forma de cilindro circular recto con volumen de 32 pulg$^3$. Vea la FIGURA 5.7.26. Encuentre las dimensiones de la lata de modo que para hacerla se use la menor cantidad de material. [*Sugerencia*: Material = área superficial total de la lata = área de la parte superior + área de la parte inferior + área de lado lateral. Si las partes circulares superior e inferior se retiran y el cilindro se corta en forma recta por el lado y se aplana, el resultado es el rectángulo mostrado en la figura 5.7.26*c*).]

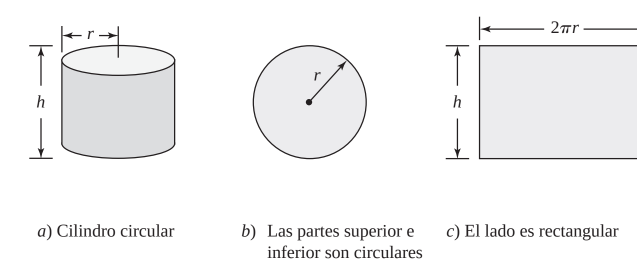



FIGURA 5.7.26 Lata de jugo en el problema 35

**36.** En el problema 35, suponga que las partes circulares superior e inferior se cortan de láminas metálicas cuadradas como se muestra en la FIGURA 5.7.27. Si se desperdicia el metal cortado de las esquinas de la lámina cuadrada, encuentre las dimensiones de la lata de modo que para elaborarla se use la menor cantidad de material (incluyendo el desperdicio).

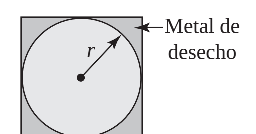



FIGURA 5.7.27 Partes superior e inferior de la lata en el problema 36

**37.** Algunas aves vuelan más lentamente sobre agua que sobre tierra. Un ave vuela a razones constantes de 6 km/h sobre agua y 10 km/h sobre tierra. Use la información de la FIGURA 5.7.28 para encontrar la trayectoria a la cual el ave debe seguir para minimizar el tiempo total de vuelo entre la costa de una isla y su nido ubicado en la costa de otra isla. [*Sugerencia*: Use *distancia* = *razón* × *tiempo*.]

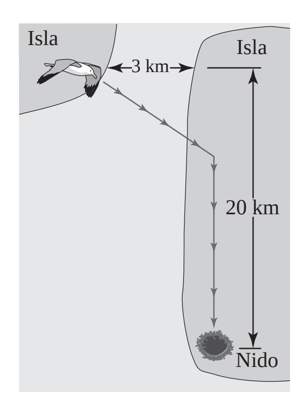



FIGURA 5.7.28 Ave en el problema 37

**38.** Se va a construir una tubería desde una refinería a través de un pantano hasta tanques de almacenamiento. Vea la FIGURA 5.7.29. El costo de construcción es $25 000 por milla sobre el pantano y $20 000 por milla sobre tierra. ¿Cómo debe construirse la tubería para que el costo de producción sea mínimo?

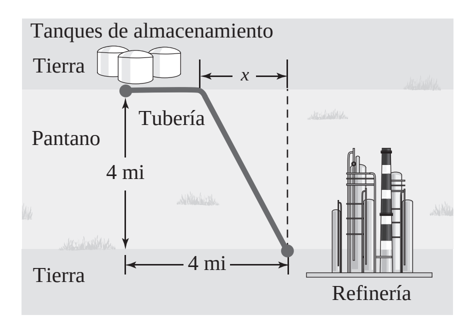



FIGURA 5.7.29 Tubería en el problema 38

**39.** Vuelva a trabajar el problema 38 dado que el costo por milla a través del pantano es el doble del costo por milla sobre tierra.

**40.** A medianoche, el barco $A$ está a 50 km al norte del barco $B$. El barco $A$ se dirige hacia el sur a 20 km/h y el barco $B$ se dirige al oeste a 10 km/h. ¿En qué instante es mínima la distancia entre los barcos?

**41.** Un contenedor que transporta desechos peligrosos se fabrica de plástico pesado y se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto como se muestra en la FIGURA 5.7.30. El volumen total del contenedor es de $30\pi$ pie$^3$. El costo por pie cuadrado para los extremos es una vez y media el costo por pie cuadrado del plástico usado en la parte cilíndrica. Encuentre las dimensiones del contenedor de modo que su costo de producción sea mínimo. [*Sugerencia*: El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área superficial es $4\pi r^2$.]

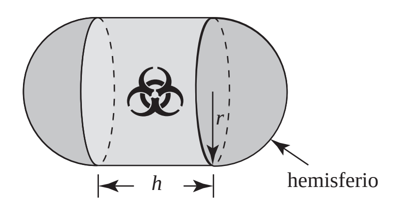



FIGURA 5.7.30 Contenedor en el problema 41

**42.** Una página impresa debe tener márgenes izquierdo y derecho de 2 pulg de espacio en blanco y márgenes superior e inferior de 1 pulg de espacio en blanco. Vea la FIGURA 5.7.31. El área de la porción impresa es 32 pulg$^2$. Determine las dimensiones de la página de modo que se use la menor cantidad de papel.

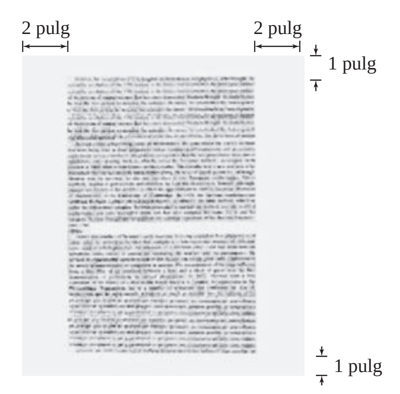



FIGURA 5.7.31 Página impresa en el problema 42

**43.** Una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg se dobla sobre el otro borde del papel como se muestra en la FIGURA 5.7.32. Encuentre el ancho $x$ del doblez de modo que la longitud $L$ del pliegue sea mínima.

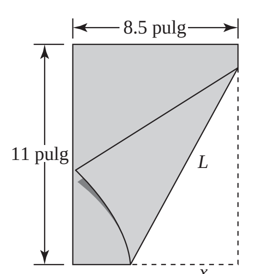



FIGURA 5.7.32 Pieza de papel en el problema 43

**44.** El marco de una cometa consta de seis partes de plástico ligero. Como se muestra en la FIGURA 5.7.33, el marco exterior de la cometa consta de cuatro piezas precortadas, dos piezas de 2 pies de longitud y dos piezas de 3 pies de longitud. Las partes restantes en forma de cruz, identificadas por $x$ en la figura, deben cortarse de longitudes tales que la cometa sea lo más grande posible. Encuentre estas longitudes.

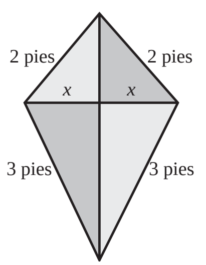



FIGURA 5.7.33 Cometa en el problema 44

**45.** Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede circunscribirse alrededor de un rectángulo de longitud $a$ y ancho $b$. Vea el rectángulo grande en la FIGURA 5.7.34.

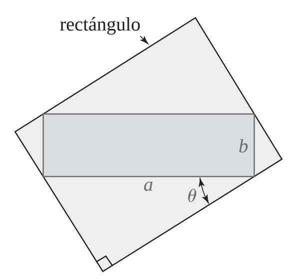



FIGURA 5.7.34 Rectángulo en el problema 45

**46.** Una estatua se coloca sobre un pedestal como se muestra en la FIGURA 5.7.35. ¿A qué distancia del pedestal debe pararse una persona para maximizar el ángulo de visión $\theta$? [*Sugerencia*: Revise la identidad trigonométrica para $\tan(\theta_2 - \theta_1)$. También es suficiente maximizar $\tan\theta$ más que $\theta$. ¿Por qué?]

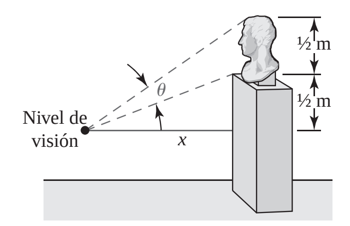



FIGURA 5.7.35 Estatua en el problema 46

**47.** La sección transversal de una viga de madera cortada de un tronco circular de diámetro $d$ mide $x$ de ancho y $y$ de profundidad. Vea la FIGURA 5.7.36. La resistencia de la viga varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad. Encuentre las dimensiones de la sección transversal de máxima resistencia.

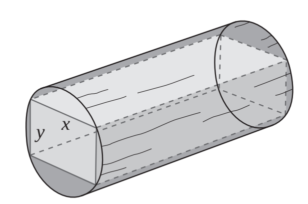



FIGURA 5.7.36 Tronco en el problema 47

**48.** El contenedor que se muestra en la FIGURA 5.7.37 se construirá al unir un cono invertido (abierto en la parte superior) con la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio 5 pies. El contenedor debe tener un volumen de 100 pies$^3$. Encuentre el valor del ángulo indicado de modo que el área superficial total del contenedor sea mínima. ¿Cuál es el área superficial mínima? [*Sugerencia*: Vea el problema 38 en la parte C de la revisión de la unidad 2.]

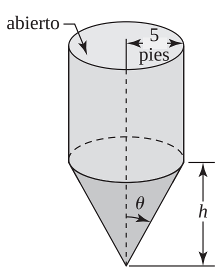



FIGURA 5.7.37 Contenedor en el problema 48

## ≡ Modelos matemáticos

**49.** La iluminancia $E$ debida a una fuente de luz o intensidad $I$ a una distancia $r$ de la fuente está dada por $E = I/r^2$. La iluminancia total proveniente de dos focos de intensidades $I_1 = 125$ e $I_2 = 216$ es la suma de las iluminancias. Encuentre el punto $P$ entre los dos focos a 10 m de distancia de éstos en que la iluminancia total es mínima. Vea la FIGURA 5.7.38.

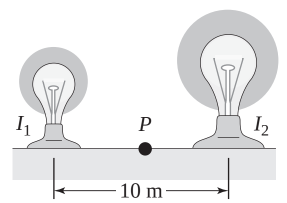



FIGURA 5.7.38 Focos en el problema 49

**50.** La iluminancia $E$ en cualquier punto $P$ sobre el borde de una mesa redonda originada por una luz colocada directamente arriba del centro de la mesa está dada por $E = (i \cos \theta)/r^2$. Vea la FIGURA 5.7.39. Dado que el radio de la mesa es 1 m y que $I = 100$, encuentre la altura en que debe colocarse la luz de modo que $E$ sea máxima.

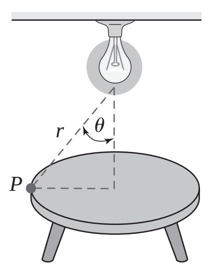



FIGURA 5.7.39 Luz y mesa en el problema 50

**51.** El **principio de Fermat** en óptica establece que la luz se desplaza del punto $A$ (en el plano $xy$) en un medio hasta el punto $B$ en otro medio siguiendo una trayectoria que requiere tiempo mínimo. Si $c_1$ es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto $A$ y $c_2$ es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto $B$, demuestre que el tiempo de recorrido de $A$ a $B$ es mínimo cuando los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$, que se muestran en la FIGURA 5.7.40, cumplen la **ley de Snell**:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

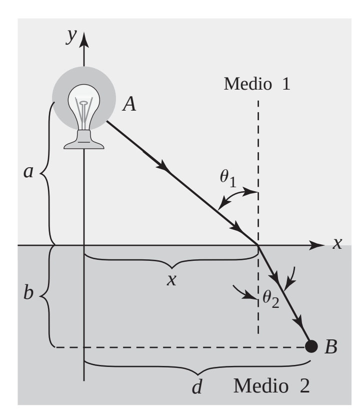



FIGURA 5.7.40 Dos medios en el problema 51

**52.** La sangre es transportada por el cuerpo mediante el tejido vascular, que consta de vasos capilares, venas, arteriolas y arterias. Una consideración de los problemas de minimización de la energía utilizada para mover la sangre a través de varios órganos consiste en encontrar un ángulo óptimo $\theta$ para la *ramificación vascular* de modo que sea mínima la resistencia total de la sangre a lo largo de una trayectoria de un vaso capilar más grande a un vaso capilar más pequeño. Vea la FIGURA 5.7.41. Use la **ley de Poiseuille**, que establece que la resistencia $R$ de un vaso capilar de longitud $l$ y radio $r$ es $R = kl/r^4$, donde $k$ es una constante, para demostrar que la resistencia total

$$R = k\left(\frac{x}{r_1^4}\right) + k\left(\frac{y}{r_2^4}\right)$$

a lo largo de la trayectoria $P_1P_2P_3$ es mínima cuando $\cos\theta = r_2^4/r_1^4$. [*Sugerencia*: Exprese $x$ y $y$ en términos de $\theta$ y $a$.]

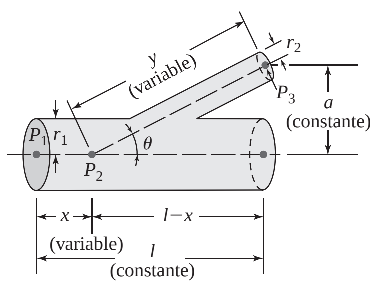



FIGURA 5.7.41 Ramificación vascular en el problema 52

**53.** La energía potencial entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = 2/x^{12} - 1/x^6$. Encuentre la energía potencial mínima entre los dos átomos.

**54.** La altitud de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante $v_0$ a un ángulo de elevación $\theta_0$ está dada por $y = (\tan\theta_0)x - \left(\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$, donde $x$ es su desplazamiento horizontal medido desde el punto de lanzamiento. Demuestre que la altitud máxima alcanzada por el proyectil es $h = (v_0^2/2g)\,\text{sen}^2\,\theta_0$.

**55.** Una viga de longitud $L$ se incrusta en muros de concreto como se muestra en la FIGURA 5.7.42. Cuando una carga constante $w_0$ se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la curva de desviación $y(x)$ para la viga está dada por

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4,$$

donde $E$ e $I$ son constantes ($E$ es el **módulo de elasticidad de Young** e $I$ es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). La curva de desviación aproxima la forma de la viga.

***a***) Determine la deflexión máxima de la viga.

***b***) Trace la gráfica de $y(x)$.

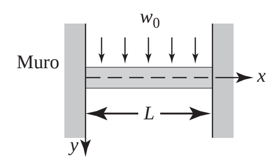



FIGURA 5.7.42 Viga en el problema 55

**56.** La relación entre la altura $h$ y el diámetro $d$ de un árbol puede aproximarse por la expresión cuadrática $h = 137 + ad - bd^2$, donde $h$ y $d$ se miden en centímetros, y $a$ y $b$ son parámetros positivos que dependen del tipo de árbol. Vea la FIGURA 5.7.43.

***a***) Suponga que el árbol alcanza una altura máxima de $H$ centímetros a un diámetro de $D$ centímetros. Demuestre que

$$h = 137 + 2\frac{H - 137}{D}d - \frac{H - 137}{D^2}d^2.$$

***b***) Suponga que cierto árbol alcanza su altura máxima posible (según la fórmula) de 15 m a un diámetro de 0.8 m. ¿Cuál es el diámetro del árbol cuando mide 10 m de alto?

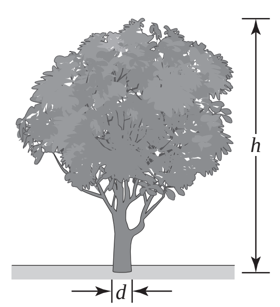



FIGURA 5.7.43 Árbol en el problema 56

**57.** Los huesos largos en los mamíferos pueden representarse como tubos cilíndricos huecos, llenos con médula, de radio exterior $R$ y radio interior $r$. Se piensa fabricar huesos ligeros pero capaces de soportar ciertos momentos de flexión. Para resistir un momento de flexión $M$, puede demostrarse que la masa $m$ por longitud unitaria del hueso y médula está dada por

$$m = \pi\rho\left[\frac{M}{K(1 - x^4)}\right]^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right),$$

donde $\rho$ es la densidad del hueso y $K$ es una constante positiva. Si $x = r/R$, demuestre que $m$ es mínima cuando $r = 0.63R$ (aproximadamente).

**58.** La razón $P$ (en mg de carbono/m$^3$/h) a la cual se lleva a cabo la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton está relacionada con la intensidad de la luz $I$ (en $10^3$ pies-candela) por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}.$$

¿A qué intensidad de la luz se cumple que $P$ es máxima?

## ≡ Piense en ello

**59. Un clásico matemático** Una persona desea cortar una pieza de 1 m de longitud de alambre en dos partes. Una parte debe doblarse en forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea máxima?

**60.** En el problema 59, suponga que una parte del alambre se dobla en forma de círculo y que la otra se dobla en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea mínima? ¿Y máxima?

**61.** Un vaso cónico se elabora a partir de una pieza circular de papel de radio $R$ al cortar un sector circular y luego unir los bordes sombreados como se muestra en la FIGURA 5.7.44.

***a***) Determine el valor de $r$ indicado en la figura 5.7.44*b*) de modo que el volumen del vaso sea máximo.

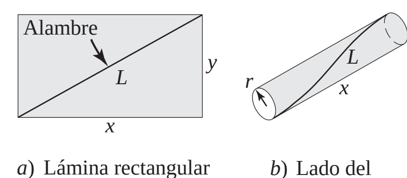
***b***) ¿Cuál es el volumen máximo del vaso?

***c***) Encuentre el ángulo central $\theta$ del sector circular de modo que el volumen del vaso cónico sea máximo.

a) b)

FIGURA 5.7.44 Vaso cónico en el problema 61

**62.** Se piensa elaborar la cara lateral de un cilindro a partir de un rectángulo de lámina de plástico ligero. Debido a que el material plástico no puede sostenerse por sí mismo, en el material se incrusta un delgado alambre rígido, como se muestra en la FIGURA 5.7.45*a*). Encuentre las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede elaborarse si el alambre tiene una longitud fija $L$. [*Sugerencia*: En este problema hay dos restricciones. En la figura 5.7.45*b*), la circunferencia de un extremo circular del cilindro es $y$.]




*a*) Lámina rectangular de plástico *b*) Lado del cilindro

FIGURA 5.7.45 Cilindro en el problema 62

**63.** En el problema 27, demuestre que cuando se usa la cantidad óptima de alambre (la cantidad mínima) entonces el ángulo $\theta_1$ que el alambre del asta bandera izquierda forma con el suelo es el mismo que el ángulo $\theta_2$ que el alambre del asta bandera derecha forma con el suelo. Vea la figura 5.7.19.

**64.** Encuentre una ecuación de la recta tangente $L$ a la gráfica de $y = 1 - x^2$ en $P(x_0, y_0)$ tal que el triángulo en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y $L$ tenga área mínima. Vea la FIGURA 5.7.46.

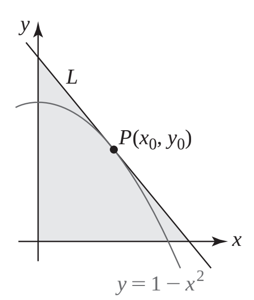
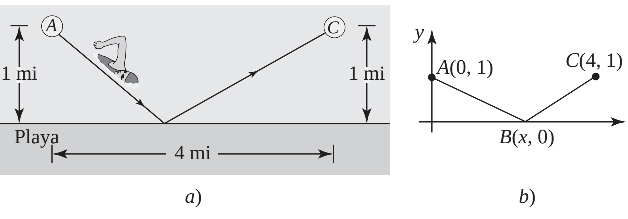



FIGURA 5.7.46 Triángulo en el problema 64

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

**65.** En una carrera, a una mujer se le solicita que nade desde un muelle flotante $A$ hacia la playa y, sin detenerse, que nade de la playa hacia otro muelle flotante $C$. Las distancias se muestran en la FIGURA 5.7.47*a*). La mujer calcula que puede nadar del muelle $A$ a la playa y luego al muelle $C$ a razón constante de 3 mi/h y luego del muelle $C$ a la playa a una razón de 2 mi/h. ¿Dónde debe tocar la playa a fin de minimizar el tiempo total de natación de $A$ a $C$? Introduzca un sistema de coordenadas $xy$ como se muestra en la figura 5.7.47*b*). Use una calculadora o un SAC para encontrar los números críticos.




*a*) *b*)

FIGURA 5.7.47 Nadadora en el problema 65

**66.** Una casa de dos pisos en construcción consta de dos estructuras $A$ y $B$ con secciones transversales rectangulares como se muestra en la FIGURA 5.7.48. Para elaborar el armazón de la estructura $B$ se requieren sostenes temporales de madera desde el nivel del suelo apoyados contra la estructura $A$ como se muestra.

***a***) Exprese la longitud $L$ del sostén como una función del ángulo $\theta$ indicado.

***b***) Encuentre $L'(\theta)$.

***c***) Use una calculadora o un SAC para encontrar la gráfica de $L'(\theta)$ sobre el intervalo $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para demostrar que $L$ sólo tiene un número crítico $\theta_c$ en $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para determinar el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $0 < \theta < \theta_c$, y el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $\theta_c < \theta < \pi/2$. ¿Cuál es su conclusión?

***d***) Encuentre la longitud mínima de un sostén.

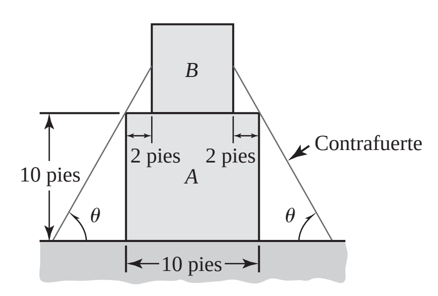



FIGURA 5.7.48 Casa en el problema 66

**67.** Considere los tres cables mostrados en la FIGURA 5.7.49.

***a***) Exprese la longitud total $L$ de los tres cables mostrados en la figura 5.7.49*a*) como una función de la longitud $L$ del cable $AB$.

***b***) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de $L$ tiene un mínimo.

***c***) Exprese la longitud del cable $AB$ de modo que la longitud total $L$ de las longitudes de los tres cables sea mínima.

***d***) Exprese la longitud total $L$ de los tres cables mostrados en la figura 5.7.49*b*) como una función de la longitud del cable $AB$.

***e***) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de $L$ tiene un mínimo.

*f*) Use la gráfica obtenida en el inciso *e*) o un SAC como ayuda en la aproximación de la longitud del cable $AB$ que minimiza la función $L$ obtenida en el inciso *d*).

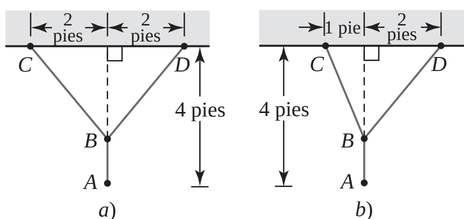



FIGURA 5.7.49 Cables en el problema 67

## Proyecto

**68. Interferencia de frecuencia** Cuando la Administración Federal de Aviación (FAA, por sus siglas en inglés) asigna numerosas frecuencias para un radiotransmisor en un aeropuerto, bastante a menudo los transmisores cercanos usan las mismas frecuencias. Como consecuencia, la FAA intenta minimizar la interferencia entre estos transmisores. En la FIGURA 5.7.50, el punto $(x_t, y_t)$ representa la ubicación de un transmisor cuya jurisdicción radial está indicada por el círculo $C$ de radio con centro en el origen. Un segundo transmisor se encuentra en $(x_i, 0)$ como se muestra en la figura. En este problema, usted desarrolla y analiza una función para encontrar la interferencia entre dos transmisores.

*a*) La intensidad de la señal de un transmisor a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos. Suponga que un punto $(x, y)$ está ubicado sobre la porción superior del círculo $C$ como se muestra en la figura 5.7.50. Exprese la intensidad primaria de la señal en $(x, y)$ desde un transmisor en $(x_t, y_t)$ como una función de $x$. Exprese la intensidad secundaria en $(x, y)$ desde el transmisor en $(x_i, 0)$ como una función de $x$. Luego defina una función $R(x)$ como un cociente de la intensidad primaria de la señal entre la intensidad secundaria de la señal. Puede considerarse que $R(x)$ es una *razón señal a ruido*. Para garantizar que la interferencia permanezca pequeña es necesario demostrar que la razón señal a ruido mínima es mayor que el umbral mínimo de la FAA de $-0.7$.

*b*) Suponga que $x_t = 760$ m, $y_t = -560$ m, $r = 1.1$ km y $x_i = 12$ km. Use un SAC para simplificar y luego trazar la gráfica de $R(x)$. Use la gráfica para estimar el dominio y el rango de $R(x)$.

*c*) Use la gráfica en el inciso *b*) para estimar el valor de $x$ donde ocurre la razón mínima $R$. Estime el valor de $R$ en ese punto. Este valor de $R$, ¿excede el umbral mínimo de la FAA?

*d*) Use un SAC para diferenciar $R(x)$. Use un SAC para encontrar la raíz de $R'(x) = 0$ y para calcular el valor correspondiente de $R(x)$. Compare sus respuestas aquí con las estimaciones en el inciso *c*).

*e*) ¿Cuál es el punto $(x, y)$ sobre el círculo $C$?

*f*) Se supuso que el punto $(x, y)$ estaba en el semiplano superior cuando $(x_t, y_t)$ estaba en el semiplano inferior. Explique por qué esta suposición es correcta.

*g*) Use un SAC para encontrar el valor de $x$ donde ocurre la interferencia mínima en términos de los símbolos $x_t$, $y_t$, $x_i$ y $r$.

*h*) ¿Dónde está el punto que minimiza la razón señal a ruido cuando el transmisor en $(x_t, y_t)$ está sobre el eje $x$? Proporcione un argumento convincente y justifique su respuesta.

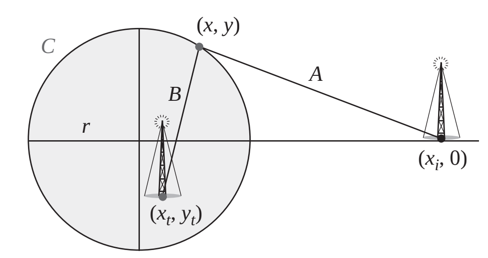



FIGURA 5.7.50 Radiotransmisores en el problema 68

# 5.8 Linealización y diferenciales

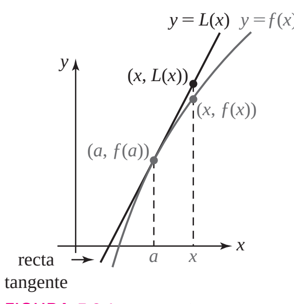



FIGURA 5.8.1 Cuando $x$ está próximo a $a$, el valor $L(x)$ está cerca de $f(x)$

**Introducción** Empezamos el análisis de la derivada con el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que una recta tangente esté muy próxima a la gráfica de $f$ siempre que $x$ esté cerca del número $a$. En otras palabras, cuando $x$ está en una pequeña vecindad de $a$, los valores de la función $f(x)$ están muy próximos al valor de las coordenadas $y$ de la recta tangente. Así, al encontrar una ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ podemos usar esa ecuación para aproximar $f(x)$.

Una ecuación de la recta tangente mostrada en la FIGURA 5.8.1 está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

Al usar notación funcional estándar, la última ecuación en (1) se escribirá como $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta función lineal recibe un nombre especial.

**Definición 5.8.1** Linealización

Si una función $y = f(x)$ es diferenciable en un número $a$, entonces decimos que la función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{2}$$

es una **linealización** de $f$ en $a$. Para un número $x$ próximo a $a$, la aproximación

$$f(x) \approx L(x) \tag{3}$$

se denomina **aproximación lineal local** de $f$ en $a$.

No es necesario memorizar (2); es simplemente la forma punto-pendiente de una recta tangente en $(a, f(a))$.

## EJEMPLO 1 Linealización de sen $x$

Encuentre una linealización de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$.

**Solución** Al usar $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$ y $f'(0) = 1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(0, 0)$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$. En consecuencia, la linealización de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$. Como se observa en la FIGURA 5.8.2, la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su linealización en $a = 0$ son casi indistinguibles cerca del origen. La aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$ de $f$ en $a = 0$ es

$$\operatorname{sen} x \approx x. \tag{4}$$ ■

**Errores** En el ejemplo 1 se recalca algo que usted ya sabe por trigonometría. La aproximación lineal local (4) muestra que el seno de un ángulo pequeño $x$ (medido en radianes) es aproximadamente el mismo que el ángulo. Para efectos de comparación, si se escoge $x = 0.1$, entonces (4) indica que $f(0.1) \approx L(0.1)$ o $\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.1$. Para efectos de comparación, con una calculadora se obtiene (redondeado hasta cinco cifras decimales) $f(0.1) = \operatorname{sen}(0.1) = 0.09983$. Luego, un error en el cálculo se define por

$$\textbf{error} = \textbf{valor verdadero} - \textbf{valor aproximado}. \tag{5}$$

No obstante, en la práctica

$$\textbf{error relativo} = \frac{\textbf{error}}{\textbf{valor verdadero}} \tag{6}$$

suele ser más importante que el error. Además (error relativo) · 100 se denomina **error porcentual**. Así, con ayuda de una calculadora se encuentra que el error porcentual en la aproximación $f(0.1) \approx L(0.1)$ es sólo alrededor de 0.2%. En la figura 5.8.2 se muestra claramente que cuando $x$ se aleja de 0, la precisión de la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ disminuye. Por ejemplo, para el número 0.9, con una calculadora obtenemos $f(0.9) = \operatorname{sen}(0.9) = 0.78333$, mientras que $L(0.9) = 0.9$. En esta ocasión el error porcentual es aproximadamente 15%.

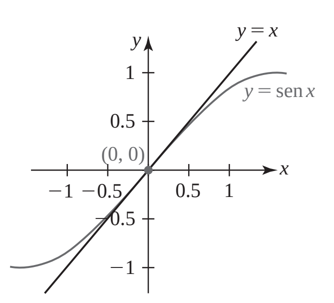


FIGURA 5.8.2 Gráfica de función y linealización en el ejemplo 1

También hemos visto el resultado del ejemplo 1 presentado de manera ligeramente distinta en la sección 3.4. Si la aproximación lineal local $\operatorname{sen} x \approx x$ la dividimos entre $x$, obtenemos $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1$ para valores de $x$ próximos a 0. Esto lleva de regreso al límite trigonométrico importante $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

## EJEMPLO 2 Linealización y aproximación

***a***) Encuentre una linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $a = 3$.
***b***) Use una aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.01}$.

**Solución**

***a***) Por la regla de potencias para funciones, la derivada de $f$ es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}.$$

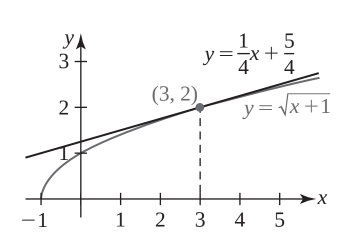


FIGURA 5.8.3 Gráficas de función y linealización en el ejemplo 2

Cuando ambas se evalúan en $a = 3$ obtenemos:

$$f(3) = \sqrt{4} = 2 \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (3, 2)$$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (3, 2) \text{ es } \tfrac{1}{4}$$

Así, por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, la linealización de $f$ en $a = 3$ está dada por $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$, o bien

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3). \tag{7}$$

Las gráficas de $f$ y $L$ se muestran en la FIGURA 5.8.3. Por supuesto, $L$ puede expresarse en la forma punto-pendiente $L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$, pero para efectos de cálculo es más conveniente la forma proporcionada en (7).

***b***) Al usar (7) del inciso *a*), tenemos la aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$, o bien

$$\sqrt{x + 1} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 3), \tag{8}$$

siempre que $x$ esté cerca de 3. Luego, al hacer $x = 2.95$ y $x = 3.01$ en (8) obtenemos, a su vez, las aproximaciones:

$$\overbrace{\sqrt{3.95}}^{f(2.95)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(2.95 - 3)}^{L(2.95)} = 2 - \frac{0.05}{4} = 1.9875.$$

y
$$\overbrace{\sqrt{4.01}}^{f(3.01)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(3.01 - 3)}^{L(3.01)} = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025.$$

**Diferenciales** La idea fundamental de linealización de una función originalmente fue expresada en la terminología de *diferenciales*. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene al número $a$. Si $x_1$ es un número diferente sobre el eje $x$, entonces los **incrementos** $\Delta x$ y $\Delta y$ son las diferencias

$$\Delta x = x_1 - a \qquad \text{y} \qquad \Delta y = f(x_1) - f(a).$$

Pero ya que $x_1 = a + \Delta x$, el **cambio en la función** es

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Para valores de $\Delta x$ que están próximos a 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una aproximación del valor de la derivada de $f$ en $a$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \qquad \text{o bien,} \qquad \Delta y \approx f'(a)\Delta x.$$

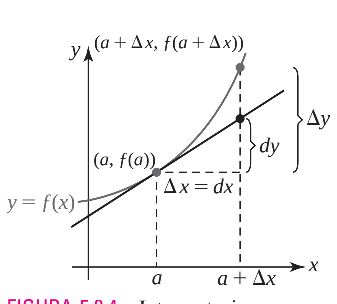


FIGURA 5.8.4 Interpretaciones geométricas de $dx$, $\Delta y$ y $dy$

Las cantidades $\Delta x$ y $f'(a)\Delta x$ se denominan **diferenciales** y se denotan por los símbolos $dx$ y $dy$, respectivamente. Es decir,

$$\Delta x = dx \qquad \text{y} \qquad dy = f'(a)\,dx.$$

Como se muestra en la FIGURA 5.8.4, para un cambio $dx$ en $x$ la cantidad $dy = f'(a)dx$ representa el **cambio en la linealización** (el *ascenso* en la recta tangente en $(a, f(a))$).* Y cuando $dx \approx 0$, el cambio en la función $\Delta y$ es aproximadamente el mismo que el cambio en la linealización $dy$:

$$\Delta y \approx dy. \tag{9}$$

* Por esta razón, la notación $dy/dx$ de Leibniz para la derivada parece un cociente.

**Definición 5.8.2** Diferenciales

La **diferencial de la variable independiente $x$** es el número diferente de cero $\Delta x$ y se denota por $dx$; es decir,

$$dx = \Delta x. \tag{10}$$

Si $f$ es una función diferenciable en $x$, entonces la **diferencial de la variable dependiente $y$** se denota por $dy$; es decir,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx. \tag{11}$$

## EJEMPLO 3 Diferenciales

***a*)** Encuentre $\Delta y$ y $dy$ para $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$.
***b*)** Compare los valores de $\Delta y$ y $dy$ para $x = 6$, $\Delta x = dx = 0.02$.

**Solución**

***a*)**
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [5(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1]\\ &= 10x\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Luego, puesto que $f'(x) = 10x + 4$, por (11) de la definición 5.8.2 tenemos

$$dy = (10x + 4)\,dx. \tag{12}$$

Al volver a escribir $\Delta y$ como $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ y usar $dx = \Delta x$, se observa que $dy = (10x + 4)\Delta x$ y $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ difieren por la cantidad $5(\Delta x)^2$.

***b*)** Cuando $x = 6$, $\Delta x = 0.02$:

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282$$

mientras $$dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28.$$

Por supuesto, la diferencia en las respuestas es $5(\Delta x)^2 = 5(0.02)^2 = 0.002$. ■

En el ejemplo 3, el valor $\Delta y = 1.282$ es la cantidad *exacta* por la cual la función $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$ cambia cuando $x$ cambia de 6 a 6.02. La diferencial $dy = 1.28$ representa una *aproximación* de la cantidad por la cual cambia la función. Como se muestra en (9), para un cambio o incremento pequeño $\Delta x$ en la variable independiente, el cambio correspondiente $\Delta y$ en la variable dependiente puede aproximarse por la diferencial $dy$.

**Otro repaso a la aproximación lineal** Las diferenciales pueden usarse para aproximar el valor $f(x + \Delta x)$. A partir de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, obtenemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Pero debido a (9), para un cambio pequeño en $x$ puede escribirse como

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Con $dy = f'(x)\,dx = f'(x)\Delta x$ la línea precedente es exactamente la misma que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx. \tag{13}$$

La fórmula en (13) ya se ha visto bajo otra forma. Si se hace $x = a$ y $dx = \Delta x = x - a$, entonces (13) se vuelve

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \tag{14}$$

El miembro derecho de la desigualdad en (14) se identifica como $L(x)$ y (13) se vuelve $f(x) \approx L(x)$, que es el resultado proporcionado en (3).

## EJEMPLO 4 Aproximación por diferenciales

Use (13) para aproximar $(2.01)^3$.

**Solución** Primero se identifica la función $f(x) = x^3$. Deseamos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$. Así, por (11),

$$dy = 3x^2\,dx = 3x^2\Delta x.$$

Por tanto, (13) proporciona

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2\Delta x.$$

Con $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$, la fórmula precedente proporciona la aproximación

$$(2.01)^3 \approx 2^3 + 3(2)^2(0.01) = 8.12.$$

### EJEMPLO 5 Aproximación por diferenciales

La arista de un cubo mide 30 cm con un error posible de $\pm 0.02$ cm. ¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?

**Solución** El volumen de un cubo es $V = x^3$, donde $x$ es la longitud de la arista. Si $\Delta x$ representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV = 3x^2\,dx = 3x^2\Delta x$ como una aproximación a $\Delta V$. Así, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$ el máximo error aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3.$$

En el ejemplo 5, un error de alrededor de 54 $\text{cm}^3$ en el volumen para un error de 0.02 cm en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo (6) es $\Delta V/V$, entonces el error relativo *aproximado* es $dV/V$. Cuando $x = 30$ y $V = (30)^3 = 27\,000$, el error porcentual máximo es $\pm 54/27\,000 = \pm 1/500$, y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo $\pm 0.2\%$.

**Reglas para diferenciales** Las reglas para diferenciación consideradas en esta unidad pueden volver a plantearse en términos de diferenciales; por ejemplo, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y $y = f(x) + g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) + g'(x)$. Por tanto, $dy = [f'(x) + g'(x)]\,dx = f'(x)\,dx + g'(x)\,dx = du + dv$. A continuación se resumen los equivalentes diferenciales de las reglas de la suma, el producto y el cociente:

$$d(u + v) = du + dv \tag{15}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \tag{16}$$

$$d(u/v) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{17}$$

Como se muestra en el siguiente ejemplo, casi no es necesario memorizar las expresiones (15), (16) y (17).

### EJEMPLO 6 Diferencial de *y*

Encuentre $dy$ para $y = x^2 \cos 3x$.

**Solución** Para encontrar la diferencial de una función, simplemente puede multiplicar su derivada por $dx$. Así, por la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3) + \cos 3x(2x)$$

de modo que

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = (-3x^2 \operatorname{sen} 3x + 2x \cos 3x)\,dx. \tag{18}$$

**Solución alterna** Al aplicar (16) obtenemos

$$\begin{aligned} dy &= x^2 d(\cos 3x) + \cos 3x\, d(x^2) \\ &= x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3\,dx) + \cos 3x(2x\,dx). \end{aligned} \tag{19}$$

Al factorizar $dx$ en (19) obtenemos (18).

## 5.8 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-17.

### Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre una linealización de la función dada en el número indicado.

**1.** $f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 9$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}; \quad a = 1$

**3.** $f(x) = \tan x; \quad a = \pi/4$ **4.** $f(x) = \cos x; \quad a = \pi/2$

**5.** $f(x) = \ln x; \quad a = 1$ **6.** $f(x) = 5x + e^{x-2}; \quad a = 2$

**7.** $f(x) = \sqrt{1+x}; \quad a = 3$ **8.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+x}}; \quad a = 6$

En los problemas 9-16, use una linealización en $a = 0$ para establecer la aproximación lineal local dada.

**9.** $e^x \approx 1 + x$ **10.** $\tan x \approx x$

**11.** $(1+x)^{10} \approx 1 + 10x$ **12.** $(1+2x)^{-3} \approx 1 - 6x$

**13.** $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ **14.** $\sqrt{x^2+x+4} \approx 2 + \frac{1}{4}x$

**15.** $\dfrac{1}{3+x} \approx \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}x$ **16.** $\sqrt[3]{1-4x} \approx 1 - \dfrac{4}{3}x$

En los problemas 17-20, use un resultado idóneo de los problemas 1-8 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

**17.** $(1.01)^{-2}$ **18.** $\sqrt{9.05}$ **19.** $10.5 + e^{0.1}$ **20.** $\ln 0.98$

En los problemas 21-24, use un resultado idóneo de los problemas 9-16 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

**21.** $\dfrac{1}{(1.1)^3}$ **22.** $(1.02)^{10}$ **23.** $(0.88)^{1/3}$ **24.** $\sqrt{4.11}$

En los problemas 25-32, use una función idónea y una aproximación lineal local para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

**25.** $(1.8)^5$ **26.** $(7.9)^{2/3}$

**27.** $\dfrac{(0.9)^4}{(0.9)+1}$ **28.** $(1.1)^3 + 6(1.1)^2$

**29.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 0.4\right)$ **30.** sen $1°$

**31.** sen $33°$ **32.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0.1\right)$

En los problemas 33 y 34, encuentre una linealización $L(x)$ de $f$ en el valor dado de $a$. Use $L(x)$ para aproximar el valor de la función dado.

**33.** $a = 1; \quad f(1.04)$ **34.** $a = -2; \quad f(-1.98)$

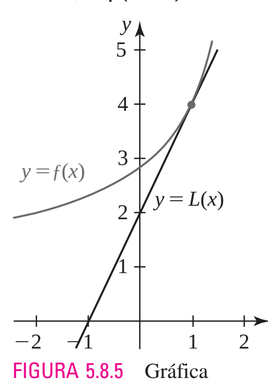



FIGURA 5.8.5 Gráfica para el problema 33

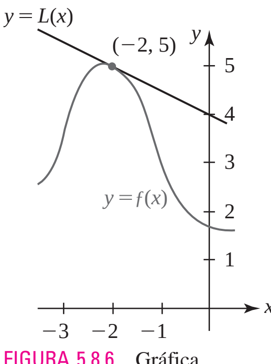



FIGURA 5.8.6 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-42, encuentre $\Delta y$ y $dy$.

**35.** $y = x^2 + 1$ **36.** $y = 3x^2 - 5x + 6$

**37.** $y = (x+1)^2$ **38.** $y = x^3$

**39.** $y = \dfrac{3x+1}{x}$ **40.** $y = \dfrac{1}{x^2}$

**41.** $y = \text{sen}\, x$ **42.** $y = -4\cos 2x$

En los problemas 43 y 44, complete la tabla siguiente para cada función.

| $x$ | $\Delta x$ | $\Delta y$ | $dy$ | $\Delta y - dy$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | |
| 2 | 0.5 | | | |
| 2 | 0.1 | | | |
| 2 | 0.01 | | | |

**43.** $y = 5x^2$ **44.** $y = 1/x$

**45.** Calcule la cantidad aproximada por la cual la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$ cambia cuando $x$ cambia de:
***a)*** 4 a 4.03 ***b)*** 3 a 2.9.

**46.** ***a)*** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2$ en $x = 1$.
***b)*** Encuentre la coordenada $y$ del punto sobre la recta tangente en el inciso *a)* que corresponde a $x = 1.02$.
***c)*** Use (3) para encontrar una aproximación a $f(1.02)$. Compare su respuesta con la del inciso *b*).

**47.** El área de un círculo con radio $r$ es $A = \pi r^2$.
***a)*** Dado que el radio de un círculo cambia de 4 cm a 5 cm, encuentre el cambio exacto en el área.
***b)*** ¿Cuál es el cambio aproximado en el área?

### Aplicaciones

**48.** Según Poiseuille, la resistencia $R$ de un vaso capilar de longitud $l$ y radio $r$ es $R = kl/r^4$, donde $k$ es una constante. Dado que $l$ es constante, encuentre el cambio aproximado en $R$ cuando $r$ cambia de 0.2 mm a 0.3 mm.

**49.** Muchas pelotas de golf constan de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su grosor es $t$ y el radio del núcleo es $r$. [*Sugerencia*: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Considere esferas concéntricas cuyos radios son $r$ y $r + \Delta r$.] Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Vea la FIGURA 5.8.7. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ y $t = 0.04$ pulg.

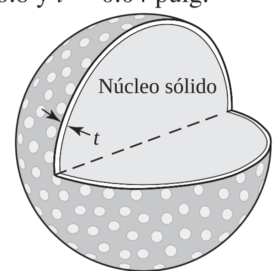



FIGURA 5.8.7 Pelota de golf en el problema 49

**50.** Un tubo de metal hueco mide 1.5 m de longitud. Encuentre una aproximación al volumen del metal si el radio interior mide 2 cm y el grosor del metal es 0.25 cm. Vea la FIGURA 5.8.8.

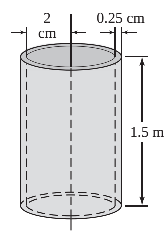



FIGURA 5.8.8 Tubo en el problema 50

**51.** El lado de un cuadrado mide 10 cm con un error posible de $\pm 0.3$ cm. Use diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

**52.** Un tanque de almacenamiento de petróleo en forma de cilindro circular mide 5 m de altura. El radio mide 8 m con un error posible de $\pm 0.25$ m. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

**53.** En el estudio de ciertos procesos adiabáticos, la presión $P$ de un gas está relacionada con el volumen $V$ que ocupa por $P = c/V^{\gamma}$, donde $c$ y $\gamma$ son constantes. Demuestre que el error relativo aproximado en $P$ es proporcional al error relativo aproximado en $V$.

**54.** El alcance de un proyectil $R$ con velocidad inicial $v_0$ y ángulo de elevación $\theta$ está dado por $R = (v_0^2/g)\text{sen}\, 2\theta$, donde $g$ es la aceleración de la gravedad. Si $v_0$ y $\theta$ se mantienen constantes, demuestre entonces que el error porcentual en el alcance es proporcional al error porcentual en $g$.

**55.** Use la fórmula en el problema 54 para determinar el alcance de un proyectil cuando la velocidad inicial es 256 pies/s, el ángulo de elevación es 45° y la aceleración de la gravedad es 32 pies/s$^2$. ¿Cuál es el cambio aproximado en el alcance del proyectil si la velocidad inicial se incrementa a 266 pies/s?

**56.** La aceleración debida a la gravedad $g$ no es constante, ya que varía con la altitud. Para efectos prácticos, en la superficie terrestre, $g$ se considera igual a 32 pies/s$^2$, 980 cm/s$^2$ o 9.8 m/s$^2$.

*a*) A partir de la ley de la gravitación universal, la fuerza $F$ entre un cuerpo de masa $m_1$ y la Tierra de masa $m_2$ es $F = km_1m_2/r^2$, donde $k$ es una constante y $r$ es la distancia al centro de la Tierra. En forma alterna, la segunda ley de movimiento de Newton implica $F = m_1 g$. Demuestre que $g = km_2/r^2$.

*b*) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que $dg/g = -2dr/r$.

*c*) Sea $r = 6\,400$ km en la superficie de la Tierra. Use el inciso *b*) para demostrar que el valor aproximado de $g$ a una altitud de 16 km es 9.75 m/s$^2$.

**57.** La aceleración debida la gravedad $g$ también cambia con la latitud. La International Geodesy Association ha definido $g$ (a nivel del mar) como una función de la latitud $\theta$ como sigue:

$$g = 978.0318\,(1 + 53.024 \times 10^{-4}\,\text{sen}^2\,\theta - 5.9 \times 10^{-6}\,\text{sen}^2\,2\theta),$$

donde $g$ se mide en cm/s$^2$.

*a*) Según este modelo matemático, ¿dónde es mínima $g$? ¿Dónde es máxima?

*b*) ¿Cuál es el valor de $g$ a latitud 60° N?

*c*) ¿Cuál es el cambio aproximado en $g$ cuando $\theta$ cambia de 60° N a 61° N? [*Sugerencia*: Recuerde usar medida en radianes.]

**58.** El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud $L$ es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si $L$ se incrementa de 4 m a 5 m. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en periodo. Suponga $g = 9.8$ m/s$^2$.

**59.** En el problema 58, dado que $L$ es fijo a 4 m, encuentre una aproximación al cambio en el periodo si el péndulo se mueve a una altitud donde $g = 9.75$ m/s$^2$.

**60.** Puesto que casi todas las placas de circulación son del mismo tamaño (12 pulg de largo), un detector óptico computarizado montado en la parte frontal del automóvil $A$ puede registrar la distancia $D$ al automóvil $B$ directamente enfrente del automóvil $A$ para medir el ángulo $\theta$ subtendido por la placa de circulación del automóvil $B$. Vea la FIGURA 5.8.9.

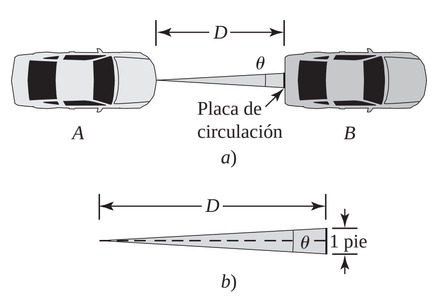



FIGURA 5.8.9 Automóviles en el problema 60

*a*) Exprese $D$ como una función del ángulo subtendido $\theta$.

*b*) Encuentre la distancia al automóvil de enfrente si el ángulo subtendido $\theta$ es 30 minutos de arco (es decir, $\frac{1}{2}°$).

*c*) Suponga en el inciso *b*) que $\theta$ decrece a razón de 2 minutos de arco por segundo, y que el automóvil $A$ se mueve a razón de 30 mi/h. ¿A qué razón se mueve el automóvil $B$?

*d*) Demuestre que el error relativo aproximado al medir $D$ está dado por

$$\frac{dD}{D} = -\frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta},$$

donde $d\theta$ es el error aproximado (en radianes) al medir $\theta$. ¿Cuál es el error relativo aproximado en $D$ en el inciso *b*) si el ángulo subtendido $\theta$ se mide con un error posible de $\pm 1$ minuto de arco?

## ≡ Piense en ello

**61.** Suponga que la función $y = f(x)$ es diferenciable en un número $a$. Si un polinomio $p(x) = c_1x + c_0$ tiene las propiedades de que $p(a) = f(a)$ y $p'(a) = f'(a)$, demuestre entonces que $p(x) = L(x)$, donde $L$ se define en (2).

**62.** Sin usar trigonometría, explique por qué para valores pequeños de $x$, $\cos x \approx 1$.

63. Suponga que una función $f$ y $f'$ son diferenciables en un número $a$ y que $L(x)$ es una linealización de $f$ en $a$. Analice: Si $f''(x) > 0$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $a$, $L(x)$ ¿sobrestima o subestima $f(x)$ para $x$ próximo a $a$?

64. Suponga que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de $y = f(x)$ tal que $f''(c) = 0$ y suponga también que $L(x)$ es una linealización de $f$ en $c$. Describa a qué se parece la gráfica de $y = f(x) - L(x)$ en una vecindad de $c$.

65. El área de un cuadrado cuyo lado mide $x$ es $A = x^2$. Suponga, como se muestra en la FIGURA 5.8.10, que cada lado del cuadrado se incrementa por una cantidad $\Delta x$. En la figura 5.8.10, identifique las áreas $\Delta A$, $dA$ y $\Delta A - dA$.

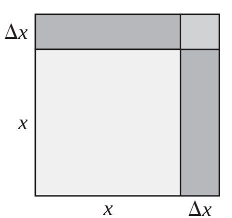



FIGURA 5.8.10 Cuadrado en el problema 65

# 5.9 La regla de L'Hôpital

**Introducción** En las unidades 3 y 4 vimos cómo el concepto de límite conduce a la idea de derivada de una función. En esta sección se invierte la situación. Vemos cómo la derivada puede usarse para calcular ciertos límites con formas indeterminadas.

**Terminología** Recuerde que en la unidad 3 se consideraron límites de cocientes como

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{3x^2+1}. \tag{1}$$

El primer límite en (1) tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$, mientras que el segundo tiene la forma indeterminada $\infty/\infty$. En general, decimos que el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la **forma indeterminada 0/0** en $x = a$ si

$$f(x)\to 0 \quad \text{y} \quad g(x)\to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x\to a$$

y la **forma indeterminada ∞/∞** en $x = a$ si

$$|f(x)|\to\infty \quad \text{y} \quad |g(x)|\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to a.$$

Los signos de valor absoluto aquí significan que cuando $x$ tiende a $a$ es posible tener, por ejemplo,

$$f(x)\to\infty,\quad g(x)\to-\infty;\ \text{o bien,}$$
$$f(x)\to-\infty,\quad g(x)\to\infty;\ \text{o bien,}$$
$$f(x)\to-\infty,\quad g(x)\to-\infty,$$

y así sucesivamente. Un límite también puede tener una forma indeterminada como

$$x\to a^-,\quad x\to a^+,\quad x\to-\infty,\quad \text{o bien,}\quad x\to\infty.$$

Límites de la forma

$$\frac{0}{k},\quad \frac{k}{0},\quad \frac{\infty}{k} \quad \text{y} \quad \frac{k}{\infty},$$

◀ Nota

donde $k$ es una constante *diferente de cero*, *no* son formas indeterminadas. Merece la pena recordar que:

- El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o $k/\infty$ es 0. (2)
- Un límite cuya forma es $k/0$ o $\infty/k$ no existe. (3)

Al establecer si límites de cocientes como los que se muestran en (1) existen, usamos manipulaciones algebraicas de factorización, cancelación y división. No obstante, recuerde que en la demostración de $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ se usó un razonamiento geométrico elaborado. Sin

embargo, la intuición algebraica y geométrica fracasan lamentablemente cuando intentan abordar un problema del tipo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}},$$

que tiene una forma indeterminada $0/0$. El siguiente teorema es de utilidad cuando se demuestra una regla de suma importancia en la evaluación de muchos límites que tienen una forma indeterminada.

**Teorema 5.9.1** Teorema del valor medio ampliado

Sean $f$ y $g$ continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $(a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ para toda $x$ en $(a, b)$. Entonces en $(a, b)$ existe un número $c$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observe que el teorema 5.9.1 se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$. Aquí no se proporciona ninguna demostración de este teorema, que evoca la demostración del teorema 5.3.2.

La siguiente regla se denomina así en honor del matemático francés G. F. A. L'Hôpital.

**Teorema 5.9.2** Regla de L'Hôpital

Suponga que $f$ y $g$ son diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al número $a$, excepto posiblemente en $a$ mismo, y que $g'(x) \neq 0$ para toda $x$ en el intervalo salvo posiblemente en $a$. Si $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ es una forma indeterminada, y $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$ o $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4}$$

**DEMOSTRACIÓN DEL CASO 0/0** Sea $(r, s)$ el intervalo abierto. Como se supone que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

también puede asumirse que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Concluimos que $f$ y $g$ son continuas en $a$. Además, puesto que $f$ y $g$ son diferenciables, éstas son continuas sobre los intervalos abiertos $(r, a)$ y $(a, s)$. En consecuencia, $f$ y $g$ son continuas en el intervalo $(r, s)$. Luego, para cualquier $x \neq a$ en el intervalo, el teorema 5.9.1 es aplicable a $[x, a]$ o $[a, x]$. En cualquier caso, entre $x$ y $a$ existe un número $c$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Al hacer $x \to a$ implica $c \to a$, y entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ ■

**EJEMPLO 1** Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

**Solución** Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, por (4) es posible escribir

La letra *h* en cursiva arriba de la primera desigualdad indica que los dos límites son iguales como resultado de aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx}x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$ ■

**EJEMPLO 2** Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

**Solución** Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, se aplica (4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\dfrac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$ ■

El resultado proporcionado en (4) sigue siendo válido cuando $x \to a$ se sustituye por límites por un lado o por $x \to \infty$, $x \to -\infty$. La demostración para el caso $x \to \infty$ puede obtenerse al usar la sustitución $x = 1/t$ en $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ y al observar que $x \to \infty$ es equivalente a $t \to 0^+$.

**EJEMPLO 3** Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

**Solución** Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $\infty/\infty$. Así, por la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

En este último límite, $xe^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras 1 permanece constante. En consecuencia, por (2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$ ■

Al resolver un problema puede ser necesario aplicar varias veces la regla de L'Hôpital.

**EJEMPLO 4** Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

**Solución** Resulta evidente que la forma indeterminada es $\infty/\infty$, de modo que por (4),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2}.$$

Puesto que el nuevo límite sigue teniendo la forma indeterminada $\infty/\infty$, aplicamos (4) por segunda vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} = \frac{3}{2}.$$ ■

**EJEMPLO 5** Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$.

**Solución** El límite dado y el límite obtenido después de una aplicación de la regla de L'Hôpital tienen la forma indeterminada $\infty/\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (4), observamos que $e^{3x}\to\infty$ mientras el denominador permanece constante. A partir de ello concluimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

## EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4}{e^{2x}}$.

**Solución** Aplicamos (4) cuatro veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x}}&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{4e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=0.\end{aligned}$$

■

En aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital, algunas veces es posible cambiar un límite de una forma indeterminada a otra; por ejemplo, $\infty/\infty$ a $0/0$.

## EJEMPLO 7 Forma indeterminada $\infty/\infty$

Evalúe $\lim_{t\to\pi/2^+}\dfrac{\tan t}{\tan 3t}$.

**Solución** Se observa que $\tan t\to-\infty$ y $\tan 3t\to-\infty$ cuando $t\to\pi/2^+$. Entonces, por (4),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t}\quad(\infty/\infty)\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t}\quad(0/0)\\&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\cos 3t(-3\,\mathrm{sen}\,3t)}{6\cos t(-\mathrm{sen}\,t)}\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\,\mathrm{sen}\,3t\cos 3t}{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\mathrm{sen}\,6t}{\mathrm{sen}\,2t}\quad(0/0)\\&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{6\cos 6t}{2\cos 2t}=\frac{-6}{-2}=3.\end{aligned}$$

← se vuelve a escribir usando $\sec t = 1/\cos t$

← se vuelve a escribir usando la fórmula del ángulo doble en el numerador y en el denominador

■

## EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

**Solución** El límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x=1$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}\overset{h}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}}{x}=\frac{0}{1}=0.$$

■

**Otras formas indeterminadas** Hay cinco formas indeterminadas adicionales:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty. \tag{5}$$

Por medio de una combinación de álgebra y un poco de astucia a menudo es posible convertir una de estas nuevas formas de límites ya sea a $0/0$ o a $\infty/\infty$.

**La forma $\infty - \infty$** El siguiente ejemplo ilustra un límite que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Este ejemplo debe anular cualquier convicción garantizada de que $\infty - \infty = 0$.

**EJEMPLO 9** Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right]$.

**Solución** Se observa que $(3x+1)/\operatorname{sen} x \to \infty$ y $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. No obstante, después de escribir la diferencia como una fracción simple, se identifica la forma $0/0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x-\operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} && \leftarrow \text{común denominador}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6x+1-\cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6+\operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x + 2\cos x}\\
&= \frac{6+0}{0+2} = 3.
\end{aligned}$$

**La forma $0 \cdot \infty$** Si

$$f(x) \to 0 \qquad \text{y} \qquad |g(x)| \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to a,$$

entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Un límite que tiene esta forma puede cambiarse a uno con la forma $0/0$ o $\infty/\infty$ al escribir, a su vez,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{o bien,} \qquad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

**EJEMPLO 10** Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

**Solución** Puesto que $1/x \to 0$, tenemos $\operatorname{sen}(1/x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Por tanto, el límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Al escribir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$$

ahora tenemos la forma $0/0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(-x^{-2})\cos(1/x)}{(-x^{-2})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1.
\end{aligned}$$

En la última línea se usó el hecho de que $1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\cos 0 = 1$.

**Las formas $0^0$, $\infty^0$ y $1^\infty$** Suponga que $y = f(x)^{g(x)}$ tiende a $0^0$, $\infty^0$ o $1^\infty$ cuando $x \to a$. Al tomar el logaritmo natural de $y$:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

observamos que el miembro derecho de

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

tiene la forma $0 \cdot \infty$. Si se supone que $\lim_{x\to a} \ln y = \ln(\lim_{x\to a} y) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} y = e^L \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Por supuesto, el procedimiento que acaba de presentarse es aplicable a límites que implican

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to \infty \quad \text{o bien,} \quad x \to -\infty.$$

## EJEMPLO 11 Forma indeterminada $0^0$

Evalúe $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$.

**Solución** Ya que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, por (2) concluimos que $1/\ln x \to 0$. Así, el límite dado tiene la forma indeterminada $0^0$. Luego, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1.$$

Observe que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} y = e^1$ o de manera equivalente, $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$. ■

## EJEMPLO 12 Forma indeterminada $1^\infty$

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

**Solución** Ya que $1 - 3/x \to 1$ cuando $x \to \infty$, la forma indeterminada es $1^\infty$. Si

$$y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} \qquad \text{entonces} \qquad \ln y = 2x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

Observe que la forma de $\lim_{x\to\infty} 2x \ln(1 - 3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras la forma de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

es $0/0$. Al aplicar (4) al último límite y simplificar obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} 2\frac{\ln(1 - 3/x)}{1/x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} 2\frac{\frac{3/x^2}{(1 - 3/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{(1 - 3/x)} = -6.$$

A partir de $\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln(\lim_{x\to\infty} y) = -6$ concluimos que $\lim_{x\to\infty} y = e^{-6}$ o

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}.$$ ■

L'Hôpital

■ **Posdata: Un poco de historia** Es cuestionable si el matemático francés **Marquis Guillaume François Antoine de L'Hôpital** (1661-1704) descubrió la regla que lleva su nombre. El resultado se debe probablemente a Johann Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital fue el primero en publicar la regla en su texto *Analyse des Infiniment Petits*. Este libro fue publicado en 1696 y es considerado como el primer libro de texto de cálculo.

## $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) En la aplicación de la regla de L'Hôpital, los estudiantes a veces interpretan mal

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x\to a}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Recuerde que en la regla de L'Hôpital se utiliza el *cociente de derivadas* y no la *derivada del cociente*.

*ii*) Analice un problema antes de saltar a su solución. El límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)/x$ es de la forma $1/0$ y, en consecuencia, no existe. La falta de previsión matemática al escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{1}=0$$

es una aplicación incorrecta de la regla de L'Hôpital. Por supuesto, la "respuesta" carece de significado.

*iii*) La regla de L'Hôpital no es un remedio para todas las formas indeterminadas. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} e^x/e^{x^2}$ es ciertamente de la forma $\infty/\infty$, pero

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

no es de ayuda práctica.

## 5.9 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-18.

### Fundamentos

En los problemas 1-40, use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

**1.** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

**2.** $\lim_{t\to 3}\frac{t^3-27}{t-3}$

**3.** $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\ln x}$

**4.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

**5.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x+x^2}$

**6.** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$

**7.** $\lim_{t\to \pi}\frac{5\operatorname{sen}^2 t}{1+\cos t}$

**8.** $\lim_{\theta\to 1}\frac{\theta^2-1}{e^{\theta^2}-e}$

**9.** $\lim_{x\to 0}\frac{6+6x+3x^2-6e^x}{x-\operatorname{sen} x}$

**10.** $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x^3}{5x+7x^3}$

**11.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot 2x}{\cot x}$

**12.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x/6)}{\arctan(x/2)}$

**13.** $\lim_{t\to 2}\frac{t^2+3t-10}{t^3-2t^2+t-2}$

**14.** $\lim_{r\to -1}\frac{r^3-r^2-5r-3}{(r+1)^2}$

**15.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

**16.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x^2+1}$

**17.** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{x^2}$

**18.** $\lim_{x\to \infty}\frac{2e^{4x}+x}{e^{4x}+3x}$

**19.** $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}$

**20.** $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(3x^2+5)}{\ln(5x^2+1)}$

**21.** $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{x-2}$

**22.** $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3^x}{x}$

**23.** $\lim_{x\to \infty}\frac{x\ln x}{x^2+1}$

**24.** $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cosh t}{t^2}$

**25.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$

**26.** $\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} 2x)^2}{x^2}$

**27.** $\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^4}$

**28.** $\lim_{x\to \infty}\frac{e^{1/x}}{\operatorname{sen}(1/x)}$

**29.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x-\operatorname{sen}^{-1}x}$

**30.** $\lim_{t\to 1}\frac{t^{1/3}-t^{1/2}}{t-1}$

**31.** $\lim_{u\to \pi/2}\frac{\ln(\operatorname{sen} u)}{(2u-\pi)^2}$

**32.** $\lim_{\theta\to \pi/2}\frac{\tan\theta}{\ln(\cos\theta)}$

**33.** $\lim_{x\to -\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$

**34.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{2x^2}$

**35.** $\lim_{r\to 0}\frac{r-\cos r}{r-\operatorname{sen} r}$

**36.** $\lim_{t\to \pi}\frac{\csc 7t}{\csc 2t}$

**37.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln^2(1+3x)}$

**38.** $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}\right)^2$

**39.** $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+e^x-e^{-x}-2\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$

**40.** $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x^2-64}$

En los problemas 41-74, identifique el límite dado como una de las formas indeterminadas proporcionadas en (5). Use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

**41.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

**42.** $\lim_{x\to 0^+}(\cot x-\csc x)$

**43.** $\lim_{x\to \infty}x(e^{1/x}-1)$

**44.** $\lim_{x\to 0^+}x\ln x$

**45.** $\lim_{x\to 0^+}x^x$

**46.** $\lim_{x\to 1^-}x^{1/(1-x)}$

**47.** $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

**48.** $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2}\right]$

**49.** $\lim_{t\to3}\left[\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2-9}-\dfrac{2}{t^2-9}\right]$

**50.** $\lim_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$

**51.** $\lim_{\theta\to0}\theta\csc 4\theta$

**52.** $\lim_{x\to\pi/2^-}(\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$

**53.** $\lim_{x\to\infty}(2+e^x)^{e^{-x}}$

**54.** $\lim_{x\to0^-}(1-e^x)^{x^2}$

**55.** $\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{t}\right)^t$

**56.** $\lim_{h\to0}(1+2h)^{4/h}$

**57.** $\lim_{x\to0}x^{(1-\cos x)}$

**58.** $\lim_{\theta\to0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$

**59.** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2\operatorname{sen}^2(2/x)}$

**60.** $\lim_{x\to1}(x^2-1)^{x^2}$

**61.** $\lim_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{x^2+3x-4}\right]$

**62.** $\lim_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$

**63.** $\lim_{x\to\infty}x^5e^{-x}$

**64.** $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$

**65.** $\lim_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

**66.** $\lim_{t\to\pi/4}\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan 2t$

**67.** $\lim_{x\to\infty}x\tan\left(\dfrac{5}{x}\right)$

**68.** $\lim_{x\to0^+}x\ln(\operatorname{sen} x)$

**69.** $\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}-x^2\right]$

**70.** $\lim_{x\to0}(1+5\operatorname{sen} x)^{\cot x}$

**71.** $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^x$

**72.** $\lim_{\theta\to\pi/2^-}(\sec^3\theta-\tan^3\theta)$

**73.** $\lim_{x\to0}(\operatorname{senh} x)^{\tan x}$

**74.** $\lim_{x\to0^+}x^{(\ln x)^2}$

En los problemas 75 y 76, identifique el límite dado.

**75.** $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

**76.** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

## ≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 77 y 78, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada para el valor de $n$ sobre el intervalo indicado. En cada caso, conjeture el valor de $\lim_{x\to\infty}f(x)$.

**77.** $f(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 20]$; $n=5$ sobre $[0, 25]$

**78.** $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 15]$; $n=5$ sobre $[0, 20]$

En los problemas 79 y 80, use $n! = 1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$,

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n=n!,$$

donde $n$ es un entero positivo, y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

**79.** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$

**80.** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$

## ≡ Aplicaciones

**81.** Considere el círculo que se muestra en la FIGURA 5.9.1.

*a)* Si el arco $ABC$ mide 5 pulg de longitud, exprese el área $A$ de la región oscura como una función del ángulo indicado $\theta$. [*Sugerencia*: El área de un sector circular es $\frac{1}{2}r^2\theta$ y la longitud del arco de un círculo es $r\theta$, donde $\theta$ se mide en radianes.]

*b)* Evalúe $\lim_{\theta\to0}A(\theta)$

*c)* Evalúe $\lim_{\theta\to0}dA/d\theta$

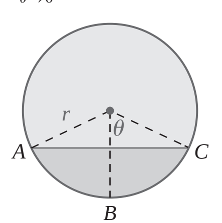



FIGURA 5.9.1 Círculo en el problema 81

**82.** En ausencia de fuerzas de amortiguamiento, un modelo matemático para el desplazamiento $x(t)$ de una masa en un resorte (vea el problema 60 en la sección "Desarrolle su competencia 3.5") cuando el sistema es activado sinusoidalmente por una fuerza externa de amplitud $F_0$ y frecuencia $\gamma/2\pi$ es

$$x(t)=\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t),\quad \gamma\neq\omega,$$

donde $\omega/2\pi$ es la frecuencia de las vibraciones libres (no excitadas) del sistema.

*a)* Cuando $\gamma=\omega$, se dice que el sistema masa-resorte está en **resonancia pura**, y el desplazamiento de la masa se define por

$$x(t)=\lim_{\gamma\to\omega}\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t).$$

Determine $x(t)$ al encontrar este límite.

*b)* Use un dispositivo para graficar y analice la gráfica de $x(t)$ encontrada en el inciso *a*) en el caso en que $F_0=2, \gamma=\omega=1$. Describa el comportamiento del sistema masa-resorte en resonancia pura cuando $t\to\infty$.

**83.** Cuando un gas ideal se expande a partir de la presión $p_1$ y volumen $v_1$ hasta la presión $p_2$ y volumen $v_2$ tal que $pv^\gamma=k$ (constante) durante toda la expansión, si $\gamma\neq1$, entonces el trabajo realizado está dado por

$$W=\frac{p_2v_2-p_1v_1}{1-\gamma}.$$

*a)* Demuestre que

$$W=p_1v_1\left[\frac{(v_2/v_1)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right].$$

*b)* Encuentre el trabajo realizado en el caso en que $pv=k$ (constante) durante toda la expansión al hacer $\gamma\to1$ en la expresión en el inciso *a*).

**84.** La retina es más sensible a fotones que penetran al ojo cerca del centro de la pupila y menos sensible a la luz que entra cerca del borde de la pupila. (Este fenómeno se denomina **efecto Stiles-Crawford** del primer tipo.) El porcentaje $\sigma$ de fotones que llegan a los fotopigmentos

está relacionado con el radio de la pupila $p$ (medido en radianes) por el modelo matemático

$$\sigma = \frac{1 - 10^{-0.05p^2}}{0.115p^2} \times 100.$$

Vea la FIGURA 5.9.2.

*a*) ¿Qué porcentaje de fotones llega a los fotopigmentos cuando $p = 2$ mm?

*b*) Según la fórmula, ¿cuál es el porcentaje limitante cuando el radio de la pupila tiende a cero? ¿Puede explicar por qué parece ser más de 100%?

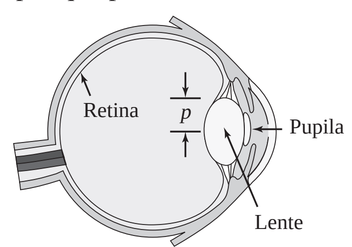



FIGURA 5.9.2 Ojo en el problema 84

## ≡ Piense en ello

**85.** Suponga que una función $f$ tiene segunda derivada. Evalúe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

**86.** *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}.$$

*b*) A partir de la gráfica en el inciso *a*), conjeture el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

*c*) Explique por qué la regla de L'Hôpital no es válida para $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

# Competencia final de la unidad 5

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-18.

## A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

**1.** Si $f$ es creciente sobre un intervalo, entonces $f'(x) > 0$ sobre el intervalo. _____

**2.** Una función $f$ tiene un extremo en $c$ cuando $f'(c) = 0$. _____

**3.** Una partícula en movimiento rectilíneo desacelera cuando su velocidad $v(t)$ disminuye. _____

**4.** Si la posición de una partícula en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal es $s(t) = t^2 - 2t$, entonces la partícula acelera para $t > 1$. _____

**5.** Si $f''(x) < 0$ para toda $x$ en el intervalo $(a, b)$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo sobre el intervalo. _____

**6.** Si $f''(c) = 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____

**7.** Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$. _____

**8.** Si $f(c)$ es un mínimo relativo, entonces $f''(c) > 0$. _____

**9.** Una función $f$ que es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto sobre el intervalo. _____

**10.** Todo extremo absoluto también es un extremo relativo. _____

**11.** Si $c > 0$ es una constante y $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - cx^2$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____

**12.** $x = 1$ es un número crítico de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. _____

**13.** Si $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ sobre un intervalo $I$, entonces $f + g$ es creciente sobre $I$. _____

**14.** Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo $I$, entonces $f''(x) > 0$ sobre $I$. _____

**15.** Un límite de la forma $\infty - \infty$ siempre tiene valor 0. _____

**16.** Un límite de la forma $1^\infty$ siempre es 1. _____

**17.** Un límite de la forma $\infty/\infty$ es indeterminado. _____

**18.** Un límite de la forma $0/\infty$ es indeterminado. _____

**19.** Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ son ambos de la forma $\infty/\infty$, entonces el primer límite no existe.

_____

**20.** Para una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital establece que el límite de un cociente es lo mismo que la derivada del cociente. _____

## B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

**1.** Para una partícula que se mueve rectilíneamente, la aceleración es la primera derivada de __________.

**2.** La gráfica de un polinomio cúbico puede tener a lo sumo __________ punto(s) de inflexión.

**3.** Un ejemplo de una función $y = f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo sobre $(0, \infty)$ y creciente sobre $(-\infty, \infty)$ es ________.

**4.** Dos números no negativos cuya suma es 8 tales que la suma de sus cuadrados es máximo son ________.

**5.** Si $f$ es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre $(a, b)$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces en $(a, b)$ existe algún $c$ tal que $f'(c) =$ ________.

**6.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} =$ para todo entero $n$.

**7.** La suma de un número positivo y su recíproco siempre es mayor que o igual a __________.

**8.** Si $f(1) = 13$ y $f'(x) = 5^{x^2}$, entonces una linealización de $f$ en $a = 1$ es __________ y $f(1.1) \approx$ __________.

**9.** Si $y = x^2 - x$, entonces $\Delta y =$ __________.

**10.** Si $y = x^3e^{-x}$, entonces $dy =$ __________.

## C. Ejercicios

En los problemas 1-4, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

**1.** $f(x) = x^3 - 75x + 150; \quad [-3, 4]$

**2.** $f(x) = 4x^2 - \dfrac{1}{x}; \quad [\frac{1}{4}, 1]$

**3.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 4}; \quad [-1, 3]$

**4.** $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^{1/2}; \quad [1, 3]$

**5.** Trace la gráfica de una función continua que tenga las propiedades:

$$\begin{aligned} &f(0) = 1, && f(2) = 3 \\ &f'(0) = 0, && f'(2) \text{ no existe} \\ &f'(x) > 0, && x < 0 \\ &f'(x) > 0, && 0 < x < 2 \\ &f'(x) < 0, && x > 2. \end{aligned}$$

**6.** Use las derivadas primera y segunda como ayuda para comparar las gráficas de

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = x + \operatorname{sen} 2x.$$

**7.** La posición de una partícula que se mueve sobre una línea recta está dada por $s(t) = -t^3 + 6t^2$.

***a)*** Grafique el movimiento sobre el intervalo de tiempo $[-1, 5]$.

***b)*** ¿En qué instante la función velocidad es máxima?

***c)*** ¿Corresponde este instante a la rapidez máxima?

**8.** La altura por arriba del nivel del suelo alcanzada por un proyectil disparado verticalmente es $s(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 49$, donde $s$ se mide en metros y $t$ en segundos.

***a)*** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

***b)*** ¿A qué velocidad choca el proyectil contra el suelo?

**9.** Suponga que $f$ es una función polinomial con ceros de multiplicidad 2 en $x = a$ y $x = b$; es decir,

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)^2g(x)$$

donde $g$ es una función polinomial.

*a*) Demuestre que $f'$ tiene por lo menos tres ceros en el intervalo cerrado $[a, b]$.
*b*) Si $g(x)$ es constante, encuentre los ceros de $f'$ en $[a, b]$.

**10.** Demuestre que la función $f(x) = x^{1/3}$ no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo $[-1, 8]$, aunque es posible encontrar un número $c$ en $(-1, 8)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Explique.

En los problemas 11-14, encuentre los extremos relativos de la función dada $f$. Grafique.

**11.** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

**12.** $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$

**13.** $f(x) = 4x - 6x^{2/3} + 2$

**14.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

En los problemas 15-18, encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función dada $f$. No grafique.

**15.** $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

**16.** $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5$

**17.** $f(x) = 10 - (x - 3)^{1/3}$

**18.** $f(x) = x(x - 1)^{5/2}$

En los problemas 19-24, relacione cada figura con una o más de las siguientes afirmaciones. Sobre el intervalo correspondiente a la porción de la gráfica de $y = f(x)$ mostrada:

*a*) $f$ tiene una primera derivada positiva.
*b*) $f$ tiene una segunda derivada negativa.
*c*) La gráfica de $f$ tiene un punto de inflexión.
*d*) $f$ es diferenciable.
*e*) $f$ tiene un extremo relativo.
*f*) Las pendientes de las rectas tangentes crecen cuando $x$ crece.

**19.**

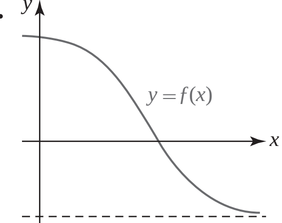



FIGURA 5.R.1 Gráfica para el problema 19

**20.**

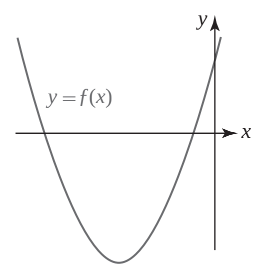



FIGURA 5.R.2 Gráfica para el problema 20

**21.**

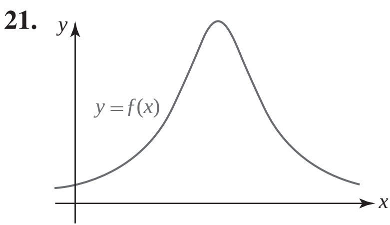



FIGURA 5.R.3 Gráfica para el problema 21

**22.**

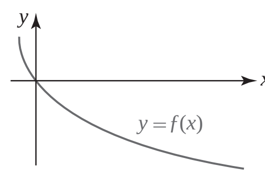



FIGURA 5.R.4 Gráfica para el problema 22

**23.**

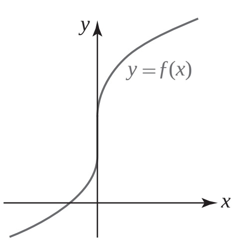



FIGURA 5.R.5 Gráfica para el problema 23

**24.**

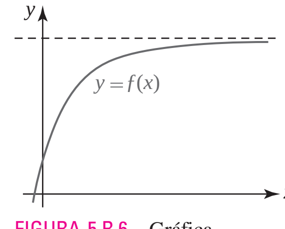



FIGURA 5.R.6 Gráfica para el problema 24

**25.** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales. Encuentre la coordenada $x$ del punto de inflexión para la gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

**26.** Un triángulo se expande con el tiempo. El área del triángulo crece a razón de 15 $\text{pulg}^2$/min, mientras la longitud de su base decrece a razón de $\frac{1}{2}$ pulg/min. ¿A qué razón cambia la altura del triángulo cuando la altura mide 8 pulg y la base mide 6 pulg?

**27.** Un cuadrado está inscrito en un círculo de radio $r$, como se muestra en la FIGURA 5.R.7. ¿A qué razón cambia el área del cuadrado en el instante en que el radio del círculo mide 2 pulg y crece a razón de 4 pulg/min?

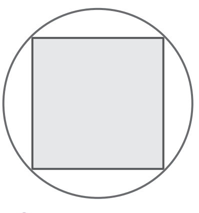


FIGURA 5.R.7 Círculo en el problema 27

**28.** De un tanque hemisférico de 10 m de radio gotea agua a razón de $\frac{1}{10}$ $\text{m}^3$/min, y ésta sale por un orificio en la parte inferior del tanque a razón de $\frac{1}{5}$ $\text{m}^3$/min. Es posible demostrar que el volumen del agua en el tanque en $t$ es $V = 10\pi h^2 - (\pi/3)h^3$. Vea la FIGURA 5.R.8.

***a***) La profundidad del agua, ¿aumenta o disminuye?

***b***) ¿A qué razón cambia la profundidad del agua cuando la profundidad es de 5 m?

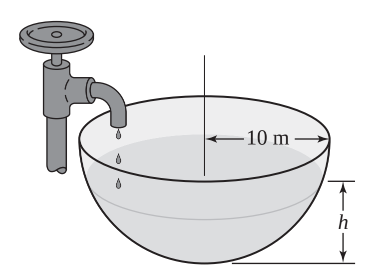



FIGURA 5.R.8 Tanque en el problema 28

**29.** Dos bobinas que conducen la misma corriente producen en el punto $Q$ sobre el eje $x$ un campo magnético de intensidad

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 r_0^2 I\left\{\left[r_0^2 + \left(x + \frac{1}{2}r_0\right)^2\right]^{-3/2} + \left[r_0^2 + \left(x - \frac{1}{2}r_0\right)^2\right]^{-3/2}\right\},$$

donde $\mu_0$, $r_0$ e $I$ son constantes. Vea la FIGURA 5.R.9. Demuestre que el valor máximo de $B$ ocurre en $x = 0$.

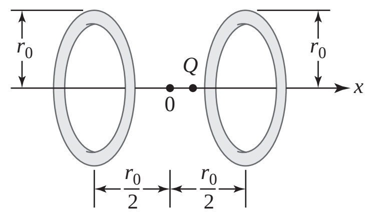



FIGURA 5.R.9 Bobinas en el problema 29

**30.** Una batería con fem constante $E$ y resistencia interna constante $r$ está conectada en serie con un resistor cuya resistencia es $R$. Entonces, la corriente en el circuito es $I = E/(r + R)$. Encuentre el valor de $R$ para el que la potencia $P = RI^2$ disipada en la carga externa es máxima. Esto se denomina **comparación de impedancia**.

**31.** Cuando en el lado de un cilindro lleno de agua se perfora un orificio, la corriente resultante choca contra el piso a una distancia $x$ de la base, donde $x = 2\sqrt{y(h - y)}$. Vea la FIGURA 5.R.10.

***a***) ¿En qué punto debe hacerse el orificio de modo que la corriente alcance una distancia máxima de la base?

***b***) ¿Cuál es la distancia máxima?

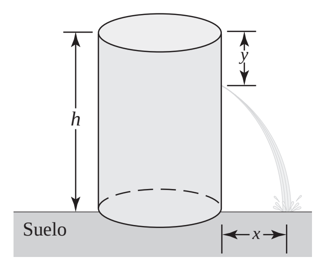



FIGURA 5.R.10 Tanque perforado en el problema 31

**32.** El área de un sector circular de radio $r$ y longitud de arco $s$ es $A = \frac{1}{2}rs$. Vea la FIGURA 5.R.11. Encuentre el área máxima de un sector limitado por un perímetro de 60 cm.

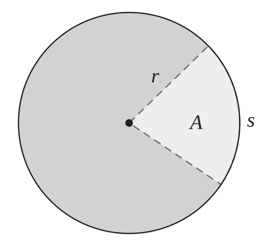



FIGURA 5.R.11 Sector circular en el problema 32

**33.** Un chiquero, junto a un granero, se delimita usando cerca en dos lados, como se muestra en la FIGURA 5.R.12. La cantidad de cerca que se usará mide 585 pies. Encuentre los valores de $x$ y $y$ indicados en la figura de modo que se delimite la mayor área.

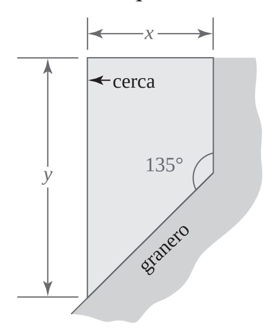



FIGURA 5.R.12 Chiquero en el problema 33

**34.** Un granjero desea usar 100 m de cerca para construir una valla diagonal que conecte dos muros que se encuentran en ángulo recto. ¿Cómo debe proceder el granjero de modo que el área limitada por los muros y la valla sea máxima?

**35.** Según el **principio de Fermat**, un rayo de luz que se origina en un punto $A$ y se refleja en una superficie plana hacia el punto $B$ recorre una trayectoria que requiere el menor tiempo. Vea la FIGURA 5.R.13. Suponga que la rapidez de la luz $c$, así como $h_1$, $h_2$ y $d$, son constantes. Demuestre que el tiempo es mínimo cuando $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$. Puesto que $0 < \theta_1 < \pi/2$ y $0 < \theta_2 < \pi/2$, se concluye que $\theta_1 = \theta_2$. En otras palabras, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. [*Nota*: La figura 5.R.13 es inexacta a propósito.]

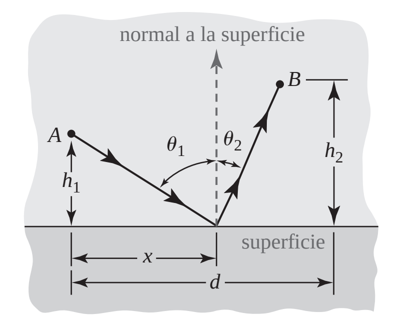



FIGURA 5.R.13 Rayos de luz reflejados en el problema 35

**36.** Determine las dimensiones de un cono circular recto que tiene volumen mínimo $V$ que circunscribe una esfera de radio $r$. Vea la FIGURA 5.R.14. [*Sugerencia*: Use triángulos semejantes.]

FIGURA 5.R.14 Esfera y cono en el problema 36

**37.** Un contenedor en forma de cilindro circular recto tiene un volumen de 100 pulg$^3$. La parte superior del contenedor cuesta tres veces por unidad de área que la parte inferior y los lados. Demuestre que la dimensión con que se obtiene el menor costo de construcción es una altura igual a cuatro veces el radio.

**38.** Se va a elaborar una caja con cubierta hecha de una pieza rectangular de cartón de 30 pulg de longitud y 15 pulg de ancho al cortar un cuadrado en un extremo del cartón y cortando un rectángulo de cada esquina del otro extremo, como se muestra en la FIGURA 5.R.15. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

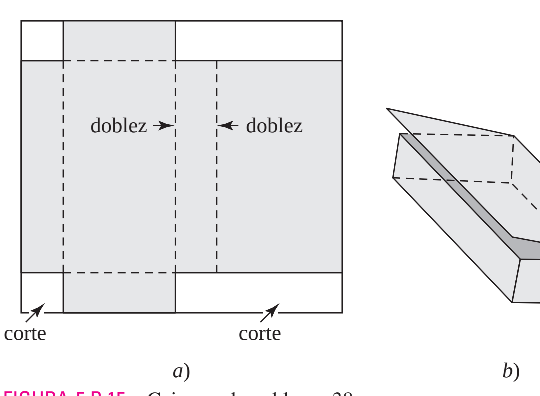



FIGURA 5.R.15 Caja en el problema 38

En los problemas 39-48, use la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

**39.** $\displaystyle \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} - \tan(\pi/x^2)}{x - \sqrt{3}}$

**40.** $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{10\theta - 5 \operatorname{sen} 2\theta}{10\theta - 2 \operatorname{sen} 5\theta}$

**41.** $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right)$

**42.** $\displaystyle \lim_{y \to 0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\ln(y+1)}\right]$

**43.** $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{\operatorname{sen} t^2}$

**44.** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan(5x)}{e^{3x/2} - e^{-x/2}}$

**45.** $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (3x)^{-1/\ln x}$

**46.** $\displaystyle \lim_{x \to 0} (2x + e^{3x})^{4/x}$

**47.** $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x + e^{2x}}{1 + e^{4x}}\right)$

**48.** $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^2$

# Apéndice

# Sucesiones y series

**En este apéndice** La experiencia cotidiana brinda un sentimiento intuitivo de la noción de una sucesión. Las palabras *sucesión de eventos* o *sucesión de números* sugiere un arreglo en el que los eventos $E$ o los números $n$ se establecen en algún orden: $E_1, E_2, E_3, \ldots$ o $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Cualquier estudiante de matemáticas también está familiarizado con el hecho de que cualquier número real puede escribirse como un decimal. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, donde los misteriosos tres puntos (una elipsis) significan que los tres dígitos se repiten eternamente. Esto quiere decir que el decimal 0.333… es una suma infinita o la *serie infinita*

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots.$$

En este apéndice se observará que los conceptos de sucesión y serie infinita están relacionados.

# A.1 Sucesiones

**Introducción** Si el dominio de una función $f$ es el conjunto de enteros positivos, entonces los elementos $f(n)$ en el rango pueden arreglarse en un orden correspondiente a los valores crecientes de $n$:

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \dots,\ f(n), \dots$$

En la discusión que sigue sólo se considerarán funciones cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyos elementos del rango son números reales.

**EJEMPLO 1** Función con los enteros positivos como dominio

Si $n$ es un entero positivo, entonces los primeros elementos en el rango de la función $f(n) = (1 + 1/n)^n$ son

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = \frac{9}{4}, \qquad f(3) = \frac{64}{27}, \dots$$ ■

Una función cuyo dominio es el conjunto completo de enteros positivos recibe un nombre especial.

**Definición A.1.1** Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Algunos textos utilizan las palabras *sucesión infinita*. Cuando el dominio de la función es un subconjunto finito del conjunto de los enteros positivos, obtenemos una *sucesión finita*. Todas las sucesiones en este apéndice serán infinitas.

**Notación y términos** En lugar de la notación de función usual $f(n)$, una sucesión suele denotarse mediante $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. El entero $n$ algunas veces recibe el nombre de **índice** de $a_n$. Los **términos** de la sucesión se forman dejando que el índice $n$ tome los valores 1, 2, 3, . . . ; el número $a_1$ es el *primer término*, $a_2$ es el *segundo término*, y así en lo sucesivo. El número $a_n$ se denomina el *término* n*-ésimo* o el **término general** de la sucesión. De tal modo, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, \dots, & a_n, \dots & \leftarrow \text{números en el rango} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & n & \leftarrow \text{números en el dominio} \end{array}$$

Por ejemplo, la sucesión definida en el ejemplo 1 sería escrita $\{(1 + 1/n)^n\}$.

En algunas circunstancias es conveniente tomar el primer término de una sucesión como $a_0$ y la sucesión es entonces

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n, \dots$$

**EJEMPLO 2** Términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones

***a***) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ ***b***) $\{n^2 + n\}$ ***c***) $\{(-1)^n\}$.

**Solución** Al sustituir $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general respectivo de cada sucesión, obtenemos

***a***) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots$ ***b***) $2, 6, 12, 20, \dots$ ***c***) $-1, 1, -1, 1, \dots$ ■

**Sucesión convergente** Para la sucesión del inciso *a*) del ejemplo 2, se ve que como el índice $n$ se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = \frac{1}{2^n}$ no se incrementan sin límite. En realidad, observamos que cuando $n \to \infty$, los términos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

se aproximan al valor límite 0. Se afirma que la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$ **converge** a 0. En contraste, los términos de las sucesiones en los incisos *b*) y *c*) no se aproximan a un valor límite cuando $n \to \infty$. En general se tiene la siguiente definición.

**Definición A.1.2** Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** a un número real $L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N. \qquad (1)$$

El número $L$ se llama el **límite** de la sucesión.

Compare esta definición con la redacción en la definición 3.6.5.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, entonces su límite $L$ es único.

**Sucesión convergente** Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (1) significa que los términos $a_n$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a $L$ para $n$ suficientemente grande. Se indica que una sucesión converge a un número $L$ escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando $\{a_n\}$ no converge, esto es, cuando $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, la sucesión **diverge**.

La FIGURA A.1.1 ilustra varias maneras en las cuales una sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número $L$. Las partes *a*), *b*), *c*) y *d*) de la figura A.1.1 muestran que para cuatro sucesiones convergentes diferentes $\{a_n\}$, *al menos un número finito* de términos de $a_n$ están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ que están en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $n > N$ se representan por medio de puntos en la figura.

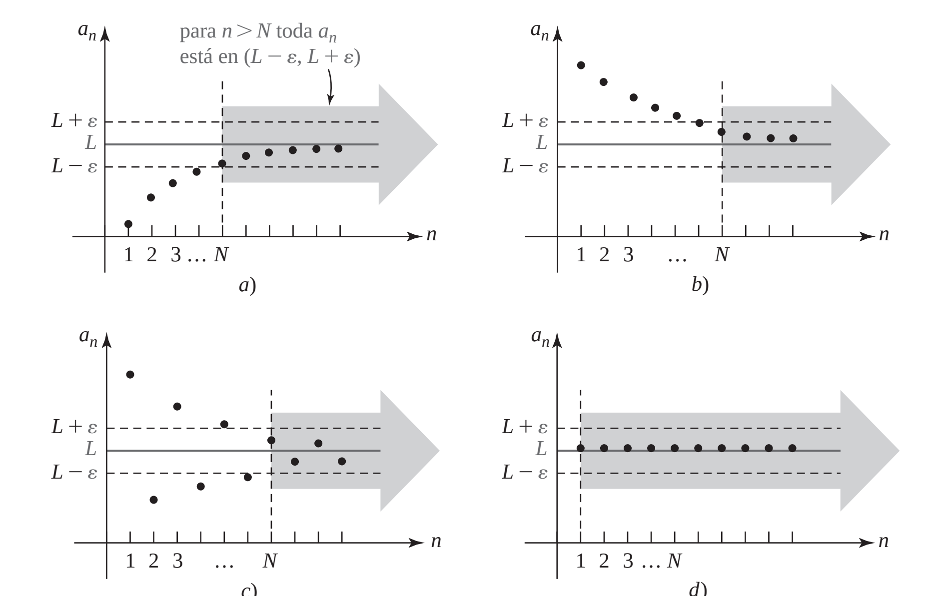



FIGURA A.1.1 Cuatro maneras en las que una sucesión puede converger a $L$

## EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Use la definición A.1.2 para demostrar que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0.

**Solución** Intuitivamente, es posible ver a partir de los términos

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$$

que cuando el índice $n$ aumenta sin límite los términos tienden al valor límite 0. Para probar la convergencia, suponemos primero que $\varepsilon > 0$ está dado. Puesto que los términos de la sucesión son positivos, la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$ es la misma que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$ o $n > 1/\varepsilon^2$. En consecuencia, sólo se necesita elegir $N$ como el primer entero positivo mayor o igual que $1/\varepsilon^2$. Por ejemplo, si se elige $\varepsilon = 0.01$, entonces $|1/\sqrt{n} - 0| = 1/\sqrt{n} < 0.01$ siempre que $n > 10\,000$. Esto es, se elige $N = 10\,000$. ■

En la práctica, para determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge, debemos trabajar directamente con $\lim_{n\to\infty} a_n$ y proceder igual que al examinar el $\lim_{n\to\infty} f(x)$. Si $a_n$ aumenta o disminuye sin límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \tag{2}$$

En el primer caso en (2) afirmamos que $\{a_n\}$ **diverge a infinito** y en el segundo que $\{a_n\}$ **diverge a infinito negativo**. Una sucesión tal vez diverja de manera distinta a la que se indica en (2). El siguiente ejemplo ilustra dos sucesiones; cada una diverge de un modo diferente.

## EJEMPLO 4 Sucesiones divergentes

***a***) La sucesión $\{n^2 + n\}$ diverge a infinito, ya que $\lim_{n\to\infty} (n^2 + n) = \infty$.

***b***) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente puesto que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe. El término general de la sucesión no se aproxima a una constante cuando $n \to \infty$; como puede verse en el inciso *c*) del ejemplo 2, el término $(-1)^n$ se alterna entre 1 y $-1$ cuando $n \to \infty$. ■

## EJEMPLO 5 Determinación de la convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{3n(-1)^n}{n+1}\right\}$ converge o diverge.

**Solución** Al dividir el numerador y el denominador del término general entre $n$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(-1)^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(-1)^n}{1 + 1/n}.$$

Aunque $3/(1 + 1/n) \to 3$ cuando $n \to \infty$, el límite anterior sigue sin existir. Debido al factor $(-1)^n$, se observa que cuando $n \to \infty$,

$$a_n \to 3, \quad n \text{ par}, \qquad \text{y} \qquad a_n \to -3, \quad n \text{ impar}.$$

La sucesión diverge. ■

Una sucesión, como aquella del inciso *b*) del ejemplo 4 y la del ejemplo 5, para la cual

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -L,$$

$L \neq 0$, se dice que **diverge por oscilación**.

**Sucesión de constantes** Una sucesión de constantes

$$c, c, c, \ldots$$

se escribe $\{c\}$. El sentido común indica que esta sucesión converge y que su límite es $c$. Vea la figura A.1.1*d*). Por ejemplo, la sucesión $\{\pi\}$ converge a $\pi$.

Al determinar el límite de una sucesión resulta muchas veces útil sustituir la variable discreta $n$ por una variable continua $x$. Si una función es $f$ tal que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ y el valor de $f$ en los enteros positivos, $f(1), f(2), f(3), \ldots$, concuerda con los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de $\{a_n\}$, esto es,

$$f(1) = a_1, \qquad f(2) = a_2, \qquad f(3) = a_3, \ldots,$$

entonces necesariamente la sucesión $\{a_n\}$ converge al número $L$. La validez de este resultado se ilustra en la FIGURA A.1.2.

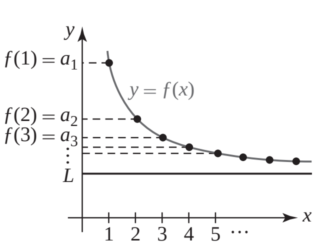



FIGURA A.1.2 Si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces $f(n) = a_n \to L$ cuando $n \to \infty$

**Teorema A.1.1** Límite de una sucesión

Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión y $f$ es una función tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{3}$$

## EJEMPLO 6 Empleo de la regla de L'Hôpital

Muestre que la sucesión $\{(n+1)^{1/n}\}$ converge.

**Solución** Si definimos $f(x) = (x+1)^{1/x}$, entonces reconocemos que $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada $\infty^0$ cuando $x \to \infty$. Por tanto, y utilizando la regla de L'Hôpital,

Vea la sección 5.5 para un repaso de cómo manejar la forma $\infty^0$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} \ln f(x) = \ln[\lim_{n\to\infty} f(x)] = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} f(x) = e^0 = 1$. Por tanto, por (3) tenemos $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = e^0 = 1$. La sucesión converge a 1. ■

## EJEMPLO 7 Sucesión convergente

Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{n(4n+1)(5n+3)}{6n^3+2}\right\}$ converge.

**Solución** Si $f(x) = \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} = \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada $\infty/\infty$. Por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2} \\ &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{60x^2+34x+3}{18x^2} \\ &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120x+34}{36x} \\ &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120}{36} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

De (3) del teorema A.1.1, la sucesión dada converge a $\frac{10}{3}$. ■

## EJEMPLO 8 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\sqrt{\frac{n}{9n+1}}\right\}$ converge.

**Solución** Se continúa con la aplicación de la regla de L'Hôpital, se divide el numerador y el denominador entre $x$ y resulta que $x/(9x+1) \to \frac{1}{9}$ cuando $x \to \infty$. De tal modo, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

**Propiedades** Las siguientes **propiedades** de sucesiones son análogas a las que se indicaron en los teoremas 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3.

**Teorema A.1.2** Límite de una sucesión

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, entonces

*i)* $\lim_{n\to\infty} c = c$, $c$ un número real

*ii)* $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = kL_1$, $k$ un número real

*iii)* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

*iv)* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$

*v)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

**EJEMPLO 9** Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}}\right\}$ converge.

**Solución** Observe que $2 - 3e^{-n} \to 2$ y $6 + 4e^{-n} \to 6 \neq 0$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con el teorema A.1.2*v*), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2-3e^{-n})}{\lim_{n\to\infty}(6+4e^{-n})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

Revise la sección 2.6, específicamente la figura 2.6.2.

El primero de los siguientes dos teoremas debe ser verosímil de acuerdo con su conocimiento del comportamiento de la función exponencial. Recuerde que, para $0 < b < 1$, $b^x \to 0$ cuando $x \to \infty$, en tanto que para $b > 1$, $b^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

**Teorema A.1.3** Sucesiones de la forma $\{r^n\}$

Suponga que $r$ es una constante distinta de cero. La sucesión $\{r^n\}$ converge a 0 si $|r| < 1$ y diverge si $|r| > 1$.

**Teorema A.1.4** Sucesiones de la forma $\{1/n^r\}$

La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^r}\right\}$ converge a 0 para $r$ cualquier número racional positivo.

**EJEMPLO 10** Aplicaciones de los teoremas A.1.3 y A.1.4

***a)*** La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge a 0 por el teorema A.1.3, ya que $e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ y $r = 1/e < 1$.

***b)*** La sucesión $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ diverge por el teorema A.1.3, ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.

***c)*** La sucesión $\left\{\dfrac{4}{n^{5/2}}\right\}$ converge a 0 por el teorema A.1.2*ii*) y el teorema A.1.4, ya que $r = \frac{5}{2}$ es un número racional positivo. ■

**EJEMPLO 11** Determinación de convergencia

Del teorema A.1.2*iii*) y el teorema A.1.4 observamos que la sucesión $\left\{10 + \dfrac{4}{n^{3/2}}\right\}$ converge a 10. ■

**Sucesión definida recursivamente** Como el siguiente ejemplo indica, una sucesión puede definirse especificando el primer término $a_1$ junto con una regla para obtener los términos subsecuentes a partir de los términos precedentes. En este caso se dice que la sucesión está definida **recursivamente**. La regla de definición se denomina **fórmula de recursión**. Vea los problemas 59 y 60 en los ejercicios A.1.

## EJEMPLO 12 Una sucesión definida recursivamente

Suponga que una sucesión se define recursivamente mediante $a_{n+1} = 3a_n + 4$, donde $a_1 = 2$. Sustituyendo entonces $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

el número está dado como 2

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 4 = 3(2) + 4 = 10 \\ a_3 &= 3a_2 + 4 = 3(10) + 4 = 34 \\ a_4 &= 3a_3 + 4 = 3(34) + 4 = 106 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. ■

**Teorema de compresión** El siguiente teorema es el equivalente de la sucesión del teorema 3.4.1.

**Teorema A.1.5** Teorema de compresión

Suponga que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

para todos los valores de $n$ mayores que algún índice $N$ (esto es, $n > N$). Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a un límite común $L$, entonces $\{c_n\}$ también converge a $L$.

**Factorial** Antes de presentar un ejemplo que ilustre el teorema A.1.5, necesitamos revisar un símbolo que aparece con frecuencia en esta unidad. Si $n$ es un entero positivo, el símbolo $n!$, que se lee "$n$ factorial", es el producto de los primeros $n$ enteros positivos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \tag{4}$$

Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Una propiedad importante del factorial está dada por

$$n! = (n-1)!n.$$

Para ver esto, considere el caso cuando $n = 6$:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \overbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}^{5!}\,6 = 5!6.$$

Enunciada de una manera un poco diferente, la propiedad $n! = (n-1)!n$ es equivalente a

$$(n+1)! = n!(n+1). \tag{5}$$

Un último punto: por propósitos de conveniencia y para asegurar que la fórmula $n! = (n-1)!n$ es válida cuando $n = 1$, se define $0! = 1$.

## EJEMPLO 13 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ converge.

**Solución** La convergencia o divergencia de la sucesión dada no es evidente ya que $2^n \to \infty$ y $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Aun cuando la forma límite de $\lim_{n\to\infty} (2^n/n!)$ es $\infty/\infty$ no es posible que utilicemos la regla de L'Hôpital puesto que no hemos estudiado ninguna función $f(x) = x!$ Sin embargo, podemos recurrir al teorema A.1.5 manipulando algebraicamente el término general de la sucesión. En vista de (4), el término general puede escribirse

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{n \text{ factores de } 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = \overbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}}^{n \text{ fracciones}}$$

De la línea anterior se obtiene la desigualdad

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \overbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}}^{n \text{ fracciones}} \leq 2 \cdot 1 \cdot \overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}}^{n-2 \text{ fracciones}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \tag{6}$$

Las $n - 2$ fracciones de $\frac{2}{3}$ en el lado derecho de (6) resultan del hecho de que después del segundo factor en el producto de $n$ fracciones, 3 es el denominador más pequeño que hace $\frac{2}{3}$ más grande que $\frac{2}{4}$, más grande que $\frac{2}{5}$, y así sucesivamente hacia abajo hasta el último factor $\frac{2}{n}$. Por las leyes de los exponentes (6) es lo mismo que

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{o} \qquad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

donde se han identificado las sucesiones $\{a_n\} = \{0\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ y $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$. La sucesión $\{a_n\}$ es una de ceros y por ello converge a 0. La sucesión $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ también converge a 0 al invocar el teorema A.1.2*ii*) y el teorema A.1.3 con $r = \frac{2}{3} < 1$. De tal manera que por el teorema A.1.5, $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$ también debe converger a 0. ■

El resultado $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ muestra que $n!$ crece mucho más rápido que $2^n$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, para $n = 10$, $2^{10} = 1\,024$, en tanto que $10! = 3\,628\,800$.

La sucesión en el ejemplo anterior también puede definirse recursivamente. Para $n = 1$, $a_1 = 2^1/1! = 2$. Entonces por (5) y las leyes de los exponentes,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\text{esto es } a_n}.$$

Así, $\{2^n/n!\}$ es lo mismo que

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n, \qquad a_1 = 2. \tag{7}$$

Es posible usar la fórmula de recursión (7) como un medio alterno de encontrar el límite $L$ de la sucesión $\{2^n/n!\}$. Puesto que se mostró que la sucesión es convergente tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Este último enunciado es equivalente también a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Haciendo que $n \to \infty$ en (7) y usando las propiedades de límites podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1} a_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right). \tag{8}$$

En la última línea se ve que $L = 0 \cdot L$, lo cual implica que el límite de la sucesión es $L = 0$.

El último teorema para esta sección es una consecuencia inmediata del teorema A.1.5.

**Teorema A.1.6** **Sucesión de valores absolutos**

Si la sucesión $\{|a_n|\}$ converge a 0, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

**DEMOSTRACIÓN** Por la definición de valor absoluto, $|a_n| = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $|a_n| = -a_n$ si $a_n < 0$. Se sigue que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|. \tag{9}$$

Por suposición, $\{|a_n|\}$ converge a 0 y por ello $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. De la desigualdad (9) y el teorema A.1.5 se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, $\{a_n\}$ converge a 0. ■

## EJEMPLO 14 Empleo del teorema A.1.6

La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ converge a 0 puesto que ya se ha demostrado en el ejemplo 3 que la sucesión de valores absolutos $\left\{\left|(-1)^n/\sqrt{n}\right|\right\} = \{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0. ■

## PROBLEMAS A.1

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-18.

### Fundamentos

En los problemas 1-10, liste los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es $a_n$.

**1.** $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$

**2.** $a_n = \dfrac{3}{4n-2}$

**3.** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

**4.** $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$

**5.** $a_n = 10^n$

**6.** $a_n = 10^{-n}$

**7.** $a_n = 2n!$

**8.** $a_n = (2n)!$

**9.** $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

**10.** $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

En los problemas 11-14, emplee la definición A.1.2 para demostrar que cada sucesión converge al número dado $L$.

**11.** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; $L = 0$

**12.** $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$; $L = 0$

**13.** $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; $L = 1$

**14.** $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}$; $L = 1$

En los problemas 15-46, determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

**15.** $\left\{\dfrac{10}{\sqrt{n+1}}\right\}$

**16.** $\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$

**17.** $\left\{\dfrac{1}{5n+6}\right\}$

**18.** $\left\{\dfrac{4}{2n+7}\right\}$

**19.** $\left\{\dfrac{3n-2}{6n+1}\right\}$

**20.** $\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$

**21.** $\{20(-1)^{n+1}\}$

**22.** $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

**23.** $\left\{\dfrac{n^2-1}{2n}\right\}$

**24.** $\left\{\dfrac{7n}{n^2+1}\right\}$

**25.** $\{ne^{-n}\}$

**26.** $\{n^3e^{-n}\}$

**27.** $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$

**28.** $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

**29.** $\{\cos n\pi\}$

**30.** $\{\operatorname{sen} n\pi\}$

**31.** $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

**32.** $\left\{\dfrac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$

**33.** $\left\{\dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}\right\}$

**34.** $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$

**35.** $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}$

**36.** $\left\{4+\dfrac{3^n}{2^n}\right\}$

**37.** $\left\{n \operatorname{sen}\left(\dfrac{6}{n}\right)\right\}$

**38.** $\left\{\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n\right\}$

**39.** $\left\{\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right\}$

**40.** $\left\{\dfrac{\pi}{4}-\arctan(n)\right\}$

**41.** $\{n^{2/(n+1)}\}$

**42.** $\{10^{(n+1)/n}\}$

**43.** $\left\{\ln\left(\dfrac{4n+1}{3n-1}\right)\right\}$

**44.** $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 3n}\right\}$

**45.** $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

**46.** $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

En los problemas 47-52, encuentre una fórmula para el término general $a_n$ de la sucesión. Determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

**47.** $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \dots$

**48.** $1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}, \dots$

**49.** $3, -5, 7, -9, \dots$

**50.** $-2, 2, -2, 2, \dots$

**51.** $2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \dots$

**52.** $\dfrac{1}{1\cdot 4}, \dfrac{1}{2\cdot 8}, \dfrac{1}{3\cdot 16}, \dfrac{1}{4\cdot 32}, \dots$

En los problemas 53-56, para la sucesión dada definida recursivamente, escriba los siguientes cuatro términos después del (de los) término(s) inicial(es) indicado(s).

**53.** $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$, $a_1 = -1$

**54.** $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_1 = 2$

**55.** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

**56.** $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

En los problemas 57 y 58, se sabe que la sucesión definida recursivamente converge para un valor inicial dado $a_1 > 0$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y proceda como en (8) de esta sección para encontrar el límite $L$ de la sucesión.

**57.** $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + 6$

**58.** $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{5}{a_n}\right)$

En los problemas 59 y 60, encuentre una fórmula de recursión que defina la sucesión dada.

**59.** $\left\{\dfrac{5^n}{n!}\right\}$

**60.** $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots$

En los problema 61-64, utilice el teorema de compresión para establecer la convergencia de la sucesión dada.

**61.** $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{4^n}\right\}$

**62.** $\left\{\sqrt{16+\dfrac{1}{n^2}}\right\}$

**63.** $\left\{\dfrac{\ln n}{n(n+2)}\right\}$

**64.** $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ $\left[\textit{Sugerencia: } a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\dfrac{4}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right).\right]$

**65.** Demuestre que para cualquier número real $x$, la sucesión $\{(1+x/n)^n\}$ converge a $e^x$.

**66.** Se sabe que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge a un número $\gamma$ llamado **constante de Euler**. Calcule los primeros 10 términos de la sucesión.

## ≡ Aplicaciones

**67.** Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. ¿A qué altura llegará en su tercer rebote? ¿En su $n$-ésimo rebote? Vea la FIGURA A.1.3.

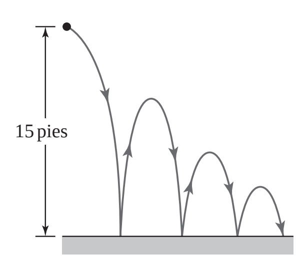



FIGURA A.1.3 Rebote de la pelota del problema 67

**68.** Una pelota, que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así en lo sucesivo. ¿Cuál es la distancia recorrida por la pelota durante el sexto segundo?

**69.** Un paciente toma 15 mg de un fármaco cada día. Suponga que 80% del fármaco acumulado es excretado cada día por las funciones corporales. Escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$, donde $A_n$ es la cantidad de fármaco presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la dosis $n$-ésima.

**70.** Se deposita un dólar en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual $r$. Si no se extrae dinero, ¿cuál es la cantidad de dinero acumulado en la cuenta después del primero, segundo y tercer años?

**71.** Cada persona tiene dos padres. Determine cuántos tatatatarabuelos tiene cada persona.

**72.** La sucesión definida recursivamente

$$p_{n+1} = 3p_n - \frac{p_n^2}{400}, \quad p_0 = 450$$

se denomina **ecuación logística discreta**. Una sucesión de este tipo se utiliza a menudo para modelar una población $p_n$ en un ambiente; aquí $p_0$ es la población inicial en el ambiente. Determine la **capacidad de transporte** $K = \lim_{n\to\infty} p_n$ del ambiente. Calcule los siguientes nueve términos de la sucesión y demuestre que estos términos oscilan alrededor de $K$.

## ≡ Piense en ello

**73.** Considere la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros cuatro términos son

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$$

*a*) Con $a_1 = 1$, encuentre una fórmula de recursión que defina a la sucesión.

*b*) ¿Cuáles son el quinto y el sexto términos de la sucesión?

*c*) Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge. Encuentre el límite de la sucesión.

**74.** Conjeture respecto al límite de la sucesión convergente $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$

**75.** Si converge la sucesión $\{a_n\}$, ¿diverge la sucesión $\{a_n^2\}$? Apoye su respuesta con argumentos matemáticos sólidos.

**76.** En la FIGURA A.1.4 el primer cuadrado que se muestra es de 1 unidad por lado. Un segundo cuadrado se construye dentro del primer cuadrado conectando los puntos medios del primero. Un tercer cuadrado se construye conectando los puntos medios de los lados del segundo cuadrado, y así en lo sucesivo.

*a*) Encuentre una fórmula para el área $A_n$ del $n$-ésimo cuadrado inscrito.

*b*) Considere la sucesión $\{S_n\}$, donde $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros 10 términos de esta sucesión.

*c*) Conjeture acerca de la convergencia de $\{S_n\}$.

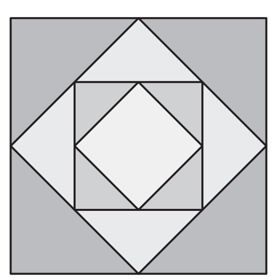


FIGURA A.1.4 Cuadrados incrustados del problema 76

## ≡ Proyectos

**77. Un clásico matemático** Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 1 como se muestra en la FIGURA A.1.5*a*). Como se muestra en la figura A.1.5*b*), sobre cada uno de los tres lados del triángulo se construye otro triángulo equilátero con lados de longitud $\frac{1}{3}$. Como se señala en las figuras A.1.5*c*) y A.1.5*d*), se continúa esta construcción: se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cada nuevo triángulo previo de modo tal que la longitud de los lados del nuevo triángulo es $\frac{1}{3}$ la longitud de los lados del triángulo anterior. Considere que el perímetro de la primera figura es $P_1$, el perímetro de la segunda figura $P_2$, y así en lo sucesivo.

*a*) Encuentre los valores de $P_1$, $P_2$, $P_3$ y $P_4$.

*b*) Encuentre la fórmula para el perímetro $P_n$ de la $n$-ésima figura.

*c*) ¿Cuál es el $\lim_{n\to\infty} P_n$? El perímetro de la región similar a un copo de nieve que se obtuvo dejando $n \to \infty$ se llama **curva del copo de nieve de Koch** y fue inventada en 1904 por el matemático sueco **Helge von Koch** (1870-1924). La curva de Koch aparece en la teoría de **fractales**.

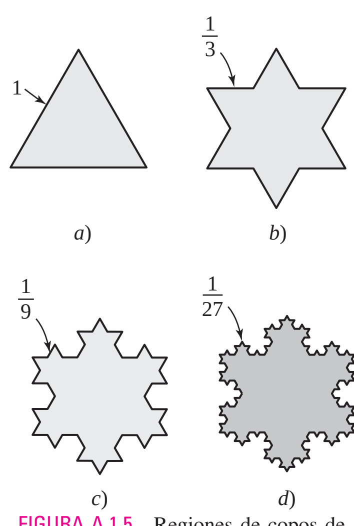



FIGURA A.1.5 Regiones de copos de nieve del problema 77

**78. Un poco de historia: ¿Cuántos conejos?** Además de su famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, se conoce también como el lugar natal de **Leonardo Pisano**, alias **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema de lugares decimales hindú-árabe y el uso de los numerales arábigos. Su libro *Liber Abacci*, publicado en 1202, es básicamente un texto acerca de cómo hacer aritmética en este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 de *Liber Abacci*, Fibonacci plantea y resuelve el siguiente problema sobre la reproducción de conejos:

> *¿Cuántos pares de conejos se reproducirán en un año empezando con un solo par, si cada mes cada par tiene un nuevo par que se vuelve fértil a partir del segundo mes en adelante*?

Distinga el patrón de la solución de este problema y complete la siguiente tabla.

| | Inicios | Después de cada mes | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Parejas adultas | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | | | | | |
| Parejas de bebés | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | | | | | |
| Total de parejas | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | | | | | |

**79.** Escriba cinco términos, después de los dos iniciales, de la sucesión definida recursivamente por medio de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Reexamine el problema 78.

**80. Razón áurea** Si la fórmula de recursión del problema 79 se divide entre $F_n$, entonces

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Si se define $a_n = F_{n+1}/F_n$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente por medio de

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, n \geq 2.$$

Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge en la **razón áurea** $\phi = \lim_{n\to\infty} a_n$.

***a***) Encuentre $\phi$.

***b***) Escriba un pequeño informe acerca del significado del número $\phi$ que incluya la relación entre este número y la forma del caparazón de cámaras múltiples del nautilo. Vea la foto en el inicio de este apéndice.

# A.2 Sucesiones monótonas

**Introducción** En la sección anterior se demostró que una sucesión $\{a_n\}$ convergía al determinar $\lim_{n\to\infty} a_n$. Sin embargo, no siempre es fácil o incluso posible determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge buscando el valor exacto de $\lim_{n\to\infty} a_n$. Por ejemplo, ¿la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge? Resulta que es posible demostrar que esta sucesión converge, pero no utilizando las ideas básicas de la última sección. En esta sección se considera un tipo especial de sucesión cuya convergencia puede establecerse sin determinar el valor de $\{a_n\}$.

Empezamos con una definición.

**Definición A.2.1** Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que será

*i*) **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$,
*ii*) **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para toda $n \geq 1$,
*iii*) **decreciente** si $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$,
*iv*) **no creciente** si $a_{n+1} \leq a_n$ para toda $n \geq 1$,

Si una sucesión $\{a_n\}$ es de alguno de los tipos anteriores, se dice entonces que es **monótona**.

En otras palabras, sucesiones del tipo

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$
$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots,$$

son crecientes y decrecientes, respectivamente. Mientras,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots,$$

son sucesiones no decrecientes y no crecientes, respectivamente. Las nociones de *no decreciente* y *no creciente* permiten que algunos términos adyacentes en una sucesión resulten iguales.

## EJEMPLO 1 Monótona/no monótona

***a***) Las tres sucesiones

$$4, 6, 8, 10, \ldots \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \qquad \text{y} \qquad 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

son monótonas. Éstas son, respectivamente, creciente, decreciente y no creciente.

***b***) La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ es no monótona. ■

No siempre resulta evidente si una sucesión es creciente, decreciente, y así en lo sucesivo. Las siguientes guías ilustran algunas de las maneras en que puede demostrarse la monotonía.

### Guías para demostrar la monotonía

*i*) Formar una **función** $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Si $f'(x) > 0$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $f'(x) < 0$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.
*ii*) Formar el **cociente** $a_{n+1}/a_n$ donde $a_n > 0$ para toda $n$. Si $a_{n+1}/a_n > 1$ para toda $n$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1}/a_n < 1$ para toda $n$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.
*iii*) Formar la **diferencia** $a_{n+1} - a_n$. Si $a_{n+1} - a_n > 0$ para toda $n$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1} - a_n < 0$ para toda $n$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

## EJEMPLO 2 Una sucesión monótona

Demuestre que $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ es una sucesión monótona.

**Solución** Si se define $f(x) = x/e^x$, entonces $f(n) = a_n$. En este caso,

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x} < 0$$

para $x > 1$ implica que $f$ es decreciente sobre $[1, \infty)$. De ese modo se concluye que

$$f(n + 1) = a_{n+1} < f(n) = a_n.$$

Por la definición A.2.1, la sucesión dada es decreciente.

**Solución alterna** Del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1$$

vemos que $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$. Esto demuestra que la sucesión es decreciente. ■

**EJEMPLO 3** Una sucesión monótona

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ o $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$ *parece* ser creciente. De

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

se concluye que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$. Eso demuestra que la sucesión es creciente. ■

**Definición A.2.2** Sucesión acotada

*i*) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por arriba** si hay un número positivo $M$ tal que $a_n \leq M$ para toda $n$.
*ii*) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por abajo** si hay un número positivo $m$ tal que $a_n \geq m$ para toda $n$.
*iii*) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice está **acotada** si está acotada por arriba y acotada por abajo.

Desde luego, si una sucesión $\{a_n\}$ no está acotada, entonces se afirma que es **no acotada**. Una sucesión no acotada es divergente. La sucesión de Fibonacci (vea los problemas 78 y 79 en los ejercicios A.1)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

es no decreciente y es un ejemplo de una sucesión no acotada.

La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ en el ejemplo 1 es acotada puesto que $0 \leq a_n \leq 1$ para toda $n$. Cualquier número más pequeño que una cota inferior $m$ de una sucesión también es una cota inferior y cualquier número mayor que una cota superior $M$ es una cota superior; en otras palabras, los números $m$ y $M$ en la definición A.2.2 no son únicos. Para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es igualmente cierto que $-2 \leq a_n \leq 2$ para toda $n \geq 1$.

**EJEMPLO 4** Una sucesión acotada

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ está acotada por arriba por 2, ya que la desigualdad

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

muestra que $a_n \leq 2$ para $n \geq 1$. Además,

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \geq 0$$

para $n \geq 1$ muestra que la sucesión está acotada por abajo por 0. De tal modo, $0 \leq a_n \leq 2$ para toda $n$ implica que la sucesión está acotada. ■

En realidad, del ejemplo 3 advertimos que los términos de la sucesión están acotados por abajo por el primer término de la sucesión.

El siguiente resultado será útil en las secciones subsecuentes de este apéndice.

**Teorema A.2.1** Condición suficiente para la convergencia

Una sucesión monótona acotada $\{a_n\}$ converge.

**DEMOSTRACIÓN** Demostraremos el teorema en el caso de una sucesión no decreciente. Por suposición, $\{a_n\}$ está acotada y por ello $m \le a_n \le M$ para toda $n$. A su vez, esto significa que el conjunto infinito de términos $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ está acotado por arriba y por tanto tiene una cota superior mínima o más pequeña $L$. La sucesión en realidad converge a $L$. Para $\varepsilon > 0$ sabemos que $L - \varepsilon < L$, y consecuentemente $L - \varepsilon$ no es una cota superior de $S$ (no hay cotas superiores más pequeñas que la cota superior mínima). En consecuencia, existe un entero positivo $N$ tal que $a_N > L - \varepsilon$. Pero, puesto que $\{a_n\}$ es no decreciente,

La existencia de una *cota superior mínima*, esto es, una cota superior que es más pequeña que todas las demás cotas superiores de la sucesión, es uno de los axiomas básicos en matemáticas. Recibe el nombre de **propiedad de completitud** del sistema de números reales (ver unidad 1).

$$L - \varepsilon \le a_N \le a_{N+1} \le a_{N+2} \le a_{N+3} \le \cdots \le L + \varepsilon.$$

Se concluye que para $n > N$, $L - \varepsilon \le a_n \le L + \varepsilon$ o $|a_n - L| < \varepsilon$. De la definición A.1.2 determinamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ■

## EJEMPLO 5 Acotada y monótona

Se demostró que la sucesión $\left\{\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}$ es monótona (ejemplo 3) y acotada (ejemplo 4). Por consiguiente, por el teorema A.2.1 la sucesión es convergente. ■

## EJEMPLO 6 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right\}$ converge.

**Solución** Primero, el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

muestra que $a_{n+1} < a_n$ para toda $n$. La sucesión es monótona puesto que es decreciente. Luego, de la desigualdad

¿Por qué el producto $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$ es menor que 1?

$$0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n} < 1$$

se observa que la sucesión está acotada. Se concluye del teorema A.2.1 que la sucesión es convergente. ■

El teorema A.2.1 es útil para probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge, esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, pero el teorema no brinda el número específico $L$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra cómo determinar $L$ cuando la sucesión se define recursivamente.

## EJEMPLO 7 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula de recursión $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$, $a_1 = 1$, converge.

Esto puede probarse utilizando un método llamado *inducción matemática*.

**Solución** Primero, la sucesión $\{a_n\}$ está acotada. Puede demostrarse que $a_n < 8$, para toda $n$. Este hecho se sugiere al calcular $a_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1 + 6 = \frac{1}{4}(1) + 6 = \frac{25}{4} = 6.25 < 8$$
$$a_3 = \frac{1}{4}a_2 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{25}{4}\right) + 6 = \frac{121}{16} = 7.5625 < 8$$
$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{121}{16}\right) + 6 = \frac{505}{64} = 7.890625 < 8$$
$$\vdots$$

Como $a_n > 0$ para toda $n$, se tiene que $0 < a_n < 8$ para toda $n$. De tal modo, $\{a_n\}$ está acotada.

Luego, demostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona. Debido a que $a_n < 8$ necesariamente $\frac{3}{4}a_n < \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$. Por tanto, de la fórmula de recursión,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6 > \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = a_n.$$

Esto demuestra que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n$, y por ello la sucesión es creciente.

Como $\{a_n\}$ es acotada y monótona, se sigue del teorema A.2.1 que la sucesión converge. Puesto que debemos tener $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, el límite de la sucesión se determina a partir de la fórmula de recursión:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}a_n + 6\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n + 6$$
$$L = \frac{1}{4}L + 6.$$

Al resolver la última ecuación para $L$ encontramos que $\frac{3}{4}L = 6$ o $L = 8$. ■

## Σ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) Toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está necesariamente acotada. Vea el problema 31 en los ejercicios A.2. No obstante, no se concluye que toda sucesión acotada es convergente. Se le pedirá que dé un ejemplo que ilustre este último enunciado en el problema 30 de los ejercicios A.2.

*ii*) Algunas sucesiones $\{a_n\}$ no exhiben comportamiento monótono hasta algún punto en la sucesión, esto es, hasta que el índice satisface $n \geq N$, donde $N$ es algún entero positivo. Por ejemplo, los términos de la sucesión $\{5^n/n!\}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ son:

$$5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \frac{625}{24}, \frac{3\,125}{144}, \ldots \qquad (1)$$

Para observar mejor lo que está ocurriendo en (1), se aproximarán los términos utilizando números redondeados hasta dos decimales:

$$5, 12.5, 20.83, 26.04, 26.04, 21.70, \ldots \qquad (2)$$

En (2) vemos que los primeros cuatro términos de $\{5^n/n!\}$ aumentan de manera evidente, pero empezando con el *cuarto término* los términos parecen empezar a no crecer. Esto se prueba a partir de la versión definida recursivamente de la sucesión. Procediendo como se hizo al obtener la fórmula de recurrencia en (7) en la sección A.1, $\{5^n/n!\}$ es la misma que $a_{n+1} = \frac{5}{n+1}a_n$, $a_1 = 5$. Puesto que $\frac{5}{n+1} \leq 1$ para $n \geq 4$ observamos que $a_{n+1} \leq a_n$, esto es, $\{5^n/n!\}$ es no creciente sólo para $n \geq 4$. De la misma manera, es fácil demostrar que $\{100^n/n!\}$ se vuelve a la larga no creciente sólo cuando $n \geq 99$. Tomando el límite de la fórmula de recursión como $n \to \infty$, como en el ejemplo 7, es posible demostrar que tanto $\{5^n/n!\}$ como $\{100^n/n!\}$ convergen a 0.

## PROBLEMAS A.2

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### Fundamentos

En los problemas 1-12, determine si la sucesión dada es monótona. Si es así, indique si es creciente, decreciente o no decreciente o no creciente.

**1.** $\left\{\frac{n}{3n+1}\right\}$

**2.** $\left\{\frac{10+n}{n}\right\}$

**3.** $\{(-1)^n\sqrt{n}\}$

**4.** $\{(n-1)(n-2)\}$

**5.** $\left\{\frac{e^n}{n}\right\}$

**6.** $\left\{\frac{e^n}{n^5}\right\}$

**7.** $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$

**8.** $\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

**9.** $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}$

**10.** $\{n^2 + (-1)^n n\}$

**11.** $\{(\text{sen } 1)(\text{sen } 2)\cdots(\text{sen } n)\}$

**12.** $\left\{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

En los problemas 13-24, utilice el teorema A.2.1 para demostrar que la sucesión dada converge.

**13.** $\left\{\frac{4n-1}{5n+2}\right\}$

**14.** $\left\{\frac{6-4n^2}{1+n^2}\right\}$

**15.** $\left\{\frac{3^n}{1+3^n}\right\}$

**16.** $\{n5^{-n}\}$

**17.** $\{e^{1/n}\}$

**18.** $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

**19.** $\left\{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}$

**20.** $\left\{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\right\}$

**21.** $\{\tan^{-1}n\}$

**22.** $\left\{\dfrac{\ln(n+3)}{n+3}\right\}$

**23.** $(0.8), (0.8)^2, (0.8)^3, \ldots$

**24.** $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

En los problemas 25 y 26, use el teorema A.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente converge. Encuentre el límite de la sucesión.

**25.** $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5, a_1 = 1$ **26.** $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = 0$

**27.** Exprese

$$\sqrt{7}, \sqrt{7\sqrt{7}}, \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}, \ldots$$

como una sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente. Utilice el hecho de que la sucesión está acotada, $0 < a_n < 7$ para toda $n$, para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente. Encuentre el límite de la sucesión.

**28.** Recurra al teorema A.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_n, \quad a_1 = 2, a_2 = 1, n \geq 2$$

es acotada y monótona y en consecuencia converge. Explique por qué la fórmula de recursión no es de ayuda para determinar el límite de la sucesión.

## ≡ Aplicaciones

**29.** Ciertos estudios en administración pesquera argumentan que el tamaño de una población de peces no perturbada cambia de un año al siguiente de acuerdo con la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}, \quad n \geq 0,$$

donde $p_n > 0$ es la población después de $n$ años, y $a$ y $b$ son parámetros positivos que dependen de las especies y de su ambiente. Suponga que el tamaño de una población $p_0$ se introduce en el año 0.

***a***) Emplee la fórmula de recursión para demostrar que los únicos valores límite posibles para la sucesión $\{p_n\}$ son 0 y $b - a$.

***b***) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

***c***) Utilice el resultado del inciso *b*) para demostrar que si $a > b$, entonces la población muere; esto es, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

***d***) Suponga ahora $a < b$. Demuestre que si $0 < p_0 < b - a$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es creciente y está acotada por arriba por $b - a$. Demuestre que si $0 < b - a < p_0$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es decreciente y acotada por abajo por $b - a$. Concluya que $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$ para cualquier $p_0 > 0$. [*Sugerencia*: Examine $|b - a - p_{n+1}|$, la cual es la distancia entre $p_{n+1}$ y $|b - a|$.]

## ≡ Piense en ello

**30.** Proporcione un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.

**31.** Demuestre que toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está acotada. [*Sugerencia*: Puesto que $\{a_n\}$ es convergente, se sigue de la definición A.1.2 que existe una $N$ tal que $|a_n - L| < 1$ siempre que $n > N$.]

**32.** Demuestre que $\left\{\int_1^n e^{-t^2}dt\right\}$ converge. [*Sugerencia*: Para $x > 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.]

**33. Un clásico matemático** Demuestre que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

es acotada y monótona, y, en consecuencia, convergente. El límite de la sucesión se denota por medio de $\gamma$ y se llama **constante de Euler** en honor al notable matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783). Del problema 66 del ejercicio A.1, $\gamma \approx 0.5772\ldots$ [*Sugerencia*: Primero demuestre la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

considerando el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ sobre el intervalo $[1, n]$.]

# A.3 Series

**Introducción** El concepto de una *serie* se relaciona estrechamente con el concepto de *sucesión*. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, entonces la suma de los términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

se llama **serie infinita**, o simplemente una **serie**. Las $a_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, se denominan los **términos** de la serie y $a_n$ se llama el **término general**. Escribimos (1) de manera compacta utilizando la notación de sumatoria como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{o por conveniencia} \quad \sum a_k.$$

La pregunta que deseamos responder en ésta y en varias de las secciones siguientes es:

- ¿Cuándo una serie infinita de constantes "suma" un número?

## EJEMPLO 1 Una serie infinita

En los comentarios de inicio de este apéndice se advirtió que la representación decimal de un número racional $\frac{1}{3}$ es, de hecho, una serie infinita

$$0.333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

De manera intuitiva, esperamos que $\frac{1}{3}$ sea la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$. Sin embargo, de manera intuitiva, esperamos que una serie infinita tal como

$$100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + \cdots$$

donde los términos se vuelven más y más grandes, no tenga suma. En otras palabras, no se espera que la serie última "sume" o *converja* a un número cualquiera. El concepto de convergencia de una serie infinita se define en términos de la convergencia de un tipo especial de sucesión.

**Sucesión de sumas parciales** Asociada con toda serie finita $\sum a_k$, existe una **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$ cuyos términos están definidos por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

El término general $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de esta sucesión se denomina la **suma parcial $n$-ésima** de la serie.

## EJEMPLO 2 Una serie infinita

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ para la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$ es

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} = 0.\overbrace{333\ldots3}^{3\ n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, cuando $n$ es muy grande, $S_n$ dará una buena aproximación a $\frac{1}{3}$, de modo que parece razonable escribir

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Esto lleva a la siguiente definición.

**Definición A.3.1** Serie convergente

La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **convergente** si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número $S$ se dice que es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, entonces se dice que la serie es **divergente**.

### EJEMPLO 3 Empleo de la sucesión de sumas parciales

Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ es convergente.

**Solución** Por fracciones parciales el término general $a_n$ de la serie puede escribirse como

$$a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}.$$

De tal modo, la suma parcial $n$-ésima de la serie es

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right] + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right] \\ &= \frac{1}{5} \overbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4}}^{0} - \frac{1}{n+5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}. \end{aligned}$$

De la última línea observamos que $\lim_{n\to\infty} 1/(n+5) = 0$, y por ello

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}\right] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, la serie converge y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}.$$

**Serie telescópica** Debido a la manera en la cual el término general de la sucesión de sumas parciales "colapsa" hasta dos términos, la serie en el ejemplo 3 se dice que es una **serie telescópica**. Vea los problemas 11-14 en los ejercicios A.3.

**Serie geométrica** Otro tipo de serie que puede probarse como convergente o divergente a partir directamente de su sucesión de sumas parciales tiene la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}, \tag{2}$$

donde $a \neq 0$ y $r$ son números reales fijos. Una serie de la forma (2) se llama **serie geométrica**. Advierta en (2) que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término precedente por $r$. El número $r$ se denomina la **razón común** y, como se ve en el siguiente teorema, su magnitud determina si una serie geométrica converge o diverge.

**Teorema A.3.1** Suma de una serie geométrica

*i*) Si $|r| < 1$, entonces una serie geométrica converge y su suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}, \quad a \neq 0.$$

*ii*) Si $|r| \geq 1$, entonces una serie geométrica diverge.

**DEMOSTRACIÓN** La prueba del teorema A.3.1 se dará en dos partes. En cada parte se supone que $a \neq 0$.

Empezaremos con el caso en el que $|r| = 1$. Para $r = 1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + a + \cdots$$

y por ello la suma parcial $n$-ésima $S_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n\,a}$ es simplemente $S_n = na$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} S_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty$. De tal modo, la serie diverge. Para $r = -1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(-1)^{k-1} = a + (-a) + a + (-a) + \cdots$$

y por ello la sucesión de sumas parciales es

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \ldots \qquad \text{o} \qquad a, 0, a, 0, a, 0, \ldots,$$

la cual es divergente,

Considere ahora el caso $|r| \neq 1$, el cual significa que $|r| < 1$ o $|r| > 1$. Considere el término general de la sucesión de sumas parciales de (2):

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{3}$$

Multiplicando ambos lados de (3) por $r$, se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{4}$$

Después se resta (4) de (3) y se resuelve para $S_n$:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1. \tag{5}$$

Ahora, de acuerdo con el teorema A.1.3 sabemos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe y por ello el límite de (5) tampoco existe. ■

**EJEMPLO 4** Serie geométrica

***a***) En la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

se identifica $a = 1$ y la razón común $r = -\frac{1}{3}$. Puesto que $|r| = |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$, la serie converge. Del teorema A.3.1, la suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

***b*)** La razón común en la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \cdots$$

es $r = \frac{3}{2}$. La serie diverge debido a $r = \frac{3}{2} > 1$. ■

Todo número racional $p/q$, donde $p$ y $q \neq 0$ son enteros, se puede expresar como un decimal interrumpido o como un decimal repetido. De tal modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ en el ejemplo 1 converge puesto que es una serie geométrica con $r = \frac{1}{10} < 1$. Con $a = \frac{3}{10}$ encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

En general:

- Todo decimal repetido es una serie geométrica convergente.

## EJEMPLO 5 Número racional

Exprese el decimal repetido 0.121212 . . . como un cociente de enteros.

**Solución** Se escribe primero el número dado como una serie geométrica

$$\begin{aligned} 0.121212\ldots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} + \cdots \\ &= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots \end{aligned}$$

y se hacen las identificaciones $a = \frac{12}{100}$ y $r = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Por el teorema A.3.1, la serie converge pues $r = \frac{1}{100} < 1$ y su suma es

$$0.121212\ldots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$ ■

## EJEMPLO 6 Observación de una pelota que rebota

Si una pelota se deja caer desde una altura de $s$ pies sobre el suelo, entonces el tiempo $t$ que tarda en llegar al suelo se relaciona con $s$ por medio de $s = \frac{1}{2}gt^2$. En otras palabras, la pelota tarda $t = \sqrt{2s/g}$ s para llegar al suelo. Suponga que la pelota rebota siempre hasta cierta fracción fija $\beta(0 < \beta < 1)$ de su altura previa. Encuentre una fórmula para el tiempo $T$ que la pelota tarda en llegar al reposo. Vea la FIGURA A.3.1.

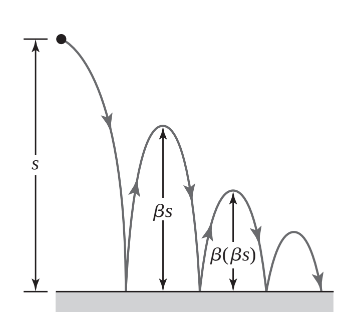



FIGURA A.3.1 Pelota que rebota del ejemplo 6

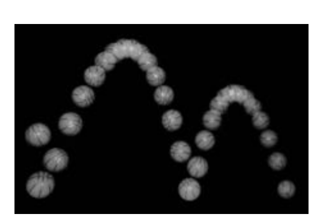


Foto estroboscópica de una pelota de basquetbol rebotando

**Solución** El tiempo para caer desde una altura de $s$ pies hasta el suelo es: $\sqrt{2s/g}$; el tiempo para ascender $\beta s$ pies y después caer $\beta s$ pies hasta el suelo es: $2\sqrt{2\beta s/g}$; el tiempo para ascender $\beta(\beta s)$ pies y después caer $\beta(\beta s)$ pies hasta el suelo es $2\sqrt{2\beta^2 s/g}$; y así sucesivamente. De esta manera, el tiempo total $T$ está dado por la serie infinita

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2s/g} + 2\sqrt{2\beta s/g} + 2\sqrt{2\beta^2 s/g} + \cdots + 2\sqrt{2\beta^n s/g} + \cdots \\ &= \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\beta}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\beta}\right)^k$ es una serie geométrica convergente con $a = \sqrt{\beta}$ y $r = \sqrt{\beta}$. En consecuencia, de acuerdo con el teorema A.3.1,

$$T = \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\frac{\sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right] \quad \text{o} \quad T = \sqrt{2s/g}\left[\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right].$$ ■

**Serie armónica** Una de las series más famosas es también un ejemplo de una serie divergente. La **serie armónica** es la suma de los recíprocos de los enteros positivos:

Recuerde esta serie. Será importante en las secciones subsecuentes de este apéndice.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \tag{6}$$

El término general de la sucesión de las sumas parciales para (6) está dado por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

De tal modo,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq S_n + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{términos de } n\ \frac{1}{2n}} = S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ implica que la sucesión de sumas parciales para la serie armónica no está acotada. Para ver lo anterior, observe que

$$\begin{aligned} S_2 &\geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_4 &\geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ S_8 &\geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ S_{16} &\geq S_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En consecuencia, se concluye que la serie armónica es divergente.

**Una consecuencia de convergencia** Si $a_n$ y $S_n$ son los términos generales de una serie y la sucesión correspondiente de sumas parciales, respectivamente, entonces de la resta

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

vemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$. En este caso, si la serie $\sum a_k$ converge a un número $S$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Hemos establecido el siguiente teorema.

**Teorema A.3.2** Condición necesaria para convergencia

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Prueba para una serie divergente** El teorema A.3.2 establece simplemente que si una serie infinita converge, es necesario que el término $n$-ésimo, o general, tienda a cero. De modo equivalente, se concluye:

- Si el $n$-ésimo término $a_n$ de una serie infinita **no** tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie **no** converge.

Formalizamos este resultado como una prueba para la divergencia.

**Teorema A.3.3** Prueba del término *n*-ésimo para divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

El teorema A.3.3 corrobora de inmediato la parte *ii*) de la prueba del teorema A.3.1, a saber, una serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, $a \neq 0$, diverge cuando $r = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $r = 1$, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a \neq 0$.

**EJEMPLO 7** Serie divergente

***a***) Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k - 1}{5k + 3}$. De

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n - 1}{5n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0$$

se concluye del teorema A.3.3 que la serie diverge.

***b***) Considere la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ no existe, es posible afirmar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. ¿La serie diverge por el teorema A.3.3? ■

En este momento se le recomienda leer (y recordar) *iii*) de las *Notas desde el aula*. Se enuncian los siguientes tres teoremas sin demostración.

**Teorema A.3.4** Múltiplo constante de una serie

Si $c$ es cualquier constante distinta de cero, entonces las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ convergen ambas o divergen ambas.

**Teorema A.3.5** Suma de dos series convergentes

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen a $S_1$ y $S_2$, respectivamente, entonces

*i*) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge a $S_1 + S_2$, y

*ii*) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ converge a $S_1 - S_2$.

El teorema A.3.5 indica que cuando $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

**Teorema A.3.6** Suma de una serie convergente y una divergente

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ diverge.

**EJEMPLO 8** Suma de dos series convergentes

Con la ayuda del teorema A.3.1, se observa que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ convergen a 2 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. En consecuencia, del teorema A.3.5, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

■

**EJEMPLO 9** Suma de dos series

Del ejemplo 3 se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}$ converge. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ es la serie armónica divergente, se sigue del teorema A.3.6 que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+4)(k+5)} + \frac{1}{k}\right]$$

diverge. ■

## NOTAS DESDE EL AULA

*i*) El término *n*-ésimo de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica a menudo se denota mediante $H_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. Los términos de la sucesión $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}, \ldots$ se denominan **números armónicos**. Vea el problema 71 en los ejercicios A.3.

*ii*) Cuando se escribe en términos de notación de sumatoria, una serie geométrica quizá no se reconozca de inmediato, o si lo es, los valores de $a$ y $r$ tal vez no sean manifiestos. Por ejemplo, para ver si $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ es una serie geométrica es buena idea escribir dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a} + \overbrace{4\left(\frac{1}{4}\right)^{6}}^{ar} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}^{ar^2} + \cdots.$$

Del lado derecho de la última igualdad, es posible hacer las identificaciones $a = 4\left(\frac{1}{2}\right)^5$ y $r = \frac{1}{2} < 1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$. Si se desea, aunque no hay una necesidad real para hacer esto, puede expresarse $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ en la forma más familiar $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ haciendo $k = n - 2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4} = \sum_{k=1}^{\infty}\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

*iii*) Observe con cuidado cómo se enuncian los teoremas A.3.2 y A.3.3. En específico, el teorema A.3.3 *no* dice si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_k$ converge. En otras palabras, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no es *suficiente* para garantizar que $\sum a_k$ converge. De hecho, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, en la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$, $a_n = 1/n$ y $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, pero la serie diverge.

*iv*) Cuando se determina la convergencia, es posible, y algunas veces conveniente, borrar o ignorar varios de los primeros términos de la serie. En otras palabras, las series infinitas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, $N > 1$ difieren a lo sumo por un número finito de términos y son ambas convergentes o ambas divergentes. Desde luego, eliminar los primeros $N - 1$ términos de una serie convergente suele no afectar la suma de la serie.

## PROBLEMAS A.3

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### Fundamentos

En los problemas 1-10, escriba los primeros cuatro términos de cada serie.

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$

**3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}$

**5.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2+1}$

**7.** $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$ **8.** $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{m!}$

**9.** $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\cos j\pi}{2j+1}$ **10.** $\sum_{i=5}^{\infty} i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2}$

En los problemas 11-14, proceda como en el ejemplo 3 para encontrar la suma de la serie telescópica dada.

**11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

**13.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

En los problemas 15-24, determine si la serie geométrica dada converge o diverge. Si es convergente, encuentre la suma de la serie.

**15.** $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

**17.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ **18.** $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

**19.** $\sum_{r=1}^{\infty} 5^r 4^{-r}$ **20.** $\sum_{s=1}^{\infty} (-3)^s 7^{-s}$

**21.** $\sum_{n=1}^{\infty} 1\,000(0.9)^n$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{1\,000}$

**23.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^k}$ **24.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k$

En los problemas 25-30, escriba cada número decimal que se repite como un cociente de enteros.

**25.** 0.222… **26.** 0.555…

**27.** 0.616161… **28.** 0.393939…

**29.** 1.314314… **30.** 0.5262626…

En los problemas 31 y 32, encuentre la suma de las series dadas.

**31.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right]$ **32.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{4^k}$

En los problemas 33-42, muestre que la serie dada es divergente.

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty} 10$ **34.** $\sum_{k=1}^{\infty} (5k+1)$

**35.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$ **36.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+2k+3}$

**37.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ **38.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{3k+1}\right)$

**39.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$ **40.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$

**41.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k}\right]$ **42.** $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen} \frac{1}{k}$

En los problemas 43-46, determine los valores de $x$ para los cuales la serie dada converge.

**43.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$ **44.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}$

**45.** $\sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^k$ **46.** $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$

### Aplicaciones

**47.** Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. Recurra a la serie geométrica para determinar la distancia que la pelota recorre antes de quedar en reposo.

**48.** En el problema 47 determine el tiempo que tarda la pelota en llegar al reposo.

**49.** Para erradicar plagas agrícolas (como la mosca de la fruta), se liberan moscas macho esterilizadas dentro de la población general en intervalos de tiempo regulares. Considere que $N_0$ es el número de moscas liberadas cada día y que $s$ es la proporción de las que sobreviven en un día determinado. De los $N_0$ machos esterilizados originales, $N_0 s^n$ sobrevivirán en $n$ semanas sucesivas. En consecuencia, el número total de tales machos que sobreviven $n$ semanas después de que se ha iniciado el programa es $N_0 + N_0 s + N_0 s^2 + \cdots + N_0 s^n$. ¿A qué se aproxima esta suma cuando $n \to \infty$? Suponga $s = 0.9$ y que se necesitan 10 000 machos esterilizados para controlar la pobla-

ción en cierta área. Determine el número de moscas macho que debe ser liberado cada día.

**50.** En algunas circunstancias la cantidad de un fármaco que se acumularía en el cuerpo de un paciente después de un largo periodo es $A_0 + A_0e^{-k} + A_0e^{-2k} + \cdots$, donde $k > 0$ es una constante y $A_0$ es la dosis diaria del fármaco. Encuentre la suma de la serie.

**51.** Un paciente toma 15 mg de un fármaco diariamente. Si 80% del fármaco acumulado se excreta cada día mediante las funciones corporales, ¿qué cantidad del fármaco se acumulará después de un largo periodo, esto es, cuando $n \to \infty$? (Suponga que la medición de la acumulación se hace inmediatamente después de cada dosis. Vea el problema 69 en los ejercicios A.1.)

**52.** Se aplica una fuerza a una partícula, que se mueve en una línea recta, de tal manera que después de cada segundo la partícula sólo se mueve la mitad de la distancia que recorrió en el segundo anterior. Si la partícula se mueve 20 cm en el primer segundo, ¿cuánto se desplazará?

## ≡ Piense en ello

**53.** Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L \neq 0$. Explique por qué la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

**54.** Determine si la serie

$$\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.11} + \frac{1}{1.111} + \cdots$$

converge o diverge.

**55.** Determine si la suma de dos series divergentes es necesariamente divergente.

**56.** Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Puesto que $k^2 = k \cdot k$, la $n$-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n}.$$

Explique por qué las siguientes desigualdades son ciertas y por qué pueden usarse para demostrar que una serie dada converge:

$$0 < S_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

o

$$0 < S_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

**57.** Encuentre la suma de la serie

$$\frac{1+9}{25} + \frac{1+27}{125} + \frac{1+81}{625} + \cdots.$$

**58.** Encuentre la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_k^{k+1} xe^{-x}\, dx \right).$$

**59.** Encuentre todos los valores de $x$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ para los cuales

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{1 - \tan x} - \sum_{k=0}^{n} \tan^k x \right) = 0.$$

**60.** Muestre que si $\lim_{n \to \infty} f(n+1) = L$, donde $L$ es un número, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] = L - f(1)$.

**61.** Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$ converge o diverge.

**62.** Muestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente demostrando que $S_n \geq \sqrt{n}$.

**63.** Vimos que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge puesto que el término general $S_n$ de la sucesión de sumas parciales puede hacerse tan grande como se quiera tomando a $n$ lo suficientemente grande ($S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$). No obstante, la serie armónica diverge *muy lentamente*.

*a*) Use la gráfica de $f(x) = 1/x$ para $x \geq 1$ a fin de establecer la desigualdad

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

*b*) Emplee una calculadora y la desigualdad del inciso *a*) para estimar el valor de $n$ para el cual $S_n \geq 10$. Estime el valor de $n$ para el cual $S_n \geq 100$.

**64.** En el problema 77 en los ejercicios A.1 se consideraron los perímetros de las regiones acotadas por las curvas de Koch que se muestran en la figura A.1.5. En el inciso *c*) del problema usted debe haber demostrado que el perímetro de la región límite es infinito. En este problema se consideran las *áreas* de las figuras sucesivas. Considere que el área de la primera figura es $A_1$, el área de la segunda figura $A_2$, y así en lo sucesivo.

*a*) Utilizando el hecho de que el área de un triángulo equilátero con lados de longitud $s$ es $\frac{1}{4}\sqrt{3}s^2$, encuentre los valores de $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$.

*b*) Demuestre que el área de la figura $n$-ésima es

$$A_n = \frac{1}{20}\sqrt{3}\left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

*c*) ¿Cuál es $\lim_{n \to \infty} A_n$?

## ≡ Proyectos

**65. Un poco de historia: Muerte por pan** En 1972, un brote de envenenamiento por metilmercurio en Irak produjo 459 muertes entre 6 530 casos de envenenados admitidos en hospitales. El brote epidémico fue provocado por el consumo de pan casero preparado a partir de trigo que había sido tratado con un fungicida de metilmercurio. Los primeros síntomas de parestesia (pérdida de sensaciones en la boca, manos y pies) empezaron a ocurrir cuando el nivel acumulado de mercurio alcanzó 25 mg. Los síntomas de ataxia (pérdida de coordinación al andar) iniciaron con 55 mg, la disartria (arrastrar las palabras) con 90 mg y la sordera con 170 mg. La muerte se volvió una posibilidad cuando el nivel de mercurio acumulado superó 200 mg. Se estimó que

Pan casero

una barra de pan típica elaborada a partir de trigo contaminado contenía 1.4 mg de mercurio, y también que el cuerpo elimina sólo alrededor de 0.9% del mercurio acumulado diariamente.

***a***) Suponga que una persona recibió una dosis $d$ de mercurio al día, y que el cuerpo eliminó una fracción $p$ del mercurio acumulado diariamente. Encuentre una fórmula para $L_n$, el nivel acumulado después de comer en el $n$-ésimo día, y una fórmula para el nivel límite, $\lim_{n\to\infty} L_n$.

***b***) Empleando $d = 1.4$ y $p = 0.009$, encuentre el valor límite del mercurio y determine qué día empezaron a ocurrir los diversos síntomas.

***c***) ¿Cuál sería la dosis diaria para que la muerte fuera posible en el día 100? (Utilice $p = 0.009$.)

**66. Un poco de historia: La paradoja de Zenón** El filósofo griego **Zenón de Elea** (c. 490 a.C.) fue discípulo del filósofo presocrático Parménides, que afirmaba que el cambio o el movimiento era una ilusión. De las paradojas de Zenón que apoyaban esta filosofía, la más famosa es su argumento acerca de que Aquiles, conocido por su habilidad de correr rápido, no podría superar a una tortuga en movimiento. La forma usual de la historia es como se narra a continuación:

*Aquiles empieza desde el punto S, y exactamente en el mismo instante una tortuga empieza desde un punto A adelante de S. Después de cierta cantidad de tiempo, Aquiles alcanza el punto de inicio A de la tortuga, pero durante este tiempo la tortuga ha avanzado a un nuevo punto B. Durante el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar B, la tortuga se ha movido hacia delante otra vez hasta un nuevo punto C. Al continuar de esta manera, eternamente, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.*

Vea la FIGURA A.3.2. Utilice una serie infinita para resolver esta aparente paradoja. Suponga que cada uno se mueve con una velocidad constante. Ayudaría inventar valores razonables para ubicar en el inicio la cabeza de la tortuga y para las dos velocidades.

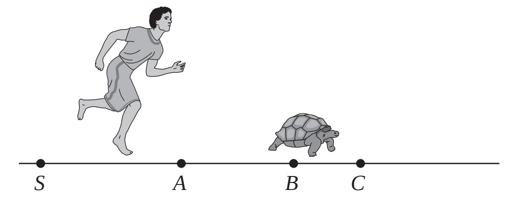



FIGURA A.3.2 Aquiles y la tortuga en el problema 66

**67. Números primos** Escriba un breve informe en el cual defina un número primo. Incluya en el informe una demostración acerca de si la serie de los recíprocos de primos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

converge o diverge.

**68. Longitud de una trayectoria en zigzag** En la FIGURA A.3.3*a*), el triángulo $ABC$ es un triángulo recto isósceles. El segmento de línea $AP_1$ es perpendicular a $BC$, el segmento de línea $P_1P_2$ es perpendicular a $AC$, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria en zigzag $AP_1P_2P_3 \ldots$

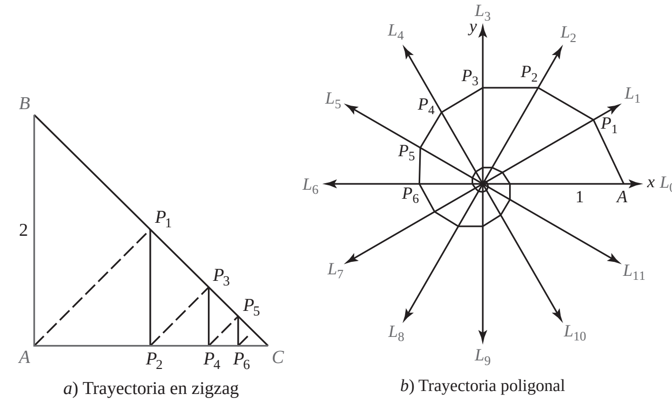



FIGURA A.3.3 Trayectorias en zigzag y poligonal de los problemas 68 y 69

**69. Longitud de una trayectoria poligonal** En la figura A.3.3*b*), hay doce rayos que emanan del origen y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es 30°. El segmento de recta $AP_1$ es perpendicular al rayo $L_1$, el segmento de recta $P_1P_2$ es perpendicular al rayo $L_2$, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria poligonal $AP_1P_2P_3 \ldots$

**70. Una integral impropia** En un curso de cálculo integral se plantea la pregunta de si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es un requisito necesario para la convergencia de una integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$. A continuación se presenta la respuesta. Observe que la función $f$ cuya grafica está dada en la FIGURA A.3.4 *no* se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge.

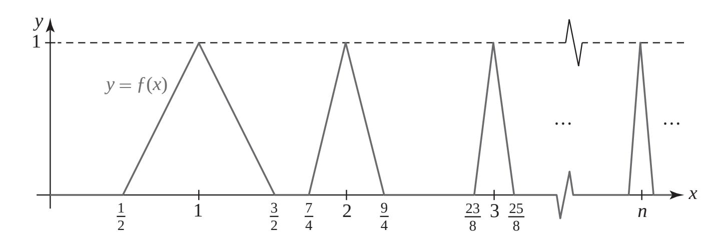



FIGURA A.3.4 Gráfica del problema 70

**71. Un problema de apilamiento** Tómese su tiempo para hacer su tarea y efectúe un experimento. Necesitará un suministro de $n$ objetos rectangulares idénticos, por ejemplo, libros, aunque también pueden ser tableros, cartas, fichas de dominó, etcétera. Suponga que la longitud de cada libro es $L$. A continuación encontrará un enunciado burdo del problema:

*¿Qué tanto puede sobresalir una pila de n libros colocada sobre el borde de una mesa sin que se caiga?*

Intuitivamente la pila *no* caerá siempre que su centro de masa permanezca por arriba de la cubierta de la mesa. Empleando la regla de apilamiento que se ilustra en la FIGURA A.3.5, observe que lo que sobresale del libro mostrado en la figura A.3.5*a*) alcanza su máximo $d_1 = L/2$ cuando su centro de masa está ubicado directamente en el borde de la mesa.

***a***) Calcule las distancias que sobresalen los libros $d_2$, $d_3$ y $d_4$ del borde de la mesa para la pila de libros de la figura A.3.5*b*), A.3.5*c*) y A.3.5*d*), respectivamente.

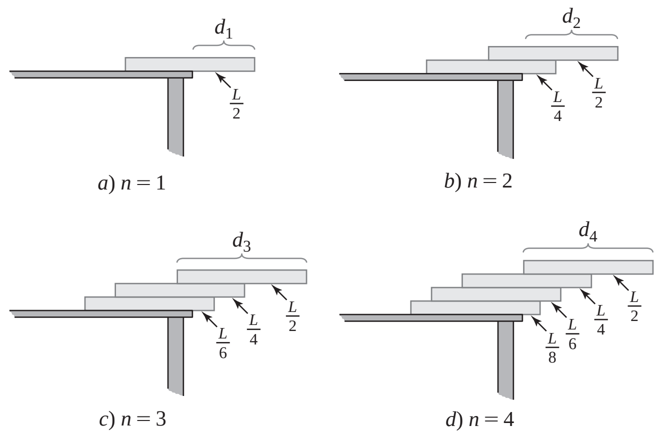



FIGURA A.3.5 Método de apilamiento de libros del problema 71

Luego demuestre que el centro de masa de cada pila está en el borde de la mesa. [*Sugerencia*: Para $n$ libros ponga el eje $x$ a lo largo de la cubierta horizontal de la mesa con el origen $O$ en el borde izquierdo del primer libro, o del fondo, en la pila.]

***b***) ¿Qué indica el valor de $d_4$ en el inciso *a*) acerca del cuarto libro, o superior, en la pila?

***c***) Siguiendo el patrón de apilamiento que se indica en la figura A.3.5, para $n$ libros la parte que sobresale del primer libro desde el borde de la mesa sería $L/2n$, lo que sobresale del segundo libro desde el borde del primer libro sería $L/2(n - 1)$, lo que sobresale del tercer libro desde el borde del segundo correspondería a $L/2(n - 2)$, y así en lo sucesivo. Encuentre una fórmula para $d_n$, lo que sobresalen $n$ libros desde el borde de la mesa. Demuestre que el centro de masa de la pila de $n$ libros está en el borde de la mesa.

***d***) Utilice la fórmula $d_n$ para encontrar la distancia que sobresale un libro en el inciso *c*) y encuentre el valor más pequeño de $n$ de manera que lo que sobresalen $n$ libros apilados en la manera descrita en el inciso *c*) es mayor que el doble de la longitud de un libro.

***e***) En teoría, utilizando la regla de apilamiento del inciso *c*), ¿hay alguna limitación acerca del número de libros en una pila?

**72. Un clásico matemático: Los trenes y la mosca** En un tiempo específico dos trenes $T_1$ y $T_2$, separados por 20 millas sobre el mismo riel, inician un curso de choque a una velocidad de 10 mph. Suponga que en el preciso instante en que parten los trenes, una mosca sale del frente del tren $T_1$, vuela a una velocidad de 20 mph en línea recta hacia el frente del motor del tren $T_2$, después vuela de regreso hacia $T_1$ a 20 mph, después regresa a $T_2$, y así en lo sucesivo. Recurra a una serie geométrica para encontrar la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y la mosca es aplastada). Después use el sentido común para determinar la distancia total que vuela la mosca. Vea la FIGURA A.3.6.

FIGURA A.3.6 Trenes y mosca en el problema 72

# A.4 Prueba de la integral

**Introducción** A menos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea una serie telescópica o una serie geométrica, es una tarea difícil, si no inútil, demostrar la convergencia o divergencia directamente de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, suele ser posible determinar si una serie converge o diverge por medio de una *prueba* que utiliza sólo los términos de la serie. En ésta y en las dos secciones que siguen se examinarán cinco de tales pruebas que son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

**Prueba de la integral** La primera prueba que se considerará relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y divergencia de una serie infinita.

**Teorema A.4.1** Prueba de la integral

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos y $f$ es una función continua que es no negativa y decreciente sobre $[1, \infty)$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$.

*i*) Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

*ii*) Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

$y$ $y = f(x)$
área $= a_2 \cdot 1$
área $= a_3 \cdot 1$
área $= a_n \cdot 1$
$a_2$ $a_3$ $a_n$
1 2 3 ⋯ $n$ $x$
a)

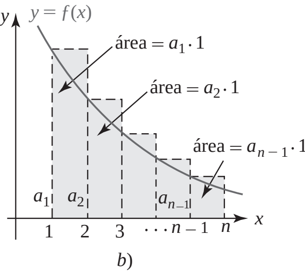



FIGURA A.4.1 Rectángulos en la prueba del teorema A.4.1

**DEMOSTRACIÓN** Si la grafica de $f$ está dada como en la FIGURA A.4.1, entonces considerando las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura, observamos que

$$0 \leq a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

o

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

De la desigualdad $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx$, es claro que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe siempre que exista $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx$. Por otro lado, de la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\,dx$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ no existe siempre que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverja. ■

## EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de la integral

Demuestre la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

**Solución** La función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ es continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. De

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1\right) \quad \leftarrow \tan^{-1} 1 = \pi/4 \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1} b - \frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \text{vea la figura 2.5.15} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

es claro que la integral impropia es convergente. Del teorema A.4.1*i*) se concluye que la serie dada también converge. ■

En la prueba de la integral, si la serie de términos positivos es de la forma $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, usamos entonces

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \text{donde} \quad f(k) = a_k.$$

## EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de la integral

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

$f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[3, \infty)$.

**Solución** La función $f(x) = (\ln x)/x$ satisface la hipótesis de la prueba de la integral sobre el intervalo $[3, \infty)$. En este caso,

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[(\ln b)^2 - (\ln 3)^2\right] = \infty
\end{aligned}$$

muestra que la integral impropia diverge. Se concluye del teorema A.4.1*ii*) que la serie dada también diverge. ■

**Serie *p*** La prueba de la integral es particularmente útil en cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \tag{1}$$

donde $p$ es cualquier número real fijo. La serie infinita (1) se conoce como la **serie $p$** o **hiperarmónica**. El siguiente teorema indica los valores de $p$ para los cuales converge (diverge) la serie $p$.

**Teorema A.4.2** Convergencia de la serie $p$

La serie $p$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

**DEMOSTRACIÓN** Se distinguen cuatro casos: $p > 1$, $p = 1$, $0 < p < 1$ y $p \leq 0$. En el primero y tercer casos usamos la prueba de la integral con $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$.

*i*) Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}[0 - 1] = \frac{1}{p-1}.$$

La serie $p$ es convergente por el teorema A.4.1*i*).

*ii*) Si $p = 1$, entonces se reconoce a la serie $p$ como la serie armónica divergente.

*iii*) Si $0 < p < 1$, entonces $-p + 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \to \infty} [b^{-p+1} - 1] = \infty.$$

La serie $p$ es divergente por el teorema A.4.1*ii*).

*iv*) Por último, si $p \leq 0$, entonces $-p \geq 0$ y así $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) = \lim_{n \to \infty} n^{-p} \neq 0$. La serie $p$ es divergente por la prueba del término $n$-ésimo, teorema A.3.3. ■

**EJEMPLO 3** Serie $p$

***a***) Del teorema A.4.2, la serie $p$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, ya que $p = \frac{1}{2} < 1$.

***b***) Del teorema A.4.2, la serie $p$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ya que $p = 2 > 1$. ■

## NOTAS DESDE EL AULA

*i*) Cuando se aplica la prueba de la integral, es necesario tener la seguridad de que el valor de la integral impropia convergente $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ no se relaciona con la suma real de la serie infinita correspondiente. De tal modo, la serie en el ejemplo 1 *no* converge a $\pi/4$. Vea el problema 36 en los ejercicios A.4.

*ii*) Los resultados de la prueba de la integral para $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ se cumplen incluso si la función no negativa continua $f$ no empieza a decrecer hasta que $x \geq N \geq n$. Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln k)/k$ la función $f(x) = (\ln x)/x$ disminuye sobre el intervalo $[3, \infty)$. De cualquier manera, en la prueba de la integral es posible utilizar $\int_1^{\infty} (\ln x\, dx)/x$.

## PROBLEMAS A.4

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### Fundamentos

En los problemas 1-30, determine si la serie dada converge o diverge. Recurra a la prueba de la integral en los casos en que sea apropiado.

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.1}}$

**2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

**3.** $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$

**4.** $\frac{1}{100} + \frac{1}{100\sqrt{2}} + \frac{1}{100\sqrt{3}} + \cdots$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+5k^2}$

8. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^2+5}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

12. $\sum_{k=2}^{\infty} k^2e^{-k}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$

15. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k(\ln k)^2}$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^3}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^{3/2}}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3}k\right)$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2+1)}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^k+e^{-k}}$

30. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{e^{3k}}}$

En los problemas 31-34, sin hacer ningún trabajo determine si la serie dada converge o diverge. Enuncie sus razones.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}\right)$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(5k^{-1.6}-10k^{-1.1}\right)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right)$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+4\sqrt{k}}{k^2}$

En los problemas 35 y 36, determine los valores de $p$ para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

36. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k[\ln(\ln k)]^p}$

## ≡ Piense en ello

**37.** Determine los valores de $p$ para los cuales la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^p \ln k$$

es convergente.

**38.** Suponga que $f$ es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. Demuestre que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

**39.** Demuestre que

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

**40.** Se demostró que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$ es divergente debido a que la sucesión de sumas parciales diverge. Recuerde que $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

***a***) Use el resultado del problema 38 para estimar la suma de los primeros 10 mil millones de términos de la serie armónica.

***b***) ¿Cuántos términos de la serie armónica son necesarios para garantizar que $S_n \geq 100$?

**41.** Deje que $S$ denote la suma de la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $S_n$ el término general en su sucesión de sumas parciales. Defina el **residuo**, o el error, que se efectúa cuando $S_n$ se aproxima a $S$, como

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots.$$

Suponga que $f$ es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$ y que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Demuestre que

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

**42.** La suma $S$ de la serie $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ se sabe que es igual a $\pi^2/6$. Recurra al problema 41 para determinar $n$ de manera que $S_n$ dará una aproximación a $S$ que es exacta hasta tres lugares decimales.

# A.5 Pruebas de comparación

**Introducción** A menudo es posible determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos $\sum a_k$ *comparando* sus términos con los términos de una *serie de prueba* $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente. En esta sección se considerarán dos pruebas de comparación para la convergencia y la divergencia.

**Prueba de comparación directa** La demostración de la siguiente prueba utilizará dos propiedades importantes de las sucesiones. Recuerde de la sección A.2 que si una sucesión está acotada y es monótona debe converger. También que si los términos de una sucesión se vuelven no acotados entonces ésta diverge. Aplicamos estos resultados a la sucesión de sumas parciales de una serie.

**Teorema A.5.1** Prueba de comparación directa

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos.

*i*) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge y $a_k \leq b_k$ para todo entero positivo $k$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

*ii*) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo $k$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

**DEMOSTRACIÓN** Sea $a_k > 0$ y $b_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots$ y considere que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{y} \qquad T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

son los términos generales de las sucesiones de sumas parciales para $\sum a_k$ y $\sum b_k$, respectivamente.

*i*) Si $\sum b_k$ es una serie convergente para la cual $a_k \leq b_k$, entonces $S_n \leq T_n$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe, $\{S_n\}$ es una sucesión creciente acotada y, en consecuencia, convergente por el teorema A.2.1. Por tanto, $\sum a_k$ es convergente.

*ii*) Si $\sum b_k$ diverge y $a_k > b_k$, entonces $S_n > T_n$. Puesto que $T_n$ aumenta sin cota, así lo hace $S_n$. Por consiguiente, $\sum a_k$ es divergente. ■

En general, si $\sum c_k$ y $\sum d_k$ son dos series para las cuales $c_k \leq d_k$ para toda $k$, se afirma que la serie $\sum c_k$ está **dominada** por la serie $\sum d_k$. De tal modo que para series de términos positivos, los incisos *i*) y *ii*) del teorema A.5.1 pueden reenunciarse de la siguiente manera:

- Una serie $\sum a_k$ es convergente si está dominada por una serie convergente $\sum b_k$.
- Una serie $\sum a_k$ diverge si domina a una serie divergente $\sum b_k$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método. Desde luego, no señalan que para recurrir a las series de prueba $\sum b_k$ es necesario estar familiarizado con algunas series que convergen y con algunas que divergen.

◀ Sería buena idea en este punto revisar la noción de serie $p$ en la sección A.4.

**EJEMPLO 1** Empleo de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+4}$.

**Solución** Se observa que al reducirse el denominador en los términos generales se obtiene una fracción mayor:

$$\frac{k}{k^3+4} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Debido a que la serie dada es dominada por una serie $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$, se concluye del teorema A.5.1*i*) que la serie dada también es convergente. ■

**EJEMPLO 2** Uso de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{k}$.

**Solución** Puesto que $\ln(k+2) > 1$ para $k \geq 1$, se tiene

$$\frac{\ln(k+2)}{k} > \frac{1}{k}.$$

En este caso se ha demostrado que la serie dada domina a la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$. En consecuencia, por el teorema A.5.1*ii*) la serie dada diverge. ■

**Prueba de comparación del límite** Otro tipo de prueba de comparación implica tomar el límite del cociente entre el término general de la serie $\sum a_k$ y el término general de la serie de prueba $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente.

**Teorema A.5.2** Prueba de comparación del límite

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

donde $L$ es finita y $L > 0$, entonces las dos series son ya sea ambas convergentes o ambas divergentes.

**DEMOSTRACIÓN** Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L > 0$, es posible elegir $n$ tan grande, como $n \geq N$ para algún entero positivo $N$, que

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}L.$$

Puesto que $a_n > 0$, la desigualdad implica que $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ para $n \geq N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, se concluye de la prueba de comparación directa que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y, en consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Además, puesto que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ para $n \geq N$, se observa que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen. ■

La prueba de comparación del límite es aplicable a menudo a series $\sum a_k$ para las cuales no es conveniente la prueba de comparación directa.

**EJEMPLO 3** Uso de la prueba de comparación del límite

El propio lector debe convencerse de que es difícil aplicar la prueba de comparación directa a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k^2 + 1}$. Sin embargo, se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^3)$ es una serie $p$ convergente ($p = 3 > 1$). En consecuencia, con

$$a_n = \frac{1}{n^3 - 5n^2 + 1} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n^3}$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n^2 + 1} = 1.$$

Del teorema A.5.2 se concluye que la serie dada converge. ■

Si el término general $a_n$ de la serie $\sum a_k$ es un cociente ya sea de potencias racionales de $n$ o de raíces de polinomios en $n$, es posible distinguir el término general $b_n$ de la serie de prueba $\sum b_k$ examinando el "comportamiento de grado" de $a_n$ para valores grandes de $n$. En otras palabras, para encontrar un candidato correspondiente a $b_n$ sólo se necesita examinar el cociente de las *potencias más altas de n* en el numerador y en el denominador de $a_n$.

**EJEMPLO 4** Uso de la prueba de comparación del límite

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5 + 7}}$.

**Solución** Para valores grandes de $n$, el término general de la serie $a_n = n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}$ "se comporta de manera similar" a un múltiplo constante de

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}.$$

De tal modo, se ensaya la serie $p$ divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ como una serie de prueba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}}{\dfrac{1}{n^{2/3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5}{8n^5+7}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}.$$

Así, de acuerdo con el teorema A.5.2, la serie dada diverge. ■

## NOTAS DESDE EL AULA

*i*) La hipótesis en la prueba de comparación directa también puede debilitarse, al considerar un teorema más fuerte. Para una serie con términos positivos, sólo se requiere que $a_k \le b_k$ o $a_k \ge b_k$ para $k$ suficientemente grande y no para todos los enteros positivos.

*ii*) En la aplicación de la prueba de comparación directa, a menudo es fácil alcanzar un punto en que la serie dada está dominada por una serie divergente. Por ejemplo,

$$\frac{1}{5^k + \sqrt{k}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es realmente cierto y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. Este tipo de razonamiento no prueba nada acerca de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k + \sqrt{k}}$. Desde luego, la última serie converge. ¿Por qué? De manera similar, no puede llegarse a una conclusión al mostrar que una serie dada domina a una serie convergente.

La siguiente tabla resume la **prueba de comparación directa**. Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos y $\sum b_k$ una serie que se sabe que converge o diverge (una serie de pruebas).

| Comparación de términos | Serie de prueba $\sum b_k$ | Conclusión sobre $\sum a_k$ |
|---|---|---|
| $a_k \le b_k$ | converge | converge |
| $a_k \le b_k$ | diverge | ninguna |
| $a_k \ge b_k$ | diverge | diverge |
| $a_k \ge b_k$ | converge | ninguna |

## PROBLEMAS A.5

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de comparación directa para determinar si la serie dada converge.

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

**2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5}$

**3.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1}$

**4.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^2+1}{k^3-k}$

**5.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

**6.** $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k^5}$

**7.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{2^k}$

**8.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+8^k}{3+10^k}$

**9.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} k}{\sqrt[3]{k^4+1}}$

**10.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{k \ln k}$

**11.** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j + e^{-j}}{5^j(j + 9)}$

**12.** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{ie^{-i}}{i + 1}$

**13.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

**14.** $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} + \cdots$

En los problemas 15-28, utilice la prueba de comparación del límite para determinar si la serie dada converge.

**15.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + 7}$

**16.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10 + \sqrt{k}}$

**17.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

**18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

**19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^5 + n^2}$

**20.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(4n + 1)^{3/2}}$

**21.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt[3]{64k^9 + 40}}$

**22.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k^2 - k}{2k^3 + 2k^2 - 8}$

**23.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + \ln k}{k^3 + 2k - 1}$

**24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{e^k - 2}$

**25.** $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

**26.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

**27.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right)^k$

**28.** $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \cdots$

En los problemas 29-40, utilice cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

**29.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100\sqrt{k^2 + 1}}$

**30.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$

**31.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(5 + \frac{k}{5}\right)$

**32.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + 1)^2}$

**34.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k-1}\sqrt[3]{k^2 - 2}}$

**35.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9 + \operatorname{sen}^2 k}$

**36.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{3^{2k} - 1}$

**37.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^k}$

**38.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^{-k}}$

**39.** $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

**40.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0.9)^k}{k}$

## ≡ Piense en ello

**41.** Vuelva a leer *ii*) de las *Notas desde el aula* en la página anterior y discuta las razones por las que el siguiente enunciado es cierto:

*Si $a_k > 0$ para todo $k$ y $\sum a_k$ converge, entonces $\sum a_k^2$ converge.*

**42.** Suponga que $p$ y $q$ son funciones polinomiales sin factores comunes de grado $n$ y $m$, respectivamente, y que $p(x)/q(x) > 0$ para $x > 0$. Discuta: ¿Bajo qué condiciones convergerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)/q(k)$?

**43.** Analice si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

*Si $a_k < b_k$ para todo $k$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.*

**44.** Demuestre que si la serie $\sum a_k$ de términos positivos converge, entonces $\sum \ln(1 + a_k)$ converge.

En los problemas 45 y 46, determine si la serie dada converge.

**45.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$

**46.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + k}$

**47.** La representación decimal de un número real positivo es una serie infinita:

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots,$$

donde $a_i$ representa uno de los 10 enteros no negativos 0, 1, 2, . . . , 9. Demuestre que la serie de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

siempre es convergente.

## ≡ Proyecto

**48. ¿Cuán grande es infinito?** La prueba de la integral puede usarse para verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.0001}}$ converge, en tanto que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge. Sin embargo, con la ayuda de un SAC se observa a partir de las gráficas de $y = 1/x^{1.0001}$ $y = 1/(x \ln x)$ en la FIGURA A.5.1 que

$$\frac{1}{k \ln k} < \frac{1}{k^{1.0001}}$$

para $2 \le k \le 15\,000$. De hecho, la desigualdad anterior es cierta para $2 \le k \le 99\,999\,999 \times 10^{99}$. ¿Entonces por qué $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ no converge por la prueba de comparación directa?

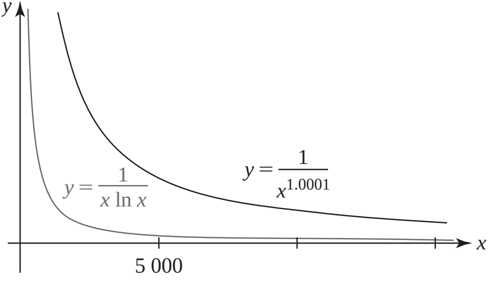



FIGURA A.5.1 Gráfica para el problema 48

# A.6 Pruebas de las proporciones y de la raíz

**Introducción** En esta sección, como en la anterior, las pruebas que se consideran son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

**Prueba de las proporciones** La primera de estas pruebas emplea el límite del cociente entre el primer término $(n + 1)$ y el término $n$-ésimo de la serie. Esta prueba es especialmente útil cuando $a_k$ implica factoriales, potencias $k$-ésimas de una constante y, algunas veces, potencias $k$-ésimas de $k$.

**Teorema A.6.1** Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

*i*) Si $L < 1$, la serie es convergente.
*ii*) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

**DEMOSTRACIÓN**

*i*) Sea $r$ un número positivo tal que $0 \leq L \leq r \leq 1$. Para $n$ suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo $N$, $a_{n+1}/a_n < r$; esto es, $a_{n+1} < ra_n$, $n \geq N$. La última desigualdad implica

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < a_N r^2 \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < a_N r^3, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De tal modo la serie $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ difiere de $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ a lo sumo un número finito de términos, se concluye que la primera serie también converge.

*ii*) Sea $r$ un número finito tal que $1 < r < L$. Entonces para $n$ suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo $N$, $a_{n+1}/a_n > r$ o $a_{n+1} > ra_n$. Para $r > 1$ esta última desigualdad implica $a_{n+1} > a_n$, y por ello $\lim_{x\to\infty} a_n \neq 0$. Del teorema A.3.3 concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. ■

En el caso en el que $L = 1$, debemos aplicar otra prueba a la serie para determinar su convergencia o divergencia.

**EJEMPLO 1** Empleo de la prueba de las proporciones

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$.

**Solución** Se identifica que $a_n = 5^n/n!$ y por ello $a_{n+1} = 5^{n+1}/(n + 1)!$. Luego se forma el cociente de $a_{n+1}$ y $a_n$, se simplifica y se toma el límite cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5 \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5 \frac{n!}{n!(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

◀ Repase las propiedades del factorial en la sección A.1. Vea (4) y (5) en esa sección.

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema A.6.1*i*) que la serie es convergente. ■

**EJEMPLO 2** Empleo de la prueba de las proporciones

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

**Solución** En este caso se tiene que $a_n = n^n/n!$ y $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}/(n+1)!$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad \leftarrow \text{Este límite es (3) de la sección 2.6.}
\end{aligned}$$

Puesto que $L = e > 1$, se concluye del teorema A.6.1*ii*) que la serie es divergente. ■

**Prueba de la raíz** Si los términos de una serie $\sum a_k$ consisten sólo en potencias $k$-ésimas, entonces puede aplicarse la siguiente prueba, la cual implica tomar la raíz $n$-ésima del término $n$-ésimo.

**Teorema A.6.2** Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L.$$

*i*) Si $L < 1$, la serie es convergente.
*ii*) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

La demostración de la prueba de la raíz es muy similar a la prueba de las proporciones y no se presentará.

**EJEMPLO 3** Empleo de la prueba de la raíz

Examinar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{k}\right)^k$.

**Solución** Se identifica primero $a_n = (5/n)^n$, y después se calcula el límite cuando $n \to \infty$ de la raíz $n$-ésima de $a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{5}{n}\right)^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema A.6.2*i*) que la serie converge. ■

## $\Sigma$ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) La prueba de las proporciones siempre producirá un caso no conclusivo cuando se aplique a una serie $p$. Inténtelo con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ y vea lo que ocurre.

*ii*) Las pruebas examinadas en ésta y en las dos secciones anteriores indican cuando una serie tiene una suma, pero ninguna de estas pruebas da alguna pista respecto a lo que es la suma real. Sin embargo, al saber que una serie converge, es posible sumar cinco, cien o mil términos en una computadora para obtener una aproximación de la suma.

**PROBLEMAS A.6** Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

## Fundamentos

En los problemas 1-16, recurra a la prueba de las proporciones para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\,000^k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

5. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{10}}{(1.1)^j}$

6. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^5(0.99)^j}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n3^{n-2}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(2k)^k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99^k(k^3+1)}{k^2 10^{2k}}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^k}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!3^k}{k^k}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$

En los problemas 17-24, utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie dada converge.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$

19. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{\ln k}\right)^k$

20. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^{k^2}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^{2k+1}}{k^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{e^{k+1}}$

En los problemas 25-32, use cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{k^3+2k+1}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2k+1}\right)^k$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{e^n}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k k!}{(k+1)!}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k+k}$

31. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+4^k}$

32. $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\cdots$

En los problemas 33 y 34, recurra a la prueba de las proporciones para determinar los valores no negativos de $p$ para los cuales la serie dada converge.

33. $\sum_{k=1}^{\infty} kp^k$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{p}\right)^k$

En los problemas 35 y 36, determine todos los valores reales de $p$ para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k!}$

36. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$

37. En los problemas 78 y 79 de los ejercicios A.1 se vio que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

está definida por la fórmula de recursión $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

*a*) Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

mostrando que este resultado satisface la fórmula de recursión.

*b*) Utilice el término general en el inciso *a*) para calcular $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ y $F_5$.

38. Sea $F_n$ el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el problema 37. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

39. Explique cómo el resultado del problema 38 demuestra que la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

converge.

40. **Un poco de historia** En 1985, William Gosper utilizó la siguiente identidad para calcular los primeros 17 millones de dígitos de $\pi$:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}(1\,103+26,390n)\frac{(4n)!}{(n!)^4(4\cdot 99)^{4n}}.$$

Esta identidad fue descubierta en 1920 por el matemático indio **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920). Ramanujan fue notable por su excepcional conocimiento en el manejo de manipulaciones y cálculos algebraicos extremadamente complejos.

*a*) Verifique que la serie infinita converge.

*b*) ¿Cuántos lugares decimales correctos de $\pi$ produce el primer término de la serie?

*c*) ¿Cuántos lugares decimales correctos de $\pi$ producen los dos primeros términos de la serie?

# A.7 Series alternantes

**Introducción** En las últimas tres secciones se consideraron pruebas para la convergencia que resultaron aplicables sólo para series con términos positivos. En la presente discusión se consideran series en las cuales los términos se alternan entre números positivos y negativos, esto es, las series tienen la forma

Una serie geométrica tal como $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie alternante. Vea el ejemplo 4 en la sección A.3.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \tag{1}$$

o

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k, \tag{2}$$

donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Las series (1) y (2) se dice que son **series alternantes**. Ya se encontró un tipo especial de serie alternante en la sección A.3, pero en esta sección se examinarán las propiedades de series alternantes generales y las pruebas de su convergencia. Debido a que la serie (2) es sólo un múltiplo de (1), se confinará la discusión a la última serie.

**EJEMPLO 1** Serie alternante

Las series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

y

$$\frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} - \frac{\ln 5}{32} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{2^k}$$

son ejemplos de series alternantes. ■

**Prueba de la serie alternante** La primera serie en el ejemplo 1, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, se denomina **serie armónica alternante**. Aunque la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente, la introducción de términos positivos y negativos en la sucesión de sumas parciales para la serie armónica alternante es suficiente para producir una serie convergente. Se demostrará que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge por medio de la siguiente prueba.

La condición $0 < a_{k+1} \le a_k$ significa que $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_k \ge a_{k+1} \ge \cdots$

**Teorema A.7.1** Prueba de la serie alternante

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $0 < a_{k+1} \le a_k$ para todo entero positivo $k$, entonces la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

**DEMOSTRACIÓN** Considere las sumas parciales que contienen $2n$ términos:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que la suposición $0 < a_{k+1} \le a_k$ implica $a_k - a_{k+1} \ge 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos

$$S_2 \le S_4 \le S_6 \le \cdots \le S_{2n} \le \cdots.$$

De tal modo, la sucesión $\{S_{2n}\}$, cuyo término general $S_{2n}$ contiene un número par de términos de la serie, es una sucesión monótona. Al reescribir (3) como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2n}$$

demuestre que $S_{2n} < a_1$ para todo entero positivo $n$. En consecuencia, $\{S_{2n}\}$ está acotada. Por el teorema A.2.1 se concluye que $\{S_{2n}\}$ converge a un límite $S$. Ahora,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

implica que $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$. Esto muestra que la sucesión de sumas parciales $\{S_{2n+1}\}$, cuyo término general $S_{2n+1}$ contiene un número impar de términos, también converge a $S$. Como $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$ convergen a $S$, se concluye que $\{S_n\}$ converge a $S$. ■

## EJEMPLO 2 Serie armónica alternante

Demuestre que la serie armónica alternante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

**Solución** Con la identificación $a_n = 1/n$ tenemos de inmediato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Además, puesto que

$$\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k}$$

para $k \ge 1$ se tiene $0 < a_{k+1} \le a_k$. Se concluye del teorema A.7.1 que la serie armónica alternante converge. ■

## EJEMPLO 3 Serie alternante divergente

La serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k-1}$ diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Este último resultado indica que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n-1}$$

no existe. Recuerde del teorema A.3.2 que es necesario que el último límite sea 0 para la convergencia de la serie. ■

Aunque demostrar que $a_{k+1} \le a_k$ quizá sea una tarea directa, éste muchas veces no es el caso.

## EJEMPLO 4 Uso de la prueba de la serie alternante

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

**Solución** Para demostrar que los términos de la serie satisfacen las condiciones $a_{k+1} \le a_k$, se considerará la función $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ para la cual $f(k) = a_k$. De la derivada, se observa que

$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \text{para} \quad x > 1,$$

y, en consecuencia, la función $f$ decrece para $x > 1$. De tal modo, $a_{k+1} \le a_k$ es cierta para $k \ge 1$. Además, la regla de L'Hôpital muestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \text{y por ello} \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por consiguiente, la serie dada converge por el método de la serie alternante. ■

$a_4$
$a_3$
$a_2$
$a_1$
0 $S_2$ $S_4$ $S$ $S_3$ $S_1$

FIGURA A.7.1 Sumas parciales sobre la recta numérica

**Aproximación de la suma de una serie alternante** Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge al número $S$. Las sumas parciales

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \ldots$$

pueden representarse sobre una línea numérica como se muestra en la FIGURA A.7.1. La sucesión $\{S_n\}$ converge de la manera ilustrada en la figura A.1.1*c*); esto es, los términos $S_n$ se acercan a $S$ cuando $n \to \infty$ aunque oscilan a ambos lados de $S$. Como se indica en la figura A.7.1, las sumas parciales con número par son menores que $S$ y las sumas parciales con número impar son mayores que $S$. De manera aproximada, las sumas parciales numeradas par se incrementan hacia el número $S$ y, a su vez, las sumas parciales numeradas impar disminuyen hacia $S$. Debido a ello, *la suma $S$ de la serie debe ubicarse entre sumas parciales consecutivas $S_n$ y $S_{n+1}$*:

$$S_n \le S \le S_{n+1}, \quad \text{para } n \text{ par,} \tag{4}$$

y

$$S_{n+1} \le S \le S_n, \quad \text{para } n \text{ impar.} \tag{5}$$

En este caso (4) produce $0 \le S - S_n \le S_{n+1} - S_n$ para $n$ par, y (5) implica que $0 \le S_n - S \le S_n - S_{n+1}$ para $n$ impar. De este modo, en cualquier caso $|S_n - S| \le |S_{n+1} - S_n|$.

Pero $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ para $n$ par y $S_{n+1} - S_n = -a_{n+1}$ para $n$ impar. Así, $|S_n - S| \le a_{n+1}$ para toda $n$. Se enuncia este resultado como el siguiente teorema.

**Teorema A.7.2** Cota de error para una serie alternante

Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, $a_k > 0$, converge hacia un número $S$. Si $S_n$ es la suma parcial $n$-ésima de la serie y $a_{k+1} \le a_n$ para todo $k$, entonces

$$|S_n - S| \le a_{n+1}$$

para toda $n$.

El teorema A.7.2 es útil para aproximar la suma de una serie alternante convergente. Señala que el **error** $|S_n - S|$ entre la $n$-ésima suma parcial y la serie es menor que el valor absoluto del primer término $(n + 1)$ de la serie.

## EJEMPLO 5 Aproximación de la suma de una serie

Aproxime la suma de la serie convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ hasta cuatro lugares decimales.

**Solución** Primero, observamos que $a_n = 1/(2n)!$. El teorema A.7.2 indica que debe tenerse

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005$$

para aproximar la suma de la serie hasta cuatro lugares decimales. Ahora a partir de

$$n = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{4!} \approx 0.041667$$

$$n = 2, \qquad a_3 = \frac{1}{6!} \approx 0.001389$$

$$n = 3, \qquad a_4 = \frac{1}{8!} \approx 0.000025 < 0.00005$$

se ve que $|S_3 - S| \le a_4 < 0.00005$. Por tanto,

$$S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 0.4597$$

tiene la exactitud deseada. ■

**Convergencia absoluta y condicional** Una serie que contiene signos mezclados tal como

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 - - + + \cdots \tag{6}$$

no es estrictamente de la forma dada en (1) y por ello no se clasifica como una serie alternante. El teorema A.7.1 no es aplicable a este tipo de serie. No obstante, veremos que la serie (6) es convergente *debido a que* la serie de valores absolutos

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots \tag{7}$$

Dé un vistazo adelante y lea las dos oraciones que siguen inmediatamente al ejemplo 7.

es convergente (una serie geométrica con $r = \frac{2}{3} < 1$). La serie (6) es un ejemplo de una serie que es **absolutamente convergente**.

En la siguiente definición se está dejando que el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ represente *cualquier* serie (los términos $a_k$ podrían alternar como en (1) o contener signos mezclados); los signos pueden seguir cualquier regla (como en (6)) o no.

**Definición A.7.1** Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

**EJEMPLO 6** Convergencia absoluta

La serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$ es absolutamente convergente, puesto que se mostró que la serie de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

era convergente por la prueba de la integral en el ejemplo 1 de la sección A.4. ■

**Definición A.7.2** Convergencia condicionada

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente de manera condicional** si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.

**EJEMPLO 7** Convergencia condicional

En el ejemplo 2 vimos que la serie armónica alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente. Pero al tomar el valor absoluto de cada término se obtiene la serie armónica divergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Por ello, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente de manera condicional. ■

El siguiente resultado muestra que toda serie absolutamente convergente es también convergente. Por esta razón es que la serie en (6) converge.

**Teorema A.7.3** La convergencia absoluta implica convergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

**DEMOSTRACIÓN** Si se define $c_k = a_k + |a_k|$, entonces $c_k \leq 2|a_k|$. Puesto que $\sum |a_k|$ converge, se sigue de la prueba de comparación que $\sum c_k$ converge. Además, $\sum (c_k - |a_k|)$ converge, ya que tanto $\sum c_k$ como $\sum |a_k|$ convergen. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - |a_k|).$$

Por tanto, $\sum a_k$ converge. ■

Advierta que $\sum |a_k|$ es una serie de términos positivos, y por ello las pruebas de la sección anterior pueden utilizarse para determinar si una serie converge absolutamente.

### EJEMPLO 8 La convergencia absoluta implica convergencia

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \frac{\operatorname{sen} 4}{16} + \cdots$$

contiene términos positivos y negativos puesto que

$$\operatorname{sen} 1 > 0, \quad \operatorname{sen} 2 > 0, \quad \operatorname{sen} 3 > 0, \quad \operatorname{sen} 4 < 0, \quad \operatorname{sen} 5 < 0, \quad \operatorname{sen} 6 < 0,$$

y así sucesivamente. De la trigonometría se sabe que $|\operatorname{sen} k| \leq 1$ para todo $k$. Por tanto,

$$\left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

para todo $k$. Por la prueba de comparación directa, teorema A.5.1, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right|$ converge puesto que es dominada por la serie $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ es absolutamente convergente, y en virtud de ello por el teorema A.7.3 converge. ■

**Pruebas de las proporciones y de la raíz** Las siguientes formas modificadas de la prueba de las proporciones y de la prueba de la raíz se aplican directamente a una serie alternante.

**Teorema A.7.4** Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos distintos de cero tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

*i*) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
*ii*) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

### EJEMPLO 9 Empleo de la prueba de las proporciones

Examine la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{k3^k}$.

**Solución** Con $a_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1}/(n3^n)$, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} 2^{2n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}.$$

Puesto que $L = \frac{4}{3} > 1$, veremos por el teorema A.7.4*ii*) que la serie alternante diverge. ■

**Teorema A.7.5** Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L.$$

*i*) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
*ii*) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

**Rearreglo de términos** Cuando trabajamos con una serie *finita* de términos tales como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6, \tag{8}$$

cualquier rearreglo del orden de los términos, tal como

$$-a_2 + a_1 - a_4 + a_3 - a_6 + a_5$$

o

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

tiene la misma suma que la original (8). Este tipo de manipulación despreocupada de términos no lleva a una serie *infinita*:

- Si los términos de una serie convergente de manera condicional se escriben en un orden diferente, la nueva serie puede diverger o converger hacia un número por completo diferente.

De hecho, es posible demostrar que mediante un rearreglo adecuado de sus términos, una serie convergente de manera condicional puede hacerse converger a un número real $r$ predeterminado.

En contraste, un rearreglo de los términos de una serie absolutamente convergente no efecta su suma:

- Si una serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse en cualquier manera y la serie resultante convergerá al mismo número que la serie original.

Por ejemplo, la serie geométrica $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es absolutamente convergente y su suma es $\frac{3}{4}$. El rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ de la serie geométrica *no* es una serie geométrica, aunque la serie rearreglada converge y su suma es $\frac{3}{4}$. Vea los problemas 53-56 en los ejercicios A.7.

## NOTAS DESDE EL AULA

*i*) La conclusión del teorema A.7.1 sigue siendo válida cuando la hipótesis "$a_{k+1} \leq a_k$ para todo $k$ positivo" se sustituye con el enunciado "$a_{k+1} \leq a_k$ para $k$ suficientemente grande". Para la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(\ln k)/k^{1/3}$, se muestra de inmediato por medio del procedimiento utilizado en el ejemplo 4 que $a_{k+1} \leq a_k$ para $k \geq 21$. Además, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En consecuencia, la serie converge por la prueba de la serie alternante.

*ii*) Si la serie de valores absolutos $\sum |a_k|$ resulta divergente, entonces no es posible establecer ninguna conclusión relativa a la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_k$.

## PROBLEMAS A.7

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de la serie alternante para determinar si la serie dada converge.

**1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$

**2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

**3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{k}{k+1}$

**4.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k}\frac{k}{k^2+1}$

**5.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k^2+2}{k^3}$

**6.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{3k-1}{k+5}$

**7.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{3^k}\right)$

**8.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{4^k}$

**9.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$

**10.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

**11.** $\sum_{n=2}^{\infty}(\cos n\pi)\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

**12.** $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3}$

**13.** $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{\ln k}$

**14.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln k}$

En los problemas 15-34, determine si la serie dada es absolutamente convergente, convergente de manera condicional o divergente.

**15.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

**16.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+5}}$

**17.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

**18.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{3^k}$

**19.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{5^k}$

**20.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(k2^{-k})^2$

**21.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$

**22.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

**23.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{100^k}$

**24.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{5^{2k-3}}{10^{k+2}}$

**25.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{1+k^2}$

**26.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{1+k^4}$

**27.** $\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\pi$

**28.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}{\sqrt{k+1}}$

**29.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

**30.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

**31.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]$

**32.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right]$

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k}{k+50}\right)^k$

**34.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{6^{3k}}{k^k}$

En los problemas 35 y 36, aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

**35.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$; cinco

**36.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; tres

En los problemas 37 y 38, encuentre el entero positivo $n$ más pequeño de modo que $S_n$ aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

**37.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$; dos

**38.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$; tres

En los problemas 39 y 40, aproxime la suma de la serie convergente de manera que el error sea menor que la cantidad indicada.

**39.** $1-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots;\quad 10^{-3}$

**40.** $1-\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{4}{5^4}+\cdots;\quad 10^{-4}$

En los problemas 41 y 42, estime el error de usar la suma parcial indicada como una aproximación a la suma de la serie convergente.

**41.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$; $S_{100}$

**42.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}$; $S_6$

En los problemas 43-48, indique por qué la prueba de la serie alternante no es aplicable a la serie dada. Determine si la serie converge.

**43.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/6)}{\sqrt{k^4+1}}$

**44.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100+(-1)^k2^k}{3^k}$

**45.** $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}--++\cdots$

**46.** $\frac{1}{1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}---+++\cdots$

**47.** $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$

[*Sugerencia*: Considere las sumas parciales $S_{2n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$]

**48.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-----\cdots$

En los problemas 49-52, determine si la serie dada converge.

**49.** $1-1+1-1+\cdots$

**50.** $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

**51.** $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$

**52.** $1+(-1+1)+(-1+1-1)+\cdots$

## ≡ Piense en ello

**53.** Vuelva a leer la discusión previa a *Notas desde el aula* de esta sección. Explique después por qué el siguiente enunciado es cierto:

*Si una serie de términos positivos $\sum a_k$ es convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse de cualquier manera y la serie que resulta converge al mismo número que la serie original.*

**54.** Suponga que $S$ es la suma de la serie armónica alternante convergente $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

Demuestre que el rearreglo de la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\cdots,$$

produce $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$.

**55.** Utilice $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ y el resultado del problema 54 en la forma

$$\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots$$

para demostrar que la suma de otro rearreglo de términos de la serie armónica alternante es

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

**56.** La serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie geométrica absolutamente convergente. Demuestre que su rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ es convergente. Intente con la prueba de las proporciones y con la prueba de la raíz. [*Sugerencia*: Examine $3^{k+(-1)^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$]

**57.** Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, pruebe que $\sum a_k^2$ converge. [*Sugerencia*: Para $n$ suficientemente grande, $|a_n| < 1$. ¿Por qué?]

**58.** Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ diverge.

**59.** Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

**60.** Dé un ejemplo de una serie divergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

**61.** Explique por qué la serie

$$e^{-x}\operatorname{sen} x + e^{-2x}\operatorname{sen} 2x + e^{-3x}\operatorname{sen} 3x + \cdots$$

converge para todo valor positivo de $x$.

# A.8 Series de potencias

**Introducción** En matemáticas aplicadas es común trabajar con la serie infinita de funciones,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots. \tag{1}$$

Los coeficientes $c_k$ son constantes que dependen de $k$ y las funciones $u_k(x)$ podrían ser diversos tipos de polinomios o incluso funciones seno y coseno. Cuando se especifica la variable $x$, por ejemplo $x = 1$, entonces la serie se reduce a una serie de constantes. La convergencia de una serie tal como (1) dependerá, desde luego, de la variable $x$, con la serie convergiendo usualmente para algunos valores de $x$ mientras que divergirá para otros valores. En ésta y en la siguiente sección se considerarán series infinitas (1) donde las funciones $u_k(x)$ son polinomios $(x - a)^k$. Estudiaremos las propiedades de este tipo de series y se demostrará cómo determinar los valores de $x$ para los cuales la serie converge.

**Series de potencias** Una serie que contiene potencias enteras no negativas de $(x - a)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots, \tag{2}$$

recibe el nombre de **serie de potencias en $x - a$**. Se dice que la serie de potencias (2) está **centrada en $a$** o tiene **centro $a$**. Un importante caso especial de (2), cuando $a = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \tag{3}$$

se denomina serie de **potencias en $x$**. La serie de potencias en (3) está centrada en 0. Un problema que enfrentaremos en esta sección es:

- Encontrar los valores de $x$ para los cuales una serie de potencias converge.

Observe que (2) y (3) convergen a $c_0$ cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

Es conveniente definir $(x - a)^0 = 1$ y $x^0 = 1$ incluso cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

**EJEMPLO 1** Serie de potencias centrada en 0

La serie de potencias en $x$ donde los coeficientes $c_k = 1$ para todo $k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

se reconoce como una serie geométrica con el mismo cociente común $r = x$. Por el teorema A.3.1, la serie converge para aquellos valores de $x$ que satisfacen $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$. La serie diverge para $|x| \geq 1$, esto es, para $x \leq -1$ o $x \geq 1$. ∎

En general, la prueba de las proporciones, como se establece en el teorema A.7.4, es especialmente útil al determinar los valores de $x$ para los cuales una serie de potencias converge. La prueba de la raíz, en la forma del teorema A.7.5, también es útil pero en menor grado.

**EJEMPLO 2** Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k+1)^2}$.

**Solución** Con la identificación de que $a_n = x^n/(2^n(n+1)^2)$ se usa la prueba de las proporciones, teorema A.7.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+1)^2}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2} \quad \leftarrow \text{divida entre } n \text{ el numerador y el denominador del primer término}$$

$$= \frac{|x|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^2 = \frac{|x|}{2}.$$

Del inciso *i*) del teorema A.7.4, se tiene convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que 1. De tal modo, la serie es absolutamente convergente para aquellos valores de $x$ que satisfacen $|x|/2 < 1$ o $|x| < 2$. Puesto que la desigualdad de valor absoluto $|x| < 2$ es equivalente a $-2 < x < 2$, advertimos que la serie dada convergerá para cualquier número $x$ en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Sin embargo, si $|x|/2 = 1$, o $|x| = 2$, o cuando $x = 2$ o $x = -2$, entonces la prueba de las proporciones no brinda información. Es necesario efectuar verificaciones independientes de la serie dada para la convergencia en estos puntos extremos. Al sustituir 2 por $x$ la serie se convierte en

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2},$$

que es convergente por comparación directa con la serie $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. De manera similar, al sustituir $-2$ por $x$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2},$$

que es convergente por la prueba de la serie alternante, teorema A.7.1. Concluimos que la serie dada converge para toda $x$ en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La serie diverge para $x < -2$ y $x > 2$, o equivalentemente, para $|x| > 2$. ■

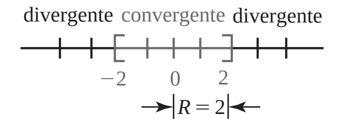



FIGURA A.8.1 El conjunto de números $x$ para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge se muestra entre corchetes.

**Intervalo de convergencia** En la FIGURA A.8.1 se ha ilustrado el conjunto $[-2, 2]$ de todos los números reales $x$ para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge y el conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ de números $x$ para los cuales la serie diverge. El conjunto de números para los cuales la serie converge es un intervalo centrado en 0 (el centro de la serie). Como se muestra en la figura, el radio de este intervalo es $R = 2$. En general, el conjunto de *todos* los números reales $x$ para los cuales converge una serie de potencias $\Sigma c_k(x-a)^k$ se dice que es su **intervalo de convergencia**. El centro del intervalo de convergencia es el centro $a$ de la serie. El radio $R$ del intervalo de convergencia se denomina **radio de convergencia**.

El siguiente teorema, que se presenta sin demostración, resume todas las maneras posibles en las que puede converger una serie de potencias.

**Teorema A.8.1** Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ exactamente uno de los siguientes puntos es cierto:

*i*) La serie converge sólo en el *número* $x = a$.
*ii*) La serie converge absolutamente para *todos los números reales* $x$.
*iii*) La serie converge absolutamente para los *números* $x$ *en un intervalo finito* $(a - R, a + R)$, $R > 0$, y diverge para los números en el conjunto $(-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$. En un punto extremo del intervalo finito, $x = a - R$ o $x = a + R$, la serie puede converger absolutamente, converger de manera condicional o divergir.

Desde luego en *ii*) y en *iii*), cuando la serie de potencias converge absolutamente a un número $x$, sabemos, por el teorema A.7.3, que converge. En *i*) del teorema A.8.1 el intervalo de convergencia consiste de un elemento $\{a\}$ y afirmamos que la serie tiene **radio de convergencia** $\boldsymbol{R = 0}$. En *ii*) del teorema A.8.1, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y la serie tiene **radio**

**de convergencia $R = \infty$**. Por último, en *iii*) del teorema A.8.1, hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia con **radio de convergencia $R > 0$**:

$$(a - R, a + R), \quad [a - R, a + R], \quad (a - R, a + R] \quad \text{o} \quad [a - R, a + R).$$

Vea la FIGURA A.8.2.

Como en el ejemplo 1, si $R > 0$, debe manejarse la cuestión de convergencia en un punto extremo $x = a \pm R$ al sustituir estos números en la serie dada y *reconociendo* después la serie resultante como convergente o divergente o *probando* la serie que resulta respecto a la convergencia mediante una prueba apropiada diferente a la prueba de las proporciones. Recuerde que:

- La prueba de las proporciones siempre es no conclusiva en un punto extremo $x = a \pm R$.

$a - R$ $a$ $a + R$

$a - R$ $a$ $a + R$

$a - R$ $a$ $a + R$

$a - R$ $a$ $a + R$

FIGURA A.8.2 Posibles intervalos finitos de convergencia con $R > 0$

## EJEMPLO 3 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

**Solución** Por la prueba de las proporciones, teorema A.7.4, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} |x|/(n+1) = 0$ para cualquier elección de $x$, la serie converge absolutamente para todo número real. De tal modo, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

## EJEMPLO 4 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}$.

**Solución** Por la prueba de las proporciones, teorema A.7.4, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(x-5)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-5|}{3} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)\frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}.\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x - 5|/3 < 1$ o $|x - 5| < 3$. Esta desigualdad de valores absolutos produce el intervalo abierto $(2, 8)$. En $x = 2$ y $x = 8$, los puntos extremos del intervalo, obtenemos, a su vez,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

La primera serie es un múltiplo de la serie armónica alternante y por ello es convergente, la segunda serie es la serie armónica divergente. Consecuentemente, el intervalo de convergencia es $[2, 8)$. El radio de convergencia es $R = 3$. La serie diverge si $x < 2$ o $x \geq 8$. Vea la FIGURA A.8.3. ■

La primera serie es

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots$$

o $\quad (-1)[1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots]$

◀ La serie entre corchetes es la serie armónica alternante convergente.

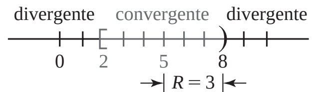



FIGURA A.8.3 Intervalo de convergencia del ejemplo 4

## EJEMPLO 5 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x + 10)^k$.

**Solución** De la prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x+10)^{n+1}}{n!(x+10)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x+10|\end{aligned}$$

se observa que el límite cuando $n \to \infty$ sólo puede existir si $|x + 10| = 0$, a saber, cuando $x = -10$. De tal manera,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases}\infty, & x \neq -10 \\ 0, & x = -10.\end{cases}$$

La serie diverge para todo número real $x$, *excepto* $x = -10$. En $x = -10$, obtenemos una serie convergente que consta sólo de ceros. El intervalo de convergencia es el conjunto $\{10\}$ y el radio de convergencia es $R = 0$. ■

## PROBLEMAS A.8

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-19.

### Fundamentos

En los problemas 1-24, recurra a la prueba de las proporciones para encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$

**2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

**3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$

**4.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$

**5.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^3}$

**6.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+7)^k}{\sqrt{k}}$

**7.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$

**8.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$

**9.** $\sum_{k=0}^{\infty} k!2^k x^k$

**10.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$

**11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{k^2+k}$

**12.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x-5)^k}{3^k}$

**13.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$

**14.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \ln k}$

**15.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{2k}} (x+7)^k$

**16.** $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{4k} (x-1)^k$

**17.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{5k}}{5^{2k}} \left(\frac{x}{3}\right)^k$

**18.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\,000^k}{k^k} x^k$

**19.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k+1)(k+2)} (x-1)^k$

**20.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(-2)^k k(k+1)} (x+5)^k$

**21.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{x-2}{3}\right)^k$

**22.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6-x)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$

**23.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^k} x^{2k+1}$

**24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(2k)!} x^{2k}$

En los problemas 25-28, emplee la prueba de la raíz para determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

**25.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$

**26.** $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^k (x+1)^k$

**27.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k (x+3)^k$

**28.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} (x-e)^k$

En los problemas 29 y 30, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

**29.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^k$

**30.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{3^k k!} (x-1)^k$

En los problemas 31-38, la serie dada no es una serie de potencias. No obstante, encuentre todos los valores de $x$ para los cuales la serie dada converge.

**31.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

**32.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{x^{2k}}$

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k$

**34.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{x}{x+2}\right)^k$

**35.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+2}{6}\right)^{k^2}$

**36.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(kx)^k}$

**37.** $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$

**38.** $\sum_{k=0}^{\infty} k! e^{-kx^2}$

**39.** Encuentre todos los valores de $x$ en $[0, 2\pi]$ para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k \operatorname{sen}^k x$ converge.

**40.** Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sen} kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de $x$.

### Problemas con calculadora/SAC

**41.** Algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen en términos de integrales no elementales. Algunas de estas funciones especiales de matemáticas aplicadas también se definen mediante series infinitas. La serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

recibe el nombre de **función de Bessel de orden 0**.

***a)*** El dominio de la función $J_0(x)$ es su intervalo de convergencia. Determine el dominio.

***b)*** El valor de $J_0(x)$ se define como la suma de la serie para $x$ en su dominio:

$$J_0(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x),$$

donde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

es el término general de la sucesión de sumas parciales. Emplee una calculadora o SAC y grafique las sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_4(x)$.

***c)*** Hay varios tipos de funciones de Bessel de diferentes órdenes. $J_0(x)$ es un caso especial de una función más general $J_\nu(x)$ llamada **función de Bessel de primer tipo de orden $\nu$**. Las funciones de Bessel son funciones incorporadas en sistemas algebraicos computarizados tales como *Mathematica* y *Maple*. Emplee un SAC para obtener la gráfica de $J_0(x)$ y compárela con las gráficas de las sumas parciales en el inciso *b*). [*Sugerencia*: En *Mathematica*, $J_0(x)$ se denota por medio de BesselJ[0, $x$].]

# A.9 Representación de funciones mediante series de potencias

**Introducción** Para cada $x$ en su intervalo de convergencia, una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ converge a un número. Por esta razón, una serie de potencias es en sí misma una función, la cual se denota como $f$, cuyo *dominio* es su intervalo de convergencia. Entonces para cada $x$ en el intervalo de convergencia se define el elemento correspondiente en el *rango* de la función, el valor $f(x)$, como la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k.$$

Los dos siguientes teoremas, que se anuncian sin demostración, responden algunas de las preguntas fundamentales acerca de la diferenciabilidad, integrabilidad y continuidad de una función $f$ definida por una serie de potencias.

**Diferenciación de una serie de potencias** La función $f$ definida por una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ es diferenciable.

**Teorema A.9.1** Diferenciación de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia $R$ es positivo o $\infty$, entonces $f$ es diferenciable en cada $x$ en $(a-R, a+R)$, y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \qquad (1)$$

El radio de convergencia $R$ de (1) es el mismo que el de la serie original.

El resultado de (1) establece simplemente que una serie de potencias puede diferenciarse *término por término* como se haría para una función polinomial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}c_0 + \frac{d}{dx}c_1(x-a) + \frac{d}{dx}c_2(x-a)^2 + \cdots + \frac{d}{dx}c_n(x-a)^n + \cdots \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Puesto que (1) es una serie de potencias con un radio de convergencia $R$, es posible aplicar el teorema A.9.1 a $f'$ definida en (2). Esto es, puede afirmarse que $f'$ es diferenciable en cada $x$ en $(a-R, a+R)$ y $f''$ está dada por

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-a)^{k-2}.$$

Continuando de esta manera, se concluye que:

- Una función $f$ definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo.

El radio de convergencia $R$ de cada serie derivada es el mismo que el de la serie original. Además, puesto que la diferenciabilidad implica continuidad, también tenemos el resultado:

- Una función $f$ definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, es continua en cada $x$ en el intervalo.

**Integración de una serie de potencias** Como en (1), el proceso de integración de una serie de potencias puede llevarse a cabo término por término:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int c_0(x-a)^0\,dx + \int c_1(x-a)\,dx + \int c_2(x-a)^2\,dx + \cdots + \int c_n(x-a)^n\,dx + \cdots \\ &= c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \cdots + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

**Teorema A.9.2** Integración de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ para el cual el radio de convergencia $R$ es positivo o $\infty$, entonces

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \qquad (3)$$

El radio de convergencia $R$ de (3) es el mismo que el de la serie original.

Puesto que la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ es continua, su integral definida existe y está definida por

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^k\,dx\right)$$

para cualesquiera números $\alpha$ y $\beta$ en $(a - R, a + R)$, $R > 0$, o en $(-\infty, \infty)$ si $R = \infty$.

Es recomendable que lea este párrafo varias veces.

En los teoremas A.9.1 y A.9.2 se estableció que si la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$ o $R = \infty$, entonces la serie obtenida que forma $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tiene el mismo radio de convergencia $R$. Esto *no* significa que la serie de potencias que definen a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tengan los mismos intervalos de convergencia. Esto no es tan malo como parece. Si el radio de convergencia de la serie que define a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ es $R > 0$, entonces los intervalos de convergencia pueden diferir sólo en los puntos extremos del intervalo. Como regla, al diferenciar una función definida por serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *es posible perder* convergencia en un punto final del intervalo. Al integrar una función definida por una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *puede ganarse* convergencia en un punto extremo del intervalo.

**EJEMPLO 1** Intervalo de convergencia

Para la función $f$ definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, encuentre los intervalos de convergencia de

***a***) $f'(x)$  ***b***) $\int f(x)\,dx$.

**Solución** Se muestra fácilmente de la prueba de las proporciones que el intervalo de convergencia de la serie de potencia que define a $f$ es $[-1, 1)$.

***a***) La derivada

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (4)$$

se reconoce como una serie geométrica cuyo intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. La serie diferenciada (4) ha perdido convergencia en el punto extremo izquierdo en el intervalo de convergencia de $f$.

***b***) La integral de $f$ es

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{x^k}{k}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} + C. \qquad (5)$$

En $x = -1$ y $x = 1$, las series en (5) se convierten, respectivamente, en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

La primera serie converge por la prueba de la serie alternante; la segunda converge por la prueba de comparación directa (la serie es dominada por la serie $p$ convergente $\sum 1/k^2$).

Como ambas series convergen, el intervalo de convergencia de (5) es $[-1, 1]$. En este caso, la serie integrada (5) ha ganado convergencia en el punto extremo derecho del intervalo de convergencia de $f$. ■

**Representación de series de potencias de una función** Con frecuencia es posible expresar una función $f$ *conocida* o *dada* (tal como $e^x$ o $\tan^{-1} x$) como la suma de una serie de potencias en algún intervalo. En este caso puede afirmarse que la serie es una **representación de $f$ en serie de potencias** sobre el intervalo.

El siguiente ejemplo es importante debido a que conduce a muchos otros resultados.

## EJEMPLO 2 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación en serie de potencias de $\dfrac{1}{1-x}$ centrada en 0.

**Solución** Recuerde que una serie geométrica converge a $a/(1-r)$ si $|r| < 1$:

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots.$$

Identificando $a = 1$ y $r = x$, observamos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{6}$$

La serie converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. En la FIGURA A.9.1 se ha desplegado la gráfica de $y = 1/(1-x)$ junto con las gráficas de las sumas parciales $S_2(x)$, $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_9(x)$ de la serie de potencias (6). Al inspeccionar esta figura, ponga atención sólo en el intervalo $(-1, 1)$. La serie no representa la función fuera de este intervalo. ■

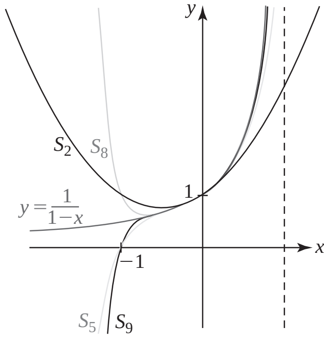



FIGURA A.9.1 Gráficas de las sumas parciales del ejemplo 2

Al sustituir $x$ por $-x$ en (6), obtenemos una representación de serie de potencias para la función $1/(1 + x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k. \tag{7}$$

La serie (7) converge para $|-x| < 1$ o $x < 1$. El intervalo de convergencia es otra vez $(-1, 1)$.

Muchas funciones conocidas pueden representarse mediante una serie infinita a través de cierto tipo de manipulación de las series en (6) y en (7). Por ejemplo, podría multiplicarse la serie por una potencia de $x$, reemplazar $x$ con otra variable o quizá combinar la sustitución de $x$ con otra variable con el proceso de integración (o diferenciación), etcétera.

## EJEMPLO 3 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\dfrac{1}{1+3x}$ centrada en 0.

**Solución** Al sustituir simplemente el símbolo $x$ por $3x$ en (7) obtenemos

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + (3x)^2 - (3x)^3 + \cdots + (-1)^n (3x)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

Esta serie converge cuando $|-3x| < 1$ o $|x| < \frac{1}{3}$. El intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ■

## EJEMPLO 4 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de series de potencias de $\dfrac{1}{5-x}$ centrada en 0.

**Solución** Factorizando 5 del denominador,

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5\left(1 - \dfrac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{5}},$$

estamos en posibilidad de utilizar (6). Al reemplazar el símbolo $x$ en (6) con $x/5$ obtenemos

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{5}} = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^5 + \cdots\right]$$

o

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{k+1}} x^k.$$

La serie converge para $|x/5| < 1$ o $|x| < 5$. El intervalo de convergencia es $(-5, 5)$. ■

Con un poco de habilidad, las representaciones en serie de potencias en (6) y (7) muy a menudo se utilizan para encontrar una representación de serie de potencias de una función centrada en un número $a$ diferente de 0.

### EJEMPLO 5 Serie de potencias centrada en 3

Determine una representación de serie de potencia de $\dfrac{1}{1+x}$ centrada en 3.

**Solución** Puesto que el centro de la potencia va a ser 3, deseamos que la serie de potencias contenga sólo potencias de $x - 3$. Con ese fin, sustraemos y sumamos 3 en el denominador:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x-3+3} = \frac{1}{4+(x-3)}.$$

A partir de este punto, procedemos como en el ejemplo 4, a saber: factorizamos 4 del denominador y usamos (7) con $x$ sustituida por $(x-3)/4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{4+(x-3)}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{4}}\\ &= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{x-3}{4} + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + \cdots\right]\end{aligned}$$

o

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-3}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-3)^k.$$

Esta serie converge para $|(x-3)/4| < 1$ o $|x-3| < 4$. La solución de la última desigualdad muestra que el intervalo de convergencia es $(-1, 7)$. ■

### EJEMPLO 6 Diferenciación de una serie de potencias

La diferenciación término por término de (7) produce una representación en serie de potencias de $1/(1+x)^2$ sobre el intervalo $(-1, 1)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}1 - \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{d}{dx}x^n + \cdots$$

produce

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

← se multiplican ambos lados por $-1$

o

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1}.$$ ■

### EJEMPLO 7 Integración de una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\ln(1+x)$ sobre $(-1, 1)$.

**Solución** Primero introducimos un cambio de variable de integración al sustituir $x = t$ en (7):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

Entonces, para cualquier $x$ dentro del intervalo $(-1, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n\int_0^x t^n\,dt + \cdots\\ &= t\Big]_0^x - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^x + \frac{1}{3}t^3\Big]_0^x - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^x + \cdots\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

Pero

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$$

y así

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \qquad (8)$$

Advierta que el intervalo de convergencia de la serie en (8) es ahora $(-1, 1]$, esto es, hemos agregado la convergencia en $x = 1$. Dejando $x = 1$ en (8), la serie en el lado derecho de la igualdad es la serie armónica alternante convergente; sobre el lado izquierdo se obtiene ln 2. De tal manera, hemos obtenido la suma $S$ de la serie armónica alternante:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \qquad (9)$$

**EJEMPLO 8** Aproximar un valor de ln $x$

Aproxime ln(1.2) hasta cuatro lugares decimales.

**Solución** Al sustituir $x = 0.2$ en (8) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln(1.2) &= 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots & (10)\\ &= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots \\ &\approx 0.1823. & (11) \end{aligned}$$

Si la suma de la serie (10) en el ejemplo 8 se denota mediante $S$, entonces sabemos del teorema A.7.2 que $|S_n - S| \leq a_{n+1}$. El número dado en (11) es exacto hasta cuatro decimales, ya que, para la quinta suma parcial de (10),

$$|S_5 - S| \leq 0.00001067 < 0.00005.$$

**Aritmética de series de potencias** Las dos series de potencias $f(x) = \sum b_k(x - a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x - a)^k$ pueden combinarse mediante las operaciones aritméticas de adición, multiplicación y división. Es factible que calculemos $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ como en la adición y multiplicación de dos polinomios: agrupamos términos a partir de potencias similares de $x - a$. En cada punto en el cual las series de potencias que definen a $f$ y $g$ convergen absolutamente, las series

$$f(x) + g(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)(x - a) + (b_2 + c_2)(x - a)^2 + \cdots \qquad (12)$$

y

$$f(x)g(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x - a) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)(x - a)^2 + \cdots \qquad (13)$$

convergen absolutamente. De manera similar, para $c_0 \neq 0$ podemos calcular $f(x)/g(x)$ mediante división larga:

$$\begin{array}{r|l} & \dfrac{b_0}{c_0} + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2}(x - a) + \cdots \quad \leftarrow \text{cociente} \\ \hline c_0 + c_1(x - a) + \cdots & b_0 + \quad b_1(x - a) \quad + \cdots \\ & b_0 + \quad \dfrac{b_0c_1}{c_0}(x - a) \quad + \cdots \\ \hline & 0 + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0}(x - a) + \cdots \\ & \vdots \end{array} \qquad (14)$$

Desde luego, no memorice (12), (13) y (14); sólo aplique el álgebra como lo haría para dos polinomios.

La división es válida en *alguna* vecindad del centro $a$ de las dos series.

En ocasiones es posible que utilicemos las operaciones aritméticas tal como se ilustró junto con los resultados conocidos previamente para obtener una representación de serie de potencias de una función.

**EJEMPLO 9** Suma de serie de potencias

Determine una representación de serie de potencias de $\dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}$ centrada en 0.

**Solución** Para comenzar, descomponemos la función en fracciones parciales

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{3 + x} - \frac{1}{1 - x}.$$

Después factorizamos 3 del denominador de la primera fracción parcial y usamos (7) con $x$ sustituida por $x/3$:

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k. \tag{15}$$

Esta serie converge para $|x/3| < 1$ o $|x| < 3$. El intervalo de convergencia para (15) es $(-3, 3)$. Ahora sabemos de (6) que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{16}$$

converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia para (16) es $(-1, 1)$. Por último, la suma de (15) y (16) produce la siguiente representación de serie de potencias para la función dada:

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3^k} - 1\right)x^k. \tag{17}$$

La serie (17) converge para todas las $x$ comunes a (esto es, la intersección de) los intervalos $(-3, 3)$ y $(-1, 1)$, es decir, para toda $x$ en $(-1, 1)$. ■

El resultado (17) también puede obtenerse al multiplicar dos series de potencias.

### EJEMPLO 10 Repaso del ejemplo 9

Si reescribimos la función en el ejemplo 9 como un producto

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = -\frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x}{3}} \cdot \frac{1}{1-x}$$

y después usamos (15) y (16), se concluye que

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x^2+2x-3} &= -\frac{4}{3}x \cdot \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\ &= -\frac{4}{3}x \cdot \left[1 + 1\left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)x^2 + \cdots\right]\\ &= -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots.\end{aligned}$$ ■

## PROBLEMAS A.9

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-20.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, utilice (6) y (7) para determinar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

1. $\dfrac{1}{3-x}$
2. $\dfrac{1}{4+x}$
3. $\dfrac{1}{1+2x}$
4. $\dfrac{1}{5+2x}$
5. $\dfrac{1}{1+x^2}$
6. $\dfrac{x}{1+x^2}$
7. $\dfrac{1}{4+x^2}$
8. $\dfrac{4}{4-x^2}$

En los problemas 9-14, utilice la diferenciación de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función que se indica. Señale el intervalo de convergencia.

9. $\dfrac{1}{(3-x)^2}$
10. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$
11. $\dfrac{1}{(5+2x)^3}$
12. $\dfrac{1}{(4+x)^3}$
13. $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$
14. $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

En los problemas 15-20, utilice la integración de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

15. $\tan^{-1} x$
16. $\tan^{-1}(x/2)$
17. $\ln(1+x^2)$
18. $\ln(5+2x)$
19. $\ln(4+x)$
20. $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

En los problemas 21-28, utilice (6), (7) o resultados previos para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

**21.** $\dfrac{1-x}{1+2x}$

**22.** $\dfrac{3-x}{1-x}$

**23.** $\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$

**24.** $\dfrac{x^3}{8+2x}$

**25.** $x\ln(1+x^2)$

**26.** $x^2\tan^{-1}x$

**27.** $\displaystyle\int_0^x \tan^{-1}t\,dt$

**28.** $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

En los problemas 29-32, proceda como en el ejemplo 5 y encuentre una representación de serie de potencias, centrada en el número dado $a$, de la función indicada. Señale el intervalo de convergencia.

**29.** $\dfrac{1}{1-x}$; $a=6$

**30.** $\dfrac{1}{x}$; $a=-2$

**31.** $\dfrac{x}{2+x}$; $a=-1$

**32.** $\dfrac{x-2}{x-1}$; $a=2$

En los problemas 33 y 34, proceda como en el ejemplo 9 y utilice fracciones parciales para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

**33.** $\dfrac{7x}{x^2+x-12}$

**34.** $\dfrac{3}{x^2-x-2}$

En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 y utilice multiplicación de serie de potencias para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de una representación de serie de potencias, centrada en 0, para la función dada.

**35.** $\dfrac{1}{(2-x)(1-x)}$

**36.** $\dfrac{x}{(1+2x)(1+x^2)}$

En los problemas 37 y 38, encuentre el dominio de la función dada.

**37.** $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}-\dfrac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$

**38.** $f(x)=1+2x+\dfrac{4x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{8x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$

En los problemas 39-44, use la serie de potencias para aproximar la cantidad dada hasta cuatro lugares decimales.

**39.** $\ln(1.1)$

**40.** $\tan^{-1}(0.2)$

**41.** $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x^3}\,dx$

**42.** $\displaystyle\int_0^{1/3}\frac{x}{1+x^4}\,dx$

**43.** $\displaystyle\int_0^{0.3} x\tan^{-1}x\,dx$

**44.** $\displaystyle\int_0^{1/2}\tan^{-1}x^2\,dx$

**45.** Utilice el problema 15 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

**46.** Se sabe que la serie en el problema 45 converge muy lentamente. Demuestre lo anterior encontrando el entero positivo $n$ más pequeño de manera que $S_n$ aproxime $\pi/4$ hasta cuatro lugares decimales.

En los problemas 47 y 48, demuestre que la función definida por la serie de potencias satisface la ecuación diferencial dada.

**47.** $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$; $(x+1)y''+y'=0$

**48.** $J_0(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}$; $xy''+y'+xy=0$

### ≡ Piense en ello

**49.** ***a***) Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, entonces demuestre que $f'(x)=f(x)$ para toda $x$ en $(-\infty,\infty)$.

***b***) ¿Qué función tiene la propiedad de que su primera derivada es igual a la función? Conjeture sobre cuál función se representa mediante la serie de potencias del inciso *a*).

**50.** ***a***) Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, entonces demuestre que $f''(x)=-f(x)$ para toda $x$ en $(-\infty,\infty)$.

***b***) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su segunda derivada es igual al negativo de la función? Conjeture respecto a cuál función se representa mediante la serie de potencias del inciso *a*). Advierta que las potencias de $x$ en la serie de potencias son enteros positivos impares.

# A.10 Serie de Taylor

**Introducción** Suponga que $\sum c_k(x-a)^k$ es una serie de potencias centrada en $a$ y que tiene un intervalo de convergencia con un radio de convergencia $R$ distinto de cero. Luego, como se vio en la sección anterior, dentro del intervalo de convergencia una serie de potencias es una función continua que posee derivadas de todos los órdenes. También se abordó la idea de usar una serie de potencias para *representar* una función determinada (tal como $1/(1+x)$) sobre un intervalo. En esta sección se va a extender de manera adicional la noción de representar una función mediante una serie de potencias. El problema básico es:

- Suponga que se cuenta con una función $f$ que posee derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto $I$. ¿Es posible encontrar una serie de potencias que **represente** a $f$ sobre $I$?

En palabras un poco diferentes: ¿podemos **expandir** una función diferenciable infinitamente (tal como $f(x)=\operatorname{sen}x$, $f(x)=\cos x$ o $f(x)=e^x$) en una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ que converge al valor correcto de la función $f(x)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto $(a-R, a+R)$, donde $R$ es $R>0$ o $R=\infty$?

**Serie de Taylor para una función $f$** Antes de responder la pregunta del último párrafo, se va a hacer simplemente la *suposición* de que una función $f$ infinitamente diferenciable sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ puede representarse mediante una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ sobre ese intervalo. En ese caso es relativamente fácil determinar cuáles deben ser los coeficientes $c_k$. La diferenciación repetida de

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{1}$$

produce

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \tag{2}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots \tag{3}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1c_3 + \cdots, \tag{4}$$

y así sucesivamente. Al evaluar (1), (2), (3) y (4) en $x = a$, encontramos que

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = 1!c_1, \quad f''(a) = 2!c_2 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 3!c_3,$$

respectivamente. En general, se ve que $f^{(n)}(a) = n!c_n$ o

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \; n \geq 0. \tag{5}$$

Cuando $n = 0$, interpretamos la derivada 0-ésima como $f(a)$ y $0! = 1$. Al sustituir (5) en (1) se producen los resultados resumidos en el siguiente teorema.

**Teorema A.10.1** Forma de una serie de potencias

Si una función $f$ posee una representación en serie de potencias $f(x) = \sum c_k(x-a)^k$ sobre un intervalo $(a - R, a + R)$, entonces los coeficientes deben ser $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

En otras palabras, si una función $f$ tiene una representación en serie de potencias centrada en $a$, entonces debe verse como lo siguiente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{6}$$

La serie en (6) se denomina **serie de Taylor de $f$ en $a$**, o **centrada en $a$**. La serie de Taylor centrada en $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{7}$$

se denomina **serie de Maclaurin de $f$**.

La pregunta planteada en la introducción ahora puede reformularse como:

- ¿Es posible expandir una función $f$ infinitamente diferenciable en una serie de Taylor (6)?

Parecería que la respuesta es afirmativa (calculando simplemente los coeficientes como lo indica la fórmula (5)). Por desgracia, no es tan simple el concepto de expandir una función $f$ dada infinitamente diferenciable en una serie de Taylor. Es necesario tener en mente que (5) y (6) se obtuvieron bajo la suposición de que $f$ era representada por una serie de potencias centrada en $a$. Si no se conoce *a priori* que una función $f$ infinitamente diferenciable tiene una representación en serie de potencias, entonces debe considerarse una serie de potencias obtenidas de (6) o (7) como un resultado *formal*, en otras palabras, una serie de potencias que es simplemente **generada** por la función $f$. No se sabe si la serie generada de esta manera converge o, incluso si lo hace, si converge a $f(x)$.

**EJEMPLO 1** Serie de Taylor de ln $x$

Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 1$. Determine su intervalo de convergencia.

**Solución** La función $f$, sus derivadas y sus valores en 1 son:

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3} & f'''(1) = 2! \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{array}$$

Puesto que $(n - 1)!/n! = 1/n$, $n \geq 1$, (6) produce

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k. \tag{8}$$

La prueba de las proporciones,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-1| = |x-1|,$$

muestra que la serie (8) converge para $|x - 1| < 1$ o sobre el intervalo (0, 2). En los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2$, las series

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

son divergente y convergente, respectivamente. El intervalo de convergencia de estas series es (0, 2]. El radio de convergencia es $R = 1$. ■

Advierta en el ejemplo 1 que no se escribió la igualdad

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

En este punto no se ha establecido que la serie dada en (8) representa a $\ln x$ sobre el intervalo (0, 2].

**Teorema de Taylor** De acuerdo con (5), es claro que para tener una serie de Taylor centrada en $a$ es necesario que una función $f$ posea derivadas de todos los órdenes que estén definidas en $a$. Así, por ejemplo, $f(x) = \ln x$ no posee una serie de Maclaurin, debido a que $f(x) = \ln x$ y todas sus derivadas no están definidas en 0. Además, es importante notar que incluso si una función $f$ posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente sobre algún intervalo, es posible que la serie no represente a $f$ sobre el intervalo, esto es, la serie no converge a $f(x)$ en toda $x$ en el intervalo. Vea el problema 63 de los ejercicios A.10. La pregunta fundamental de si una serie de Taylor representa la función que la generó puede resolverse por medio del **teorema de Taylor**.

**Teorema A.10.2** Teorema de Taylor

Sea $f$ una función tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda $x$ en un intervalo que contiene al número $a$. Entonces para toda $x$ en el intervalo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{9}$$

(*continúa*)

recibe el nombre de **polinomio de Taylor de $f$ en $a$**, de grado $n$-ésimo, y

Existen varias formas del residuo. Esta forma se debe al matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813).

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{10}$$

se llama **forma de Lagrange del residuo**. El número $c$ yace entre $a$ y $x$.

Puesto que la demostración de este teorema desviaría la principal finalidad de esta discusión, puede omitirse. La importancia del teorema A.10.2 radica en el hecho de que los polinomios de Taylor $P_n(x)$ son las sumas parciales de la serie de Taylor (6). El residuo se define como

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \qquad \text{y así} \qquad P_n(x) = f(x) - R_n(x). \tag{11}$$

Si $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, entonces la función $f$ es la suma de la serie de Taylor que la genera. Sin embargo, de (11) observamos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

por lo que sí es posible mostrar de algún modo que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. Resumimos el resultado.

**Teorema A.10.3** Convergencia de una serie de Taylor

Suponga que $f$ es una función que posee derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo centrado en el número $a$. Si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para toda $x$ en el intervalo, entonces la serie de Taylor generada por $f$ converge a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En la práctica, la prueba de que el residuo $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ depende muchas veces del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \tag{12}$$

Este último resultado sigue de aplicar el teorema A.3.2 a la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x^k/k!$, la cual se sabe que es absolutamente convergente para todos los números reales. (Vea el ejemplo 3 en la sección A.8.)

**EJEMPLO 2** Repaso del ejemplo 1

Demuestre que la serie (8) representa a $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo (0, 2].

**Solución** En la solución para el ejemplo 1 vimos que la derivada $n$-ésima de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

De $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$, obtenemos de (10)

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} = \left|\frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{c}\right|^{n+1},$$

donde $c$ es algún número en el intervalo (0, 2] entre 1 y $x$.

Si $1 \le x \le 2$, entonces $0 < x - 1 \le 1$. Puesto que $1 < c < x$, debemos tener $0 < x - 1 \le 1 < c$ y, en consecuencia, $(x-1)/c < 1$. Por consiguiente,

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

En el caso en el que $0 < x < 1$, también puede mostrarse que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Se omite la demostración. En consecuencia,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

para todos los valores de $x$ en el intervalo $(0, 2]$. ■

**EJEMPLO 3** Representación de la serie de Maclaurin de cos *x*

Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$. Demuestre que la serie de Maclaurin representa a $\cos x$ para toda $x$.

**Solución** Determinamos primero la serie de Maclaurin generada por $f(x) = \cos x$:

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\text{sen}\, x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \text{sen}\, x & f'''(0) = 0 \end{array}$$

y así sucesivamente. De (7) obtenemos la serie de potencias

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{13}$$

La prueba de las proporciones indica que (13) converge absolutamente para todos los valores reales de $x$, en otras palabras, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. En este caso, con el fin de demostrar que $\cos x$ es representada por la serie (13), debemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Para este fin, advertimos que la derivada de $f$ satisface

$$|f^{(n+1)}(x)| = \begin{cases} |\text{sen}\, x|, & n \text{ par} \\ |\cos x|, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En cualquier caso, $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ para todo número real $c$, y consecuentemente por (10),

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En vista de (12), tenemos para cualquier elección fija aunque arbitraria de $x$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Pero $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Por tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

es una representación válida de $\cos x$ para todo número real $x$. ■

**EJEMPLO 4** Representación de la serie de Taylor de sen *x*

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \text{sen}\, x$ centrada en $a = \pi/3$. Compruebe que la serie de Taylor representa a $\text{sen}\, x$ para toda $x$.

**Solución** Tenemos

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \text{sen}\, x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) = \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -\text{sen}\, x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) = -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}$$

y así sucesivamente. Por consiguiente, la serie de Taylor centrada en $\pi/3$ generada por sen $x$ es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots. \tag{14}$$

También en este caso, de la prueba de las proporciones se sigue que (14) converge absolutamente para todos los valores reales de $x$, esto es, su intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. Para demostrar que

$$\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots$$

para todo valor real $x$, advertimos que, como en el ejemplo anterior, $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$. Esto implica que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-\pi/3|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a partir de lo cual vemos, con la ayuda de (12), que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

Se resumen algunas representaciones importantes de series de Maclaurin y sus intervalos de convergencia:

| Series de Maclaurin | Intervalos de convergencia | |
|---|---|---|
| $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ | $(-\infty, \infty)$ | (15) |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ | $(-\infty, \infty)$ | (16) |
| $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ | $(-\infty, \infty)$ | (17) |
| $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$ | $[-1, 1]$ | (18) |
| $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | $(-\infty, \infty)$ | (19) |
| $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $(-\infty, \infty)$ | (20) |
| $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$ | $[-1, 1]$ | (21) |

Se pide al lector demostrar la validez de las representaciones (15), (17), (19) y (20) como ejercicio. Vea los problemas 51-54 en los ejercicios A.10.

Además, se le recomienda observar con cuidado las series dadas en (16)-(20) y responder después la pregunta del problema 61 de los ejercicios A.10.

**Algunas gráficas de polinomios de Taylor** En el ejemplo 3 observamos que la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = 0$ representa la función para toda $x$, ya que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Siempre es de interés ver gráficamente cómo las sumas parciales de la serie de Taylor, las cuales son los polinomios de Taylor definidos en (9), convergen a la función. En la FIGURA A.10.1*a*) las gráficas de los polinomios de Taylor

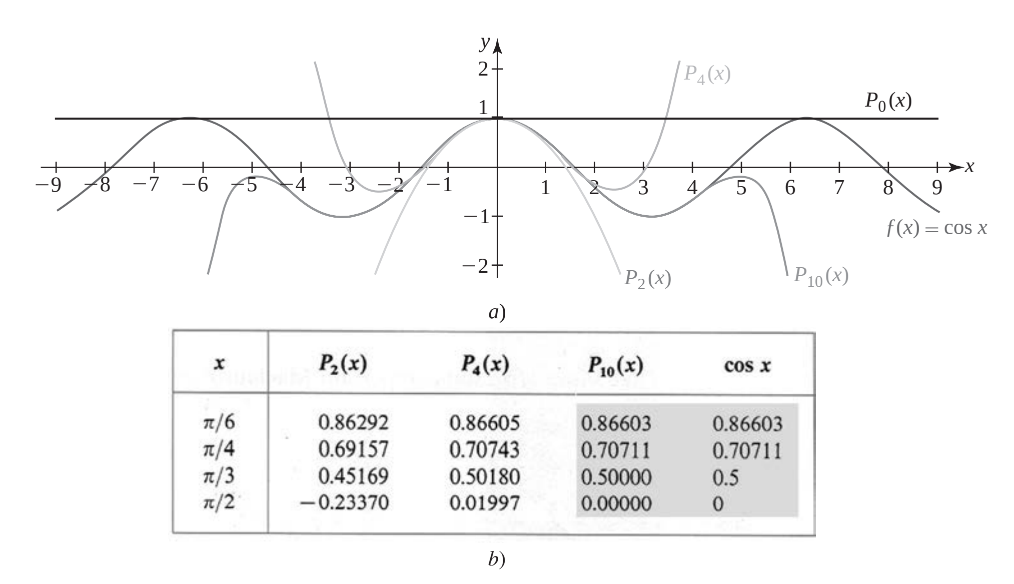
$$P_0(x) = 1, \qquad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2, \qquad P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,$$

y

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$$

se comparan con la gráfica de $f(x) = \cos x$.

Una comparación de los valores numéricos se presenta en la figura A.10.1*b*).




| $x$ | $P_2(x)$ | $P_4(x)$ | $P_{10}(x)$ | $\cos x$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi/6$ | 0.86292 | 0.86605 | 0.86603 | 0.86603 |
| $\pi/4$ | 0.69157 | 0.70743 | 0.70711 | 0.70711 |
| $\pi/3$ | 0.45169 | 0.50180 | 0.50000 | 0.5 |
| $\pi/2$ | −0.23370 | 0.01997 | 0.00000 | 0 |

FIGURA A.10.1 Polinomios de Taylor $P_0$, $P_2$, $P_4$ y $P_{10}$ para $\cos x$

**Aproximaciones** Cuando el valor de $x$ es cercano al centro $a$ ($x \approx a$) de una serie de Taylor, puede usarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función $f$ en $a$ para aproximar el valor de la función $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

## EJEMPLO 5 Aproximación utilizando un polinomio de Taylor

Aproxime $e^{-0.2}$ mediante un polinomio de Taylor $P_3(x)$. Determine la exactitud de la aproximación.

**Solución** Como el valor $x = -0.2$ es cercano a 0, recurrimos al polinomio de Taylor de $f(x) = e^x$ en $a = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{1!}x^2 + \frac{f''(0)}{3!}x^3.$$

Se sigue de

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

que
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Este polinomio es la cuarta suma parcial de la serie dada en (15). Ahora,

$$P_3(-0.2) = 1 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 \approx 0.8187$$

y por ello,
$$e^{-0.2} \approx 0.8187. \tag{22}$$

Después de esto, de acuerdo con (10) es posible escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0.2 < c < 0$ y $e^c < 1$. La desigualdad

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|-0.2|^4}{24} < 0.0001$$

implica que el resultado en (22) es exacto hasta tres lugares decimales.

En la FIGURA A.10.2 hemos comparado las gráficas de los polinomios de Taylor $f(x) = e^x$ centrados en $a = 0$:

$$P_1(x) = 1 + x, \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Advierta en las figura A.10.2*b*) y A.10.2*c*) que las gráficas de los polinomios de Taylor $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son indistinguibles de la gráfica de $y = e^x$ en una pequeña vecindad de $x = 0.2$.

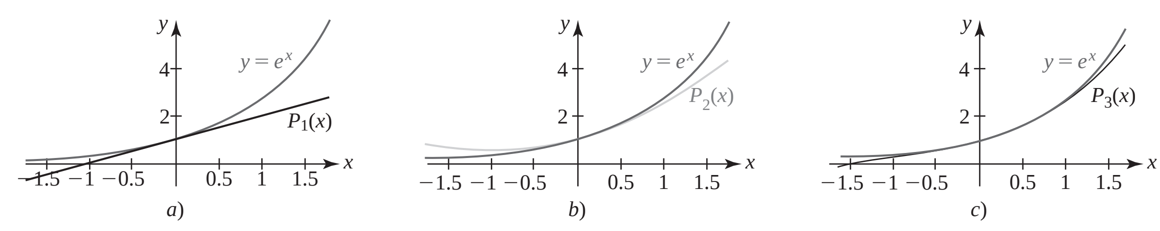



FIGURA A.10.2 Gráficas de los polinomios de Taylor del ejemplo 5

Una integral tal como $\int \operatorname{sen} x^2\,dx$, donde sen $x^2$ no posee una antiderivada en la forma de una función elemental, se conoce como una integral no elemental. La serie de Taylor es de gran ayuda cuando se trabaja con integrales no elementales. Por ejemplo, la serie de Maclaurin que se obtiene al sustituir $x$ por $x^2$ en (17) converge para $-\infty < x < \infty$, y por ello, de acuerdo con el teorema A.9.2,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x^2\,dx &= \int\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots + C. \qquad (23)\end{aligned}$$

## EJEMPLO 6 Aproximación utilizando una serie de Taylor

Aproxime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ hasta tres lugares decimales.

**Solución** De (23) advertimos de inmediato que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx &= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots. \qquad (24)\end{aligned}$$

Por el teorema de la cota del error para la serie alternante, teorema A.7.2, el cuarto término en la serie (24) satisface

$$a_4 = \frac{1}{15\cdot 7!} \approx 0.000013 < 0.0005.$$

Por tanto, la aproximación

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.3103$$

es exacta hasta tres lugares decimales.

**Límites** Una representación de serie de potencias de una función algunas veces es útil en el cálculo de límites. Por ejemplo, en la sección 3.4 se recurrió a un sutil argumento geométrico para demostrar que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Pero si usamos (17) y la división entre $x$ observamos de inmediato que

el límite de cada uno de estos términos es 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 \overbrace{- \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}\right) = 1.$$

**EJEMPLO 7** Cálculo de un límite

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$.

**Solución** Observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Si revisa el problema 25 en el ejercicio 5.11, tal vez recuerde evaluar este límite mediante la regla de L'Hôpital. Pero en vista de (18), podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\right)}{x^3} && \leftarrow \text{también vea el problema 15 en los ejercicios A.9 para la representación de } \tan^{-1} x \text{ en serie de potencias}\\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \cdots}{x^3} && \leftarrow \text{se factoriza } x^3 \text{ del numerador y se cancela}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \cdots\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

**Empleo de la aritmética de una serie de potencias** En la sección A.9 se discutió la aritmética de la serie de potencias, esto es, las series de potencias pueden básicamente manipularse de manera aritmética igual que los polinomios. En el caso en que las representaciones de las series de potencia $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ convergen en el mismo intervalo abierto $(a - R, a + R)$ para $R > 0$ o $(-\infty, \infty)$ para $R = \infty$, pueden obtenerse las representaciones de la serie de potencias para $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ a su vez, sumando las series y multiplicándolas. La suma y el producto convergen en el mismo intervalo. Si dividimos la serie de potencias de $f$ entre la serie de potencias de $g$, entonces el cociente representa a $f(x)/g(x)$ en alguna vecindad de $a$.

**EJEMPLO 8** Serie de Maclaurin de tan *x*

Encuentre los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $f(x) = \tan x$.

**Solución** De (16) y (17) podemos escribir

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots}$$

Entonces mediante división larga

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\hline
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\hline
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
 & \vdots
\end{array}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots.$$

■

Desde luego, el último resultado pudo también obtenerse utilizando (7). Vea el problema 11 en los ejercicios A.10. Después de trabajar en el ejemplo 8 se le recomienda leer *ii*) en las *Notas desde el aula*.

**Polinomios de Taylor (Redux)** En la sección 5.8 se introdujo la noción de una **aproximación lineal local** de $f$ en $a$ dada por $f(x) \approx L(x)$, donde

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{25}$$

Esta ecuación representa la línea tangente a la gráfica de $f$ en $x = a$. Como es un polinomio lineal, otro símbolo apropiado para (25) es

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{26}$$

La ecuación se reconoce ahora como el polinomio de Taylor de primer grado de $f$ en $a$. La idea detrás de (25) es que la línea tangente puede usarse para aproximar el valor de $f(x)$ cuando $x$ está en una pequeña vecindad de $a$. Pero, puesto que la mayoría de las gráficas tienen concavidad y una línea tangente, no es posible esperar que un polinomio de grado superior proporcionaría una mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de que su gráfica estaría cerca de la gráfica de $f$ sobre un intervalo más grande que contenga a $a$. Advierta que (26) tiene las propiedades de $P_1$ y su primera derivada concuerda con $f$ y su primera derivada en $x = a$:

$$P_1(a) = f(a) \qquad \text{y} \qquad P_1'(a) = f'(a).$$

Si deseamos que una función polinomial cuadrática

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

tenga las propiedades análogas, a saber:

$$P_2(a) = f(a), \qquad P_2'(a) = f'(a) \qquad \text{y} \qquad P_2''(a) = f''(a),$$

entonces, siguiendo un procedimiento similar a (1)-(5), se advierte que $P_2$ debe ser

$P_n(x)$ es el polinomio de grado $n$ definido en (9).

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2. \tag{27}$$

Gráficamente, esto significa que la gráfica de $f$ y la gráfica de $P_2$ tienen la misma línea tangente y la misma concavidad en $x = a$. Desde luego, se reconoce (27) como el polinomio de Taylor de segundo grado. Se afirma que $f(x) \approx P_2(x)$ es una **aproximación cuadrática local de $f$ en $a$**. Al continuar de esta manera se construye $f(x) \approx P_n(x)$, que es una **aproximación local de grado $n$-ésimo de $f$ en $a$**. Con esta discusión en mente, el lector necesita prestar mayor atención a las gráficas de $f(x) = \cos x$, $P_0$, $P_2$, $P_4$ y $P_{10}$ cerca de $x = 0$ en la figura A.10.1*a*) y las aproximaciones en la figura A.10.1*b*). También debe reexaminar la figura A.10.2.

**Posdata: Un poco de historia** El teorema A.10.2 recibe su nombre en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731), quien publicó este resultado en 1715. Sin embargo, la fórmula en (6) fue descubierta por Johann Bernoulli casi 20 años antes. La serie en (7) recibe su nombre en honor al matemático escocés y estudiante de Isaac Newton, **Colin Maclaurin** (1698-1746). No es claro por qué el nombre de Maclaurin se asocia con esta serie.

## $\Sigma$ NOTAS DESDE EL AULA

*i*) El método de la serie de Taylor para encontrar la serie de potencias de una función y la prueba posterior de que la serie representa a la función tiene una gran y obvia desventaja. La obtención de una expresión general para la derivada $n$-ésima de la mayoría de las funciones es casi imposible. De tal modo, se presenta con frecuencia la limitación de determinar sólo algunos de los primeros coeficientes $c_n$.

*ii*) Es fácil pasar por alto la importancia de los resultados en (6) y (7). Suponga que se desea encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = 1/(2 - x)$. Es posible, desde luego, utilizar (7), lo cual se le pide al lector en el problema 1 de los ejercicios A.10. Por otro lado, el lector debe reconocer, de los ejemplos 3-5 de la sección A.9, que la representación en serie de potencias de $f$ puede obtenerse utilizando series geométricas. El punto es:

- La representación es única. De tal modo que sobre su intervalo de convergencia, una serie de potencias que representa a una función, independientemente de cómo se obtuvo, es la serie de Taylor o de Maclaurin de esa función.

## PROBLEMAS A.10

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-20.

### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

**1.** $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + 5x}$

**3.** $f(x) = \ln(1 + x)$ **4.** $f(x) = \ln(1 + 2x)$

**5.** $f(x) = \text{sen}\, x$ **6.** $f(x) = \cos 2x$

**7.** $f(x) = e^x$ **8.** $f(x) = e^{-x}$

**9.** $f(x) = \text{senh}\, x$ **10.** $f(x) = \cosh x$

En los problemas 11 y 12, emplee (7) para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

**11.** $f(x) = \tan x$ **12.** $f(x) = \text{sen}^{-1} x$

En los problemas 13-24, emplee (6) para determinar la serie de Taylor de la función dada centrada en el valor indicado de $a$.

**13.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad a = 4$ **14.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1$

**15.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -5$

**17.** $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/4$ **18.** $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/2$

**19.** $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/3$ **20.** $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/6$

**21.** $f(x) = e^x, \quad a = 1$ **22.** $f(x) = e^{-2x}, \quad a = \dfrac{1}{2}$

**23.** $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ **24.** $f(x) = \ln(x + 1), \quad a = 2$

En los problemas 25-32, utilice resultados, métodos o problemas previos para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

**25.** $f(x) = e^{-x^2}$ **26.** $f(x) = x^2 e^{-3x}$

**27.** $f(x) = x \cos x$ **28.** $f(x) = \text{sen}\, x^3$

**29.** $f(x) = \ln(1 - x)$ **30.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

**31.** $f(x) = \sec^2 x$ **32.** $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas 33 y 34, emplee la serie de Maclaurin como una ayuda en la evaluación de límite indicado.

**33.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \text{sen}\, x}$ **34.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{1 - \cos x}$

En los problemas 35 y 36, use adición de series de Maclaurin para $e^x$ y $e^{-x}$ para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

**35.** $f(x) = \cosh x$ **36.** $f(x) = \text{senh}\, x$

En los problemas 37 y 38, use multiplicación para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

**37.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$ **38.** $f(x) = e^x \,\text{sen}\, x$

En los problemas 39 y 40, utilice división para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de la función dada.

**39.** $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$ **40.** $f(x) = \sec x$

En los problemas 41 y 42, establezca el valor indicado de la integral definida dada.

**41.** $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots$

**42.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$

En los problemas 43-46, encuentre la suma de la serie dada.

**43.** $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ **44.** $\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} + \cdots$

**45.** $1 - \dfrac{\pi^2}{2!} + \dfrac{\pi^4}{4!} - \dfrac{\pi^6}{6!} + \cdots$ **46.** $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \dfrac{\pi^7}{7!} + \cdots$

En los problemas 47-50, aproxime la cantidad indicada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores señalados de $n$ y $a$. Determine la exactitud de la aproximación.

**47.** sen 46°, $n = 2, a = \pi/4$ [*Sugerencia*: Convierta 46° a radianes.]

**48.** cos 29°, $n = 2, a = \pi/6$ **49.** $e^{0.3}$, $n = 4, a = 0$

**50.** senh(0.1), $n = 3, a = 0$

**51.** Demuestre que la serie obtenida en el problema 5 representa a sen $x$ para todo valor real de $x$.

**52.** Demuestre que la serie obtenida en el problema 7 representa a $e^x$ para todo valor real de $x$.

**53.** Demuestre que la serie obtenida en el problema 9 representa a senh $x$ para todo valor real de $x$.

**54.** Demuestre que la serie obtenida en el problema 10 representa cosh $x$ para todo valor real de $x$.

### ≡ Aplicaciones

**55.** Al nivelar una larga autopista de longitud $L$, debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra.

*a*) Demuestre que la corrección de nivelación $y$ indicada en la FIGURA A.10.3 es $y = R \sec(L/R) - R$, donde $R$ es el radio de la Tierra medido en millas.

*b*) Si $P_2(x)$ es el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = \sec x$ en $a = 0$, utilice $\sec x \approx P_2(x)$ para $x$ cercano a cero con el fin de demostrar que la corrección aproximada del nivelado es $y \approx L^2/(2R)$.

*c*) Encuentre el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplee $R = 4\,000$ mi.

*d*) Si se usa $\sec x \approx P_4(x)$, entonces demuestre que la corrección de nivelación es

$$y \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}.$$

Repita el cálculo en el inciso *c*) utilizando la última fórmula.

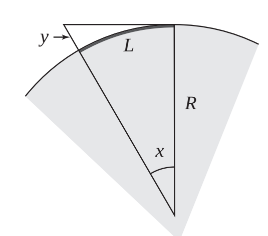



FIGURA A.10.3 La Tierra en el problema 55

**56.** Una onda de longitud $L$ viaja de izquierda a derecha a través de agua a una profundidad $d$ (en pies), como se ilustra en la FIGURA A.10.4. Un modelo matemático que relaciona la velocidad $v$ de la onda con $L$ y $d$ es

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}.$$

*a*) Para agua profunda demuestre que $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.

*b*) Utilice (7) para determinar los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando $d/L$ es pequeña, $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua poco profunda la velocidad de una onda es independiente de la longitud de la onda.

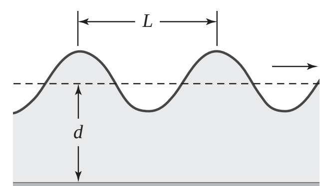



FIGURA A.10.4 Onda del problema 56

## ≡ Piense en ello

En los problemas 57 y 58, encuentre dos maneras, aparte de utilizar (7), de determinar la representación de la serie de Maclaurin de la función dada.

**57.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

**58.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

**59.** Sin utilizar (6), encuentre la serie de Taylor para la función $f(x) = (x + 1)^2 e^x$ centrada en $a = 1$. [*Sugerencia*: $e^x = e^{x+1-1}$.]

**60.** Discuta: ¿$f(x) = \cot x$ posee una representación en serie de Maclaurin?

**61.** Explique por qué resulta lógico que las series de Maclaurin (16) y (17) para cos $x$ y sen $x$ contengan sólo potencias pares de $x$ y sólo potencias impares de $x$, respectivamente. Después reinspeccione la serie de Maclaurin en (18), (19) y (20) y comente.

**62.** Suponga que se desea calcular $f^{(10)}(0)$ para $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x^2$. Desde luego, podría utilizarse el enfoque de fuerza bruta: recurrir a la regla del producto y cuando se obtenga (a la larga) la décima derivada igualar $x$ a 0. Piense en una manera más hábil de determinar el valor de esta derivada.

## ≡ Proyectos

**63. Un clásico matemático** La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

aparece en casi todo texto de cálculo. La función $f$ es continua y posee derivadas de todos los órdenes en todo valor de $x$.

*a*) Emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f$.

*b*) Emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin correspondiente a $f$. Tendrá que recurrir a la definición de la derivada para calcular $f'(0)$, $f''(0)$, … Por ejemplo,

$$f'(0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Podría ser de utilidad utilizar $t = \Delta x$ y recordar la regla de L'Hôpital. Demuestre que la serie de Maclaurin de $f$ converge para toda $x$. ¿La serie representa a la función $f$ que la generó?

# A.11 Serie del binomio

**Introducción** La mayoría de los estudiantes de matemáticas están familiarizados con la expansión binomial en los dos casos:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

En general, si $m$ es un entero positivo, entonces

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots + mx^{m-1} + x^m. \tag{1}$$

La expansión de $(1 + x)^m$ en (1) se denomina **teorema del binomio**. Utilizando la notación de sumatoria, (1) se escribe

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k, \tag{2}$$

donde el símbolo $\binom{m}{k}$ se define como

por conveniencia este término se define como 1 ↓ $\qquad$ $(m-k+1)=(m-(k-1))$ ↓

$$\binom{m}{0}=1,\quad k=0 \qquad \text{y} \qquad \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!},\quad k\geq 1.$$

Estos números se llaman **coeficientes binomiales**. Por ejemplo, cuando $m = 3$, los cuatro coeficientes binomiales son

$$\binom{3}{0}=1,\quad \binom{3}{1}=\frac{3}{1}=3,\quad \binom{3}{2}=\frac{3(3-1)}{2}=3,\quad \binom{3}{3}=\frac{3(3-1)(3-2)}{6}=1.$$

Si bien (2) tiene la apariencia de una serie, es una suma finita consistente en $m + 1$ términos que finalizan con $x^m$. En esta sección se verá que cuando (1) se extiende a potencias $m$ que no son enteros positivos, el resultado es una serie infinita.

◀ Isaac Newton fue el primero que dio en 1665 la extensión del **teorema del binomio** ($m$ un entero positivo) a la **serie del binomio** ($m$ fraccionario y números reales negativos).

**Serie del binomio** Suponga ahora que $f(x) = (1 + x)^r$, donde $r$ representa cualquier número real. De

$$\begin{aligned} f(x)&=(1+x)^r & f(0)&=1\\ f'(x)&=r(1+x)^{r-1} & f'(0)&=r\\ f''(x)&=r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0)&=r(r-1)\\ f'''(x)&=r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0)&=r(r-1)(r-2)\\ &\vdots & &\vdots\\ f^{(n)}(x)&=r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0)&=r(r-1)\cdots(r-n+1)\end{aligned}$$

advertimos que la serie de Maclaurin generada por $f$ es

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k. \qquad (3)\end{aligned}$$

La serie de potencias dada en (3) se denomina **serie del binomio**. Advierta que (3) termina sólo cuando $r$ es un entero positivo; en este caso, (3) se reduce a (1). De acuerdo con la prueba de las proporciones, la versión dada en el teorema A.7.4,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{r(r-1)\cdots(r-n+1)x^n}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|r-n|}{n+1}|x|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{r}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}}|x| = |x|\end{aligned}$$

concluimos que la serie del binomio (3) converge para $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$, esto es, para $x > 1$ o $x < -1$. La convergencia en los puntos extremos $x = \pm 1$ depende del valor de $r$.

Desde luego no es una gran sorpresa aprender que la serie (3) representa la función $f$ que la generó. Se enuncia esto como un teorema formal.

**Teorema A.11.1** Serie del binomio

Si $|x| < 1$, entonces para cualquier número real $r$,

$$(1 + x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \tag{4}$$

donde

$$\binom{r}{0} = 1,\ k = 0 \qquad \text{y} \qquad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

## EJEMPLO 1 Representación de una función mediante una serie del binomio

Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

**Solución** Reescribiendo $f$ como $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ identificamos $r = \frac{1}{2}$. Después se deduce de (4) que para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + x} &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}x^3 + \cdots \\
&\qquad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2^n n!}x^n + \cdots.
\end{aligned}$$

La última línea se escribe utilizando la notación de sumatoria como

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 3)}{2^k k!} x^k. \qquad ■$$

Suponga que la función en el ejemplo 1 ha sido $f(x) = \sqrt{4 + x}$. Para obtener la representación en serie del binomio de $f$ tendríamos que reescribir la función en la forma $(1 + x)^r$ factorizando el 4 fuera del radical, esto es,

$$f(x) = \sqrt{4 + x} = \sqrt{4}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2}.$$

Ahora es posible emplear (4) en la cual el símbolo $x$ es sustituido por $x/4$. La serie resultante convergería entonces para $|x/4| < 1$ o $|x| < 4$.

## EJEMPLO 2 Una fórmula de la física

En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve a una velocidad $v$ relativa a un observador está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5}$$

donde $m_0$ es la masa en reposo y $c$ es la velocidad de la luz.

Muchos de los resultados de la física clásica no se cumplen para partículas, tales como electrones, los cuales se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0 v^2$ sino

$$K = mc^2 - m_0 c^2. \tag{6}$$

Si identificamos $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$ en (5), tenemos $|x| < 1$, ya que ninguna partícula puede superar la velocidad de la luz. En consecuencia, (6) puede escribirse:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + x}} - m_0 c^2 \\
&= m_0 c^2\left[(1 + x)^{-1/2} - 1\right]
\end{aligned}$$

$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right) - 1\right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye el valor por } x$$

$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{v^6}{c^6}\right) + \cdots\right]. \tag{7}$$

En el mundo cotidiano donde $v$ es mucho más pequeña que $c$, son ignorables los términos más allá del primero en (7). Esto conduce al resultado clásico bien conocido

$$K \approx m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

## Σ NOTAS DESDE EL AULA

Al llegar al final de la discusión de series infinitas es probable que el lector tenga la fuerte impresión de que las series divergentes son inútiles. Nada de eso. Los matemáticos odian que algo se desperdicie. Las series divergentes se usan en una teoría conocida como *representaciones asintóticas de funciones*. Ocurre algo como lo siguiente; una serie divergente de la forma

$$a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots$$

es una **representación asintótica de la función** $f$ si

$$\lim_{n\to\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0,$$

donde $S_n(x)$ es la suma parcial $(n + 1)$ de la serie divergente. Algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen de esta manera.

## PROBLEMAS A.11

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-20.

### Fundamentos

En los problemas 1-10, recurra a (4) para determinar los primeros cuatro términos de una representación en serie de potencias de la función dada. Indique el radio de convergencia.

1. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - x}$
3. $f(x) = \sqrt{9 - x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 5x}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$
7. $f(x) = (4 + x)^{3/2}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1 + x)^5}}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{(2 + x)^2}$
10. $f(x) = x^2(1 - x^2)^{-3}$

En los problemas 11 y 12, explique por qué el error en la aproximación dada es menor que la cantidad indicada. [*Sugerencia*: Revise el teorema A.7.2.]

11. $(1 + x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3}; \quad \dfrac{1}{9}x^2, x > 0$

12. $(1 + x^2)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4; \quad \dfrac{5}{16}x^6$

13. Encuentre una representación en serie de potencias para $\operatorname{sen}^{-1} x$ utilizando
$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt.$$

14. ***a***) Demuestre que la longitud de un cuarto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ está dada por $L = aE(k)$, donde $E(k)$ es
$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$
y $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral recibe el nombre de **integral elíptica completa del segundo tipo**.
***b***) Demuestre que
$$L = a\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\frac{\pi}{4}k^2 - \frac{a}{8}\frac{3\pi}{16}k^4 - \cdots.$$

15. En la FIGURA A.11.1 un cable colgante está sostenido en los puntos $A$ y $B$ y soporta una carga distribuida uniformemente (tal como el piso de un puente). Si $y = (4d/l^2)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por
$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \cdots.$$

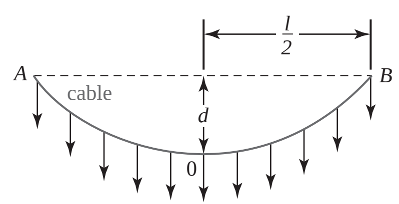



FIGURA A.11.1 Cable colgante del problema 15

**16.** Aproxime las siguientes integrales hasta tres lugares decimales.

***a***) $\int_0^{0.2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ ***b***) $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx$

**17.** Por la ley de los cosenos, el potencial en el punto $A$ en la FIGURA A.11.2 debido a una carga unitaria en el punto $B$ es $1/R = (1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$, donde $x = \cos\theta$. La expresión $(1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$ se dice que es la **función generadora** de los **polinomios de Legendre** $P_k(x)$, puesto que

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k.$$

Recurra a (4) para determinar $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

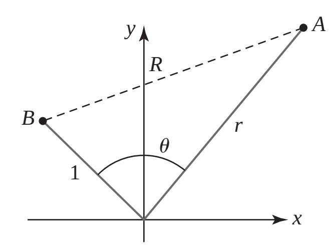



FIGURA A.11.2 Carga unitaria en el punto $B$ del problema 17

**18.** ***a***) Suponga que

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. Determine $f'(x)$ y $xf'(x)$.

***b***) Muestre que

$$(n+1)\frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

***c***) Demuestre que $f'(x) + xf'(x) = rf(x)$.

***d***) Resuelva la ecuación diferencial de primer orden

$$(1 + x)f'(x) = rf(x)$$

sujeta a $f(0) = 1$.

En los problemas 19 y 20, emplee (4) para determinar la representación en serie de potencias en $x - 1$ de la función dada. [*Sugerencia*: $1 + x = 2 + (x - 1)$.]

**19.** $f(x) = \sqrt{1+x}$

**20.** $f(x) = (1 + x)^{-2}$

# Repaso de álgebra

### Enteros

$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

### Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

### Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

### Números racionales

Un número racional es un número en la forma $p/q$, donde $p$ y $q \neq 0$ son enteros.

### Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma $p/q$, donde $p$ y $q \neq 0$ son enteros.

### Números reales

El conjunto $R$ de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

### Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

### Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; n > 0$$

### Radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \; n > 0 \text{ un entero}$$

### Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

### Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Expansiones binomiales

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

### Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a+b)^n$ siguen el patrón:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a+b)^5$.

### Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

### Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

### Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.
Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

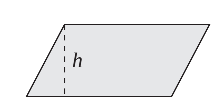
# Fórmulas de geometría

Área $A$, circunferencia $C$, volumen $V$, área superficial $S$

RECTÁNGULO

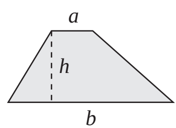
$A = lw$, $C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO

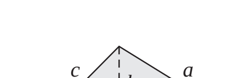


$A = bh$

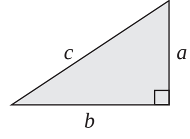
TRAPEZOIDE



$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

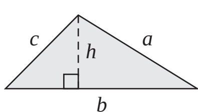


TRIÁNGULO RECTÁNGULO



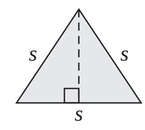
Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



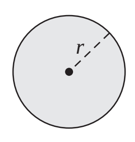
$A = \frac{1}{2}bh$, $C = a + b + c$

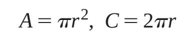
TRIÁNGULO EQUILÁTERO



$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$, $A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

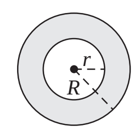
CÍRCULO





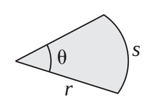
$A = \pi r^2$, $C = 2\pi r$

ANILLO CIRCULAR



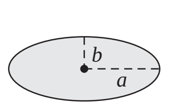
$A = \pi(R^2 - r^2)$

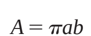
SECTOR CIRCULAR



$A = \frac{1}{2}r^2\theta$, $s = r\theta$

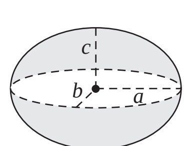
ELIPSE





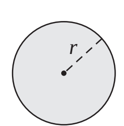
$A = \pi ab$

ELIPSOIDE



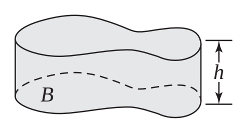
$V = \frac{4}{3}\pi abc$

ESFERA



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO

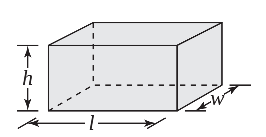



$V = Bh$, $B$, área de la base

CILINDRO CIRCULAR RECTO

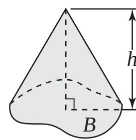
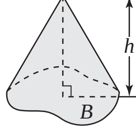
$V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h$ (lado lateral)

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR



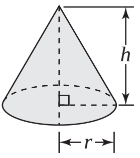
$V = lwh$, $S = 2(hl + lw + hw)$

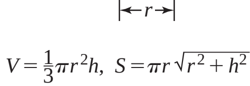
CONO


$V = \frac{1}{3}Bh$, $B$, área de la base

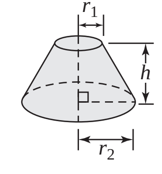
CONO CIRCULAR RECTO



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

FRUSTO DE UN CONO




$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

# Gráficas y funciones

### Para encontrar intersecciones

Intersecciones $y$: sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para $y$
Intersecciones $x$: sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para $x$

### Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $n$ es un entero no negativo.

### Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,
Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde $m$ es la pendiente.

### Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

### Vértice (*h, k*) de una parábola

Complete el cuadrado en $x$ para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

### Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje $y$
Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

### Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:
$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba $c$ unidades
$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo $c$ unidades
$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda $c$ unidades
$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha $c$ unidades
$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje $y$
$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje $x$

### Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

### Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

asíntota vertical:
$x = a$ cuando $q(a) = 0$,
asíntota horizontal:
$y = a_n/b_m$ cuando $n = m$ y $y = 0$ cuando $n < m$,
asíntota oblicua:
$y = ax + b$ cuando $n = m + 1$.

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$. Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

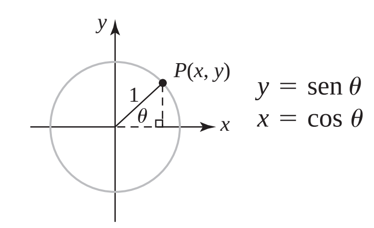
### Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde $n$ es cualquier número real.

# Revisión de trigonometría

### Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario




$y = \operatorname{sen}\theta$
$x = \cos\theta$

### Otras funciones trigonométricas

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

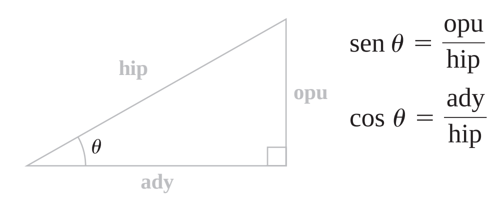
$\sec\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

### Fórmulas de conversión

1 grado $= \dfrac{\pi}{180}$ radianes

1 radián $= \dfrac{180}{\pi}$ grados

### Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto




$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{opu}}{\text{hip}}$

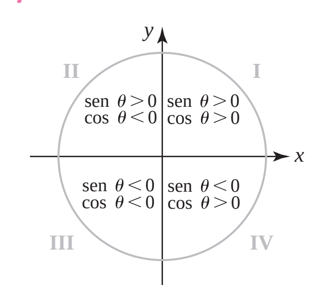
$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

### Otras funciones trigonométricas

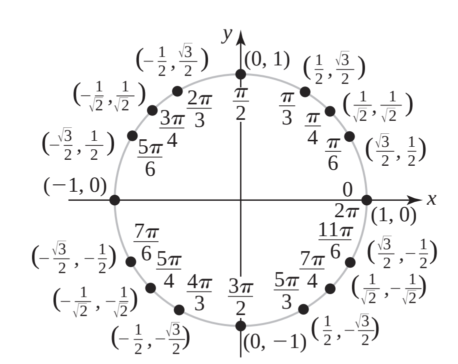
$\tan\theta = \dfrac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{opu}}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{opu}}$

### Signos de seno y coseno




### Valores de seno y coseno para ángulos especiales




### Límites para las funciones seno y coseno

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \quad$ y $\quad -1 \le \cos x \le 1$

### Periodicidad de las funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$

### Identidades de cofunción

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

### Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

### Identidades par/impar

| Par | Impar |
|---|---|
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ |
| $\sec(-x) = \sec x$ | $\csc(-x) = -\csc x$ |
| | $\tan(-x) = -\tan x$ |
| | $\cot(-x) = -\cot x$ |

## Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

## Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

## Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

## Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

## Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

## Leyes de los senos

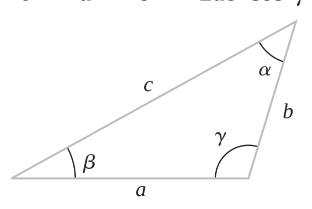
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

## Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



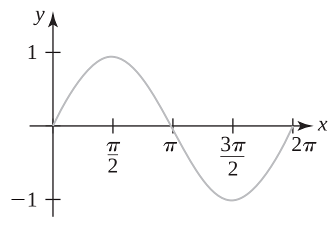

## Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y, \quad -\pi/2 \le y \le \pi/2$

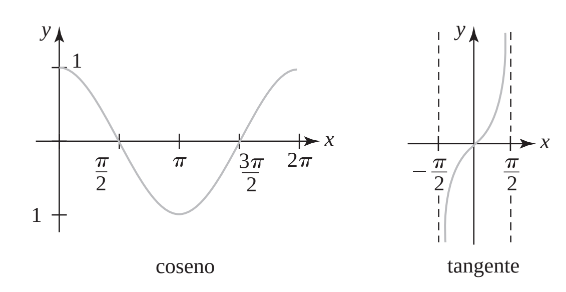
$y = \cos^{-1} x$ si y sólo si $x = \cos y, \quad 0 \le y \le \pi$

$y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$

## Ciclos para seno, coseno y tangente




seno




coseno

tangente

# Funciones exponencial y logarítmica

### El número $e$

$e = 2.718281828459...$

### Definiciones del número $e$

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$$

### Función exponencial

$f(x) = b^x,\ \ b > 0, b \neq 1$

### Función exponencial natural

$f(x) = e^x$

### Función logarítmica

$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

### Función logarítmica natural

$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

### Leyes de logaritmos

$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$\log_b M^c = c\log_b M$

### Propiedades de logaritmos

$\log_b b = 1, \qquad \log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x, \qquad b^{\log_b x} = x$

### Cambio de la base $b$ a la base $e$

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

### Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

### Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \ x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \ |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \ |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \ 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \ x \neq 0$$

### Identidades par/impar

| Par | Impar |
|---|---|
| $\cosh(-x) = \cosh x$ | $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ |

### Identidades adicionales

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

$\operatorname{senh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

# Diferenciación



## Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$
2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$
3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

## Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$
18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1 + x^2}$
19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$
20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$
22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$
23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$
30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$
31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$
36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

# Fórmulas de integración

## Formas básicas

**1.** $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

**2.** $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, n \neq -1$

**3.** $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

**4.** $\int e^u\,du = e^u + C$

**5.** $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

**6.** $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

**7.** $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

**8.** $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

**9.** $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

**10.** $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

**11.** $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

**12.** $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

**13.** $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

**14.** $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

**15.** $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

**16.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**17.** $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

**18.** $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

**19.** $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

**20.** $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

## Formas que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$

**21.** $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

**22.** $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

**23.** $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

**24.** $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

**25.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

**26.** $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

**27.** $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

**28.** $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2u} + C$

**29.** $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

## Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$

**30.** $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**31.** $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**32.** $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

**33.** $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**34.** $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**35.** $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

**36.** $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

**37.** $\displaystyle\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

**38.** $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

## Formas que implican $\sqrt{u^2 - a^2}$

**39.** $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

**40.** $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

**41.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

**42.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

**43.** $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

**44.** $\displaystyle\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

**45.** $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

**46.** $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

## Formas que implican $a + bu$

**47.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + C$

**48.** $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2-4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + C$

**49.** $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

**50.** $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

**51.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

**52.** $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

**53.** $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$

**54.** $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

**55.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

**56.** $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$

**57.** $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C,\ \text{si } a > 0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C,\ \text{si } a < 0$

**58.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

**59.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

**60.** $\displaystyle\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

**61.** $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

**62.** $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

## Formas trigonométricas

**63.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

**64.** $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

**65.** $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

**66.** $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

**67.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

**68.** $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2+\cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

**69.** $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

**70.** $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

**71.** $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

**72.** $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

**73.** $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

**74.** $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

**75.** $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

**76.** $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

**77.** $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

**78.** $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

**79.** $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

**80.** $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

**81.** $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

**82.** $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

**83.** $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

**84.** $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

**85.** $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

**86.** $$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-1} u \cos^m u\, du$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$$

**87.** $\int \frac{du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$

**88.** $\int \frac{du}{1 + \operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$

**89.** $$\int \frac{u\,du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$$

## Formas trigonométricas inversas

**90.** $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

**91.** $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

**92.** $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

**93.** $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

**94.** $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

**95.** $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

**96.** $$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$$

**97.** $$\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$$

**98.** $$\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$$

## Formas exponenciales y logarítmicas

**99.** $\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

**100.** $\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du$

**101.** $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$

**102.** $\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

**103.** $\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$

**104.** $\int \frac{1}{u \ln u}\, du = \ln|\ln u| + C$

**105.** $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

**106.** $$\int u^m \ln^n u\, du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\, du, \quad m \neq -1$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

**107.** $\int \ln(u^2+a^2)\,du = u\ln(u^2+a^2) - 2u + 2a\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

**108.** $\int \ln|u^2-a^2|\,du = u\ln|u^2-a^2| - 2u + a\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

**109.** $\int \frac{du}{a+be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}\ln|a+be^u| + C$

## Formas hiperbólicas

**110.** $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

**111.** $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

**112.** $\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + C$

**113.** $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

**114.** $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

**115.** $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln|\tanh\tfrac{1}{2}u| + C$

**116.** $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

**117.** $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

**118.** $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

**119.** $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

## Formas que implican $\sqrt{2au-u^2}$

**120.** $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**121.** $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**122.** $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**123.** $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**124.** $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**125.** $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**126.** $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

**127.** $\int \frac{du}{u\sqrt{2ua-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

## Algunas integrales definidas

**128.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

**129.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

# Respuestas a la evaluación diagnóstica



## Evaluación diagnóstica, página xv

**1.** falso **2.** verdadero

**3.** falso **4.** verdadero

**5.** 12 **6.** $-243$

**7.** $\dfrac{3x^3 + 8x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ **8.** $2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

**9.** ***a***) 0, 7 ***b***) $-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$
***c***) 1 ***d***) 1

**10.** ***a***) $(5x + 1)(2x - 3)$ ***b***) $x^2(x + 3)(x - 5)$
***c***) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ ***d***) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

**11.** falso **12.** falso

**13.** verdadero **14.** 6; $-6$

**15.** $-a + 5$

**16.** ***a***), ***b***), ***d***), ***e***), ***g***), ***h***), ***i***), ***l***)

**17.** *i*) ***d***); *ii*) ***c***), *iii*) ***a***); *iv*) ***b***)

**18.** ***a***) $-2 < x < 2$; ***b***) $|x| < 2$

**19.** (recta numérica: $-1$ ] … [ $3$) **20.** $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$

**21.** $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ **22.** $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$

**23.** cuarto **24.** $(5, -7)$

**25.** $-12$; 9

**26.** ***a***) $(1, -5)$ ***b***) $(-1, 5)$ ***c***) $(-1, -5)$

**27.** $(-2, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 4)$ **28.** segundo y cuarto

**29.** $x = 6$ o $x = -4$ **30.** $x^2 + y^2 = 25$

**31.** $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$

**32.** ***c***) **33.** falso

**34.** $-27$ **35.** 8

**36.** $\frac{2}{3}$; $(-9, 0)$; $(0, 6)$ **37.** $y = -5x + 3$

**38.** $y = 2x - 14$ **39.** $y = -\frac{1}{3}x + 3$

**40.** $y = -\frac{5}{8}x$ **41.** $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$

**42.** *i*) ***g***); *ii*) ***e***); *iii*) ***h***); *iv*) ***a***); *v*) ***b***); *vi*) ***f***);
*vii*) ***d***); *viii*) ***c***)

**43.** falso **44.** falso

**45.** $4\pi/3$ **46.** 15

**47.** 0.23 **48.** $\cos t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

**49.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $\sec\theta = \frac{5}{4}$;
$\csc\theta = \frac{5}{3}$

**50.** $b = 10\tan\theta$, $c = 10\sec\theta$ **51.** $k = 10\ln 5$

**52.** $4 = 64^{1/3}$ **53.** $\log_b 125$

**54.** aproximadamente 2.3347 **55.** 1 000

**56.** verdadero

# Respuestas de los problemas impares

## Problemas 1.4

**1.** Demostración

**3.** 5.25

**5.** $-0.\overline{2352941176470588}$

**7.** 1.23

**9.** 0.05

**11.** $3141615/10^6$

**13.** 23/90

**15.** $571\,715/10^5$

**17.** 134/9 990

**19.** 123/999

**21.** 4 018/999

**23.** Demostración.

**25.** Demostración.

**27.** Demostración.

**29.** Demostración.

**31.** Demostración.

**33.** Irracional.

**35.** Irracional.

**37.** Irracional.

**39.** Demostración.

**41.** Demostración.

**43.** Demostración.

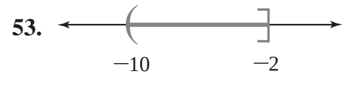
**45.** Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces no hay un ínfimo y .5 es el supremo.

**47.** Si $A \subset \mathbb{Q}$, entonces no hay ínfimo ni supremo.

**49.** Considerando que $A \subset \mathbb{Z}$, el ínfimo es 1 y no hay supremo.

**51.** Si $A \subset \mathbb{Z}$ entonces el ínfimo es el 0 y el supremo 2.

**53.**




**55.**

−2 14

**57.**

0

**59.**

−9

**61.** $(-\infty, 10]$

**63.** $(-3, 3)$

**65.** $(-4, 1)$

**67.** $\mathbb{R}$

**69.** $(-\infty, -1] \cup [8, \infty)$

**71.** $(-3, 2)$

## Problemas 1.5

**1.** Demostración.

**3.** $(-\infty, \frac{5}{3})$

**5.** $(-8, \infty)$

**7.** $[-\frac{1}{5}, \infty)$

**9.** $(-2, 0)$

**11.** $(\frac{2}{3}, 1]$

**13.** $(-\frac{9}{5}, \infty)$

**15.** $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

**17.** $(-\infty, -4] \cup [9, \infty)$

**19.** $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

**21.** $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

**23.** $(-6, 0)$

**25.** $(-\infty, -3) \cup (-2, -1)$

**27.** $(-\frac{\sqrt{37}}{6} - \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{37}}{6} - \frac{5}{6})$

**29.** $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$

**31.** $(6, 9)$

**33.** $(-\frac{116}{9}, -12)$

**35.** $[\frac{2}{3}, 3)$

**37.** $[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0) \cup [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$

**39.** $(0, \frac{4}{3}] \cup (2, \infty)$

**41.** $(-\infty, -4) \cup [5 - \sqrt{65}, 0) \cup [5 + \sqrt{65}, \infty)$

**43.** $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (4, \infty)$

**45.** $(-1, 4)$

**47.** $(-\infty, 1) \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

**49.** $(4 - \sqrt{7}, 2) \cup [3, 4 + \sqrt{7})$

**51.** $(-\infty, -1) \cup (-\frac{2}{7}, \infty)$

**53.** $(-\infty, -5) \cup (15, \infty)$

**55.** $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

**57.** $(-\infty, 5]$

**59.** $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$

**61.** $(-\infty, -\frac{3}{7}) \cup (1, \infty)$

**63.** $(-\infty, -\frac{1}{2})$

**65.** $[-\frac{11}{4}, \frac{5}{4}]$

**67.** Demostración.

**69.** Demostración.

**71.** Demostración.

## Problemas 2.1

**1.** 24; 2; 8; 35,

**3.** 0; 1; 2; $\sqrt{6}$

**5.** $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}$

**7.** $-2x^2 + 3x$; $-8a^2 + 6a$; $-2a^4 + 3a^2$; $-50x^2 - 15x$; $-8a^2 - 2a + 1$; $-2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$

**9.** $-2, 2$

**11.** $[\frac{1}{2}, \infty)$

**13.** $(-\infty, 1)$

**15.** $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$

**17.** $\{x | x \neq 5\}$

**19.** $(-\infty, \infty)$

**21.** $[-5, 5]$

**23.** $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$

**25.** $(-2, 3]$

**27.** no es una función

**29.** función

**31.** dominio: $[-4, 4]$; rango: $[0, 5]$

**33.** dominio: $[1, 9]$; rango: $[1, 6]$

**35.** $(8, 0), (0, -4)$

**37.** $(\frac{3}{2}, 0), (\frac{5}{2}, 0), (0, 15)$

**39.** $(-1, 0), (2, 0), (0, 0)$

**41.** $(0, -\frac{1}{4})$

**43.** $(-2, 0), (2, 0), (0, 3)$

**45.** 0; $-3.4$; 0.3; 2; 3.8; 2.9; (0, 2)

**47.** 3.6; 2; 3.3; 4.1; 2; $-4.1$; $(-3.2, 0), (2.3, 0), (3.8, 0)$

**49.** $f_1(x) = \sqrt{x+5}, f_2(x) = -\sqrt{x+5}$; $[-5, \infty)$

**51.** ***a***) 2; 6; 120; 5 040 ***c***) 5; 42
***d***) $(n+1)(n+2)(n+3)$

## Problemas 2.2

**1.** $-2x + 13$; $6x - 3$; $-8x^2 - 4x + 40$; $\dfrac{2x+5}{-4x+8}, x \neq 2$

**3.** $\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}$; $\dfrac{x^2-x-1}{x(x+1)}$; $\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{x^2}{x+1}, x \neq 0, x \neq -1$

**5.** $2x^2 + 5x - 7$; $-x + 1$; $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$;
$\dfrac{x+3}{x+4}, x \neq 1, x \neq -4$

**7.** el intervalo $[1, 2]$

**9.** el intervalo $[1, 2)$

**11.** $3x + 16$; $3x + 4$

**13.** $x^6 + 2x^5 + x^4$; $x^6 + x^4$

**15.** $\dfrac{3x+3}{x}$; $\dfrac{3}{3+x}$

**17.** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

**19.** $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

**21.** $128x^9$; $\dfrac{1}{4x^9}$

**23.** $36x^2 - 36x + 15$

**25.** $-2x + 9$

**27.** $f(x) = 2x^2 - x, g(x) = x^2$

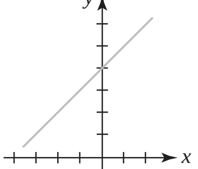
**29.** $(-2, 3), (3, -2)$

**31.** $(-8, 1), (-3, -4)$

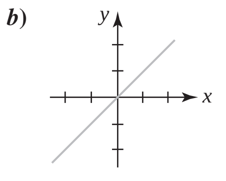
**33.** $(-6, 2), (-1, -3)$

**35.** $(2, 1), (-3, -4)$

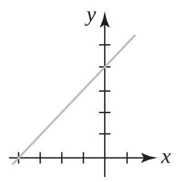
**37.** ***a***)



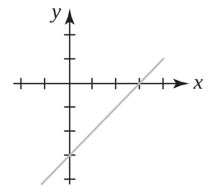

***b***)



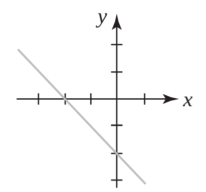

***c***)



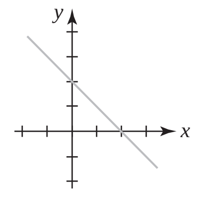

***d***)



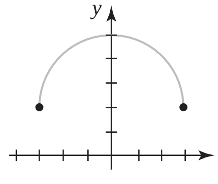

***e***)



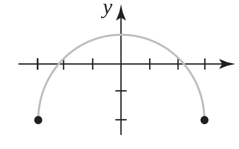

***f***)



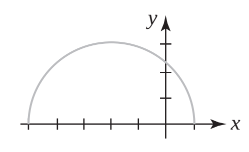

**39.** ***a***)



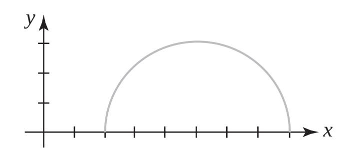

***b***)



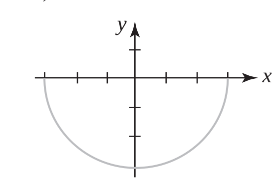

***c***)



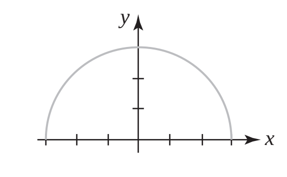

***d***)



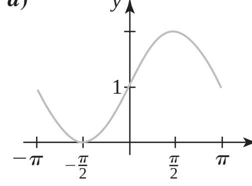

***e***)



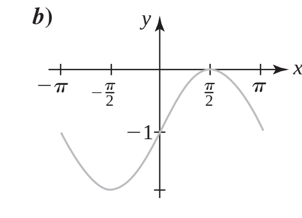

***f***)



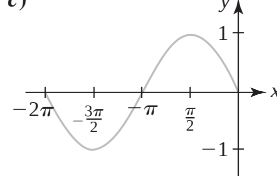

**41.** ***a***)



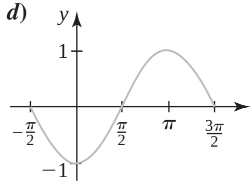

***b***)



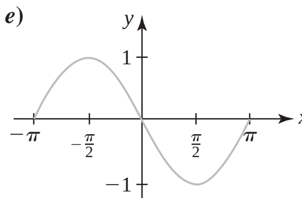

***c***)



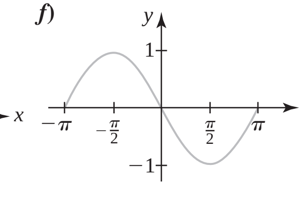

***d***)



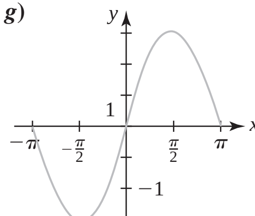

***e***)



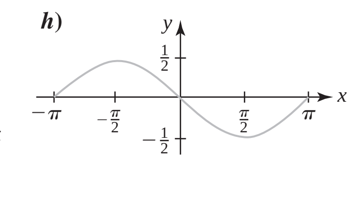

***f***)




***g***)



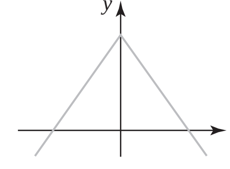

***h***)




**43.** $y = (x - 1)^3 + 5$

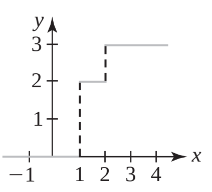
**45.** $y = -(x + 7)^4$

**47.**



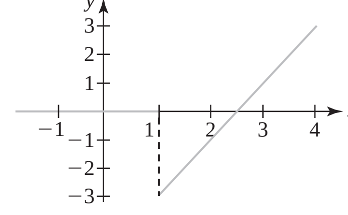

**49.** 10, 8, $-1$, 2, 0

**51.**




**53.** $y = 2 - 3U(x - 2) + U(x - 3)$

**55.**



## Problemas 2.3

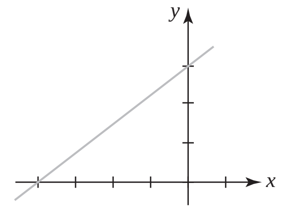
**1.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

**3.** $y = 2$

**5.** $y = -x + 3$

**7.** $\frac{3}{4}$; $(-4, 0), (0, 3)$;

**9.** $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{9}{2}, 0\right), (0, -3)$;




**11.** $y = -2x + 7$

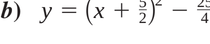
**13.** $y = -3x - 2$

**15.** $y = -4x + 11$

**17.** $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

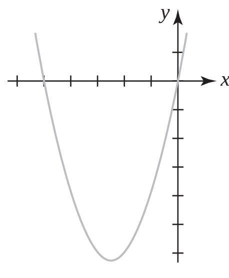
**19.** $y = x + 3$

**21.** ***a***) $(0, 0), (-5, 0)$

***b***)  $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

***c***) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; $x = -\frac{5}{2}$

***d***)




***e***) $\left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$

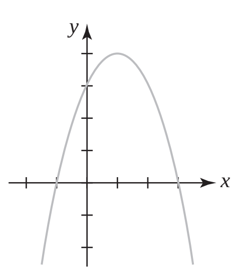
***f***) $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$; $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

**23.** ***a***) $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$

***b***) $y = -(x - 1)^2 + 4$

***c***) $(1, 4)$; $x = 1$

***d***)




***e***) $(-\infty, 4]$

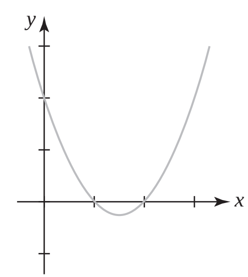
***f***) $(-\infty, 1]$; $[1, \infty)$

**25.** ***a***) $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$

***b***) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

***c***) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; $x = \frac{3}{2}$

***d***)




***e***) $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$

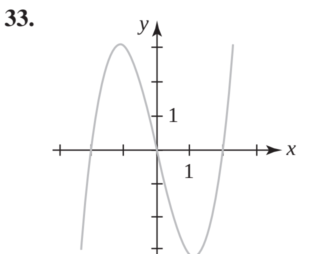
***f***) $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

**27.** La gráfica se desplazó de manera horizontal 10 unidades a la derecha

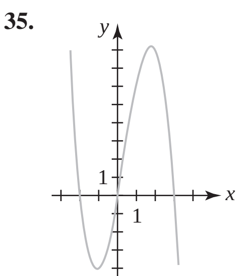
**29.** La gráfica se comprime de manera vertical, luego hay una reflexión sobre el eje $x$, después un desplazamiento horizontal de 4 unidades hacia la izquierda y finalmente un desplazamiento vertical de 9 unidades hacia arriba

**31.** La gráfica se desplazó de manera horizontal 6 unidades a la izquierda, después hay un desplazamiento vertical de 4 unidades hacia abajo

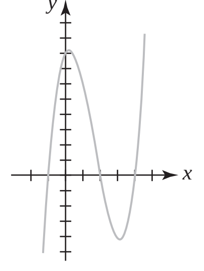
**33.**



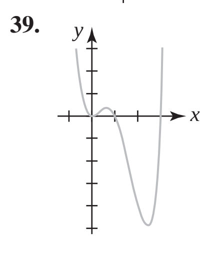

**35.**



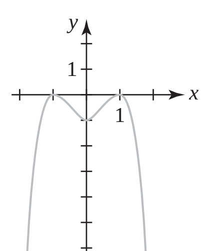

**37.**




**39.**




**41.**

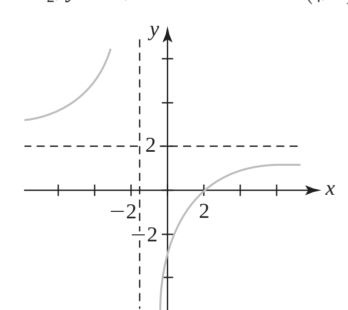



**43.** ***f***)

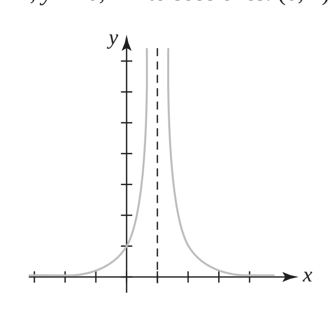
**45.** ***e***)

**47.** ***b***)

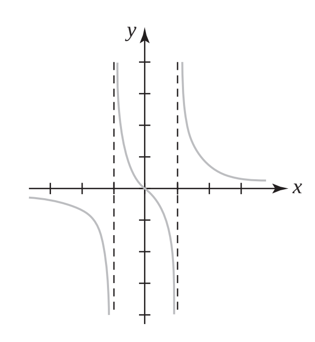
**49.** asíntotas: $x = -\frac{3}{2}, y = 2$; intersecciones: $\left(\frac{9}{4}, 0\right), (0, -3)$;



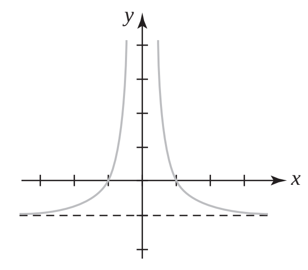

**51.** asíntotas: $x = 1, y = 0$; intersecciones: $(0, 1)$;



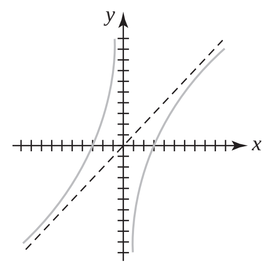
**53.** asíntotas: $x = -1, x = 1, y = 0$; intersecciones: $(0, 0)$;



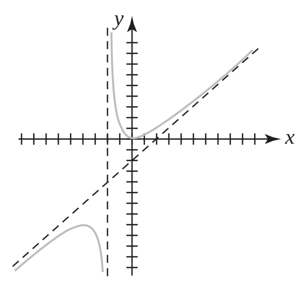

**55.** asíntotas: $x = 0, y = -1$; intersecciones: $(-1, 0), (1, 0)$;



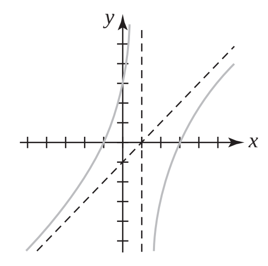

**57.** asíntotas: $x = 0, y = x$; intersecciones: $(-3, 0), (3, 0)$;




**59.** asíntotas: $x = -2, y = x - 2$; intersecciones: $(0, 0)$;




**61.** asíntotas: $x = 1, y = x - 1$;
intersecciones: $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$;

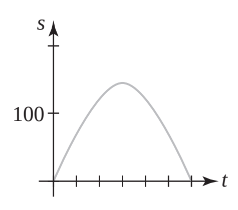



**63.** $-1$ está dentro del rango de $f$, pero 2 no está en el rango de $f$

**65.** $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

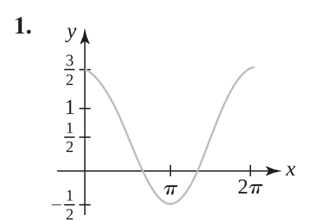
**67.** 1 680; 35.3 años aproximadamente

**69.** $t = 0$ y $t = 6$;

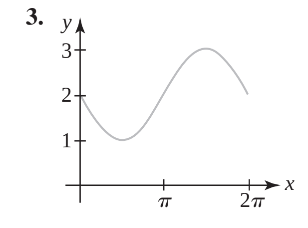



## Problemas 2.4

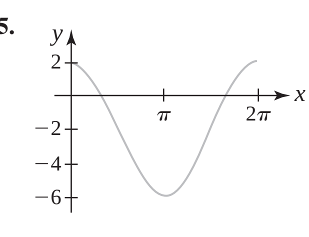
**1.**



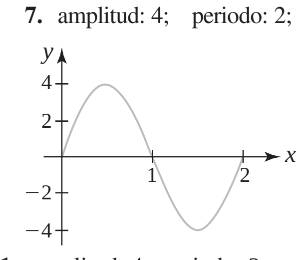

**3.**



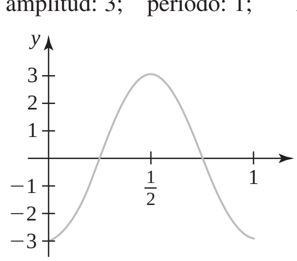

**5.**



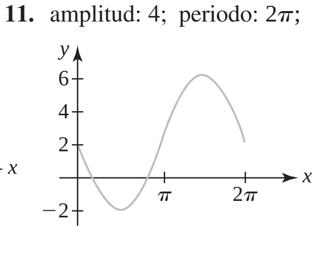

**7.** amplitud: 4; periodo: 2;



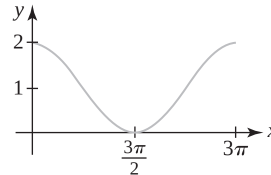

**9.** amplitud: 3; periodo: 1;




**11.** amplitud: 4; periodo: $2\pi$;




**13.** amplitud: 1; periodo: $3\pi$;




**15.** $y = -3 \text{ sen } x$

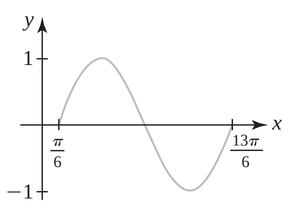
**17.** $y = 1 - 3 \cos x$

**19.** $y = 3 \text{ sen } 2x$

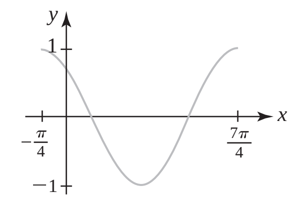
**21.** $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$

**23.** $y = -\text{sen } \pi x$

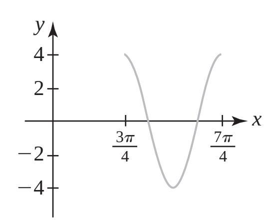
**25.** amplitud: 1; periodo: $2\pi$; desfasamiento: $\pi/6$;



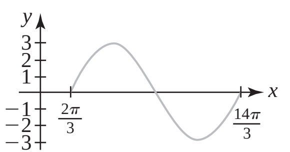

**27.** amplitud: 1; periodo: $2\pi$; desfasamiento: $\pi/4$;



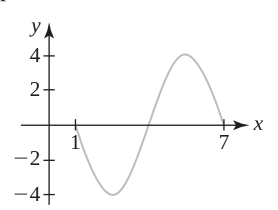
**29.** amplitud: 4; periodo: $\pi$; desfasamiento: $3\pi/4$;




**31.** amplitud: 3; periodo: $4\pi$; desfasamiento: $2\pi/3$;




**33.** amplitud: 4; periodo: 6; desfasamiento: 1;




**35.** $y = 5\,\text{sen}\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

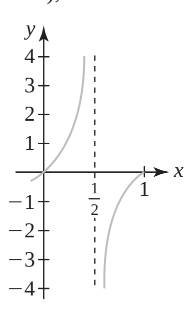
**37.** $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde $n$ es un entero

**39.** $(n, 0)$, donde $n$ es un entero

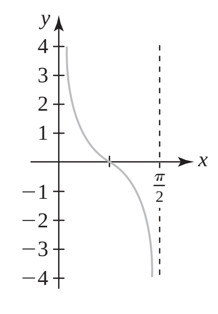
**41.** $((2n + 1)\pi, 0)$, donde $n$ es un entero

**43.** $(\pi/4 + n\pi, 0)$, donde $n$ es un entero

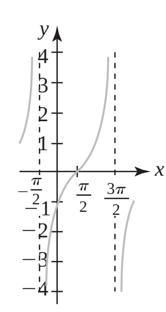
**45.** periodo: 1; intersecciones $x$: $(n, 0)$, donde $n$ es un entero; asíntotas: $x = \frac{1}{2}(2n + 1)$, donde $n$ es un entero;



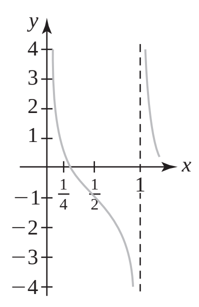

**47.** periodo: $\dfrac{\pi}{2}$; intersecciones $x$: $\left(\frac{1}{4}(2n + 1)\pi, 0\right)$, donde $n$ es un entero; asíntotas: $x = n\pi/2$, donde $n$ es un entero;



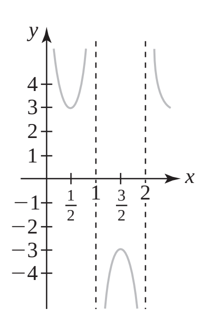

**49.** periodo: $2\pi$; intersecciones $x$: $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde $n$ es un entero; asíntotas: $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, donde $n$ es un entero;



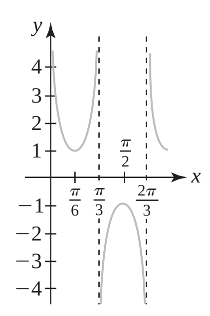

**51.** periodo: 1; intersecciones $x$: $\left(\frac{1}{4} + n, 0\right)$, donde $n$ es un entero; asíntotas: $x = n$, donde $n$ es un entero;




**53.** periodo: 2; asíntotas: $x = n$, donde $n$ es un entero;




**55.** periodo: $2\pi/3$; asíntotas: $x = n\pi/3$, donde $n$ es un entero;




**57.**

**59.** ***a)*** 978.0309 $\text{cm/s}^2$ ***b)*** 983.21642 $\text{cm/s}^2$
***c)*** 980.61796 $\text{cm/s}^2$

## Problemas 2.5

**1.** porque $f(0) = 1$ y $f(5) = 1$

**3.** no es uno a uno

**5.** uno a uno

**7.** uno a uno

**9.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-7}{3}}$

**11.** $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$

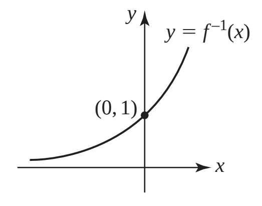
**15.** dominio: $[0, \infty)$; rango: $[-2, \infty)$

**17.** dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

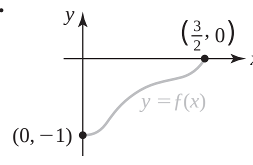
**19.** $(20, 2)$

**21.** $x = 12$

**23.**




**25.**




**27.** $f(x) = (5-2x)^2,\ x \geq \frac{5}{2}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{x})$

**29.** $f(x) = x^2 + 2x + 4,\ x \geq -1$; $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$

**33.** $3\pi/4$

**35.** $\pi/4$

**37.** $3\pi/4$

**39.** $-\pi/3$

**41.** $\dfrac{4}{5}$

**43.** $2$

**45.** $4\sqrt{2}/9$

**47.** $\sqrt{3}(2 + \sqrt{10})/9$

**49.** $\sqrt{1-x^2}$

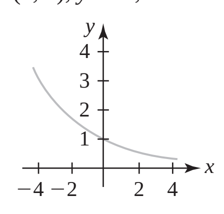
**51.** $\sqrt{1+x^2}$

**57.** $\cos t = \sqrt{5}/5$, $\tan t = -2$, $\cot t = -\dfrac{1}{2}$, $\sec t = \sqrt{5}$, $\csc t = -\sqrt{5}/2$

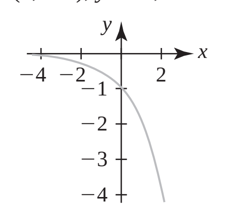
**63.** ***a***) $\pi/4$ ***b***) 0.942 radianes $\approx 53.97°$

## Problemas 2.6

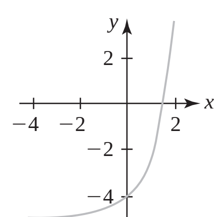
**1.** $(0, 1)$; $y = 0$;




**3.** $(0, -1)$; $y = 0$;




**5.** $(0, -4)$; $y = -5$;



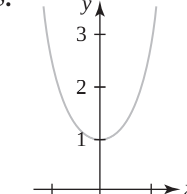
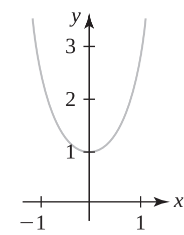

**7.** $f(x) = 6^x$

**9.** $f(x) = e^{-2x}$

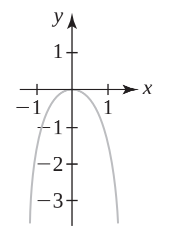
**11.** $x > 4$

**13.** $x < 2$

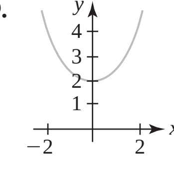
**15.**

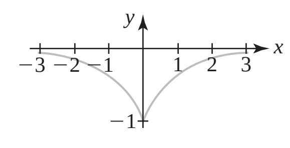

**17.**




**19.**




**21.**




**23.** $-\dfrac{1}{2} = \log_4 \dfrac{1}{2}$

**25.** $4 = \log_{10} 10\,000$

**27.** $2^7 = 128$

**29.** $(\sqrt{3})^8 = 81$

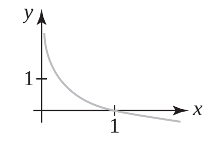
**31.** $f(x) = \log_7 x$

**33.** $e$

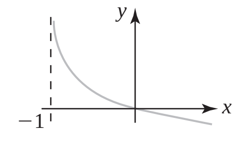
**35.** $36$

**37.** $\dfrac{1}{7}$

**39.** $(0, \infty)$; $(1, 0)$; $x = 0$;

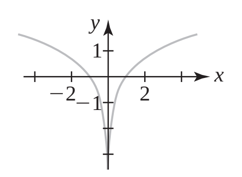



**41.** $(-1, \infty)$; $(0, 0)$; $x = -1$;




**43.** el intervalo $(-3, 3)$

**45.** $(-1, 0)$, $(1, 0)$; $x = 0$;




**47.** $\ln(x^2 - 2)$

**49.** $0$

**51.** $10 \ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 5) - \dfrac{1}{3}\ln(8x^3 + 2)$

**53.** $5 \ln(x^3 - 3) + 8 \ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \dfrac{1}{2}\ln x - 9 \ln(7x + 5)$

**55.** $\log_6 51 = \dfrac{\ln 51}{\ln 6} \approx 2.1944$

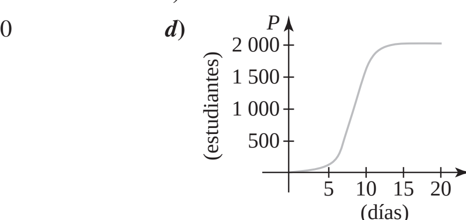
**57.** $-5 + \dfrac{\ln 9}{\ln 2} \approx 1.8301$

**59.** $\dfrac{1 + \ln 2}{-1 + \ln 5} \approx 2.7782$

**61.** $3$

**63.** ***a***) $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$ ***b***) $5.66P_0$ ***c***) 8.64 h

**65.** ***a***) 82 ***b***) 8.53 días
***c***) 2 000 ***d***)



RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES, UNIDAD 3

## Problemas 2.7

**1.** $S(x) = x + \frac{50}{x}$; $(0, \infty)$

**3.** $S(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $[0, 1]$

**5.** $A(x) = 100x - x^2$; $[0, 100]$

**7.** $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$; $[0, 4]$

**9.** $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}$; $(-\infty, \infty)$

**11.** $P(A) = 4\sqrt{A}$; $(0, \infty)$

**13.** $d(C) = C/\pi$; $(0, \infty)$

**15.** $A(h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2$; $(0, \infty)$

**17.** $A(x) = \frac{1}{4\pi}x^2$; $(0, \infty)$

**19.** $C(x) = 8x + \frac{3\,200}{x}$; $(0, \infty)$

**21.** $S(w) = 3w^2 + \frac{1\,200}{w}$; $(0, \infty)$

**23.** $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}$; $(0, \infty)$

**25.** $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \le h < 5 \\ 1\,200h - 3\,000, & 5 \le h \le 8 \end{cases}$; $[0, 8]$

**27.** $h(\theta) = 300 \tan \theta$; $(0, \pi/2)$

**29.** $L(\theta) = 3 \csc \theta + 4 \sec \theta$; $(0, \pi/2)$

**31.** $\theta(x) = \tan^{-1}(1/x) - \tan^{-1}(1/2x)$; $(0, \infty)$

## Competencia final de la unidad 2

**A. 1.** falso **3.** verdadero
**5.** falso **7.** verdadero
**9.** falso **11.** verdadero
**13.** verdadero **15.** verdadero
**17.** verdadero **19.** verdadero

**B. 1.** $[-2, 0) \cup (0, \infty)$ **3.** $(-8, 6)$
**5.** $(1, 0)$; $(0, 0), (5, 0)$ **7.** $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$
**9.** 6 **11.** 0
**13.** $(3, 5)$ **15.** $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$
**17.** $\frac{1}{9}$ **19.** $y = \ln x$

**C. 1.** ***a)*** 3 ***b)*** 0 ***c)*** $-2$ ***d)*** 0 ***e)*** 2.5 ***f)*** 2 ***g)*** 1 ***h)*** 0 ***i)*** 3 ***j)*** 4

**3.** 1 y 8 están en el rango; 5 no está en el rango

**5.** $-3x^2 + 4x - 3xh - h^2 + 2h - 1$

**7.** ***f)*** **9.** ***d)***
**11.** ***h)*** **13.** ***c)***
**15.** ***b)*** **17.** $\frac{3^{1-h} - 3}{h}$

**19.** ***a)*** $ab$ ***b)*** $b/a$ ***c)*** $1/b$

**21.** $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6}\ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$ **23.** $f(x) = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

**25.** ***b)*** **27.** ***d)***

**29.** ***c)***

**31.** ***a)*** $V = 6l^3$ ***b)*** $V = \frac{2}{9}w^3$ ***c)*** $V = \frac{3}{4}h^3$

**33.** $V(\theta) = 360 + 75 \cot \theta$

**35.** $A(\phi) = 100 \cos \phi + 50 \operatorname{sen} 2\phi$ **37.** $V(x) = 2\sqrt{3}(1 - x^2)$

## Problemas 3.1

**1.** 8 **3.** no existe
**5.** 2 **7.** no existe
**9.** 0 **11.** 3
**13.** 0

**15.** ***a)*** 1 ***b)*** $-1$ ***c)*** 2 ***d)*** no existe

**17.** ***a)*** 2 ***b)*** $-1$ ***c)*** $-1$ ***d)*** $-1$

**19.** correcto **21.** $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

**23.** $\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$ **25.** correcto

**27.** $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$

**29.** ***a)*** $-1$ ***b)*** 0 ***c)*** $-3$ ***d)*** $-2$ ***e)*** 0 ***f)*** 1

**35.** no existe **37.** $-\frac{1}{4}$
**39.** $-2$ **41.** $-3$
**43.** 0 **45.** $\frac{1}{3}$
**47.** $\frac{1}{4}$ **49.** 5

## Problemas 3.2

**1.** 15 **3.** $-12$
**5.** 4 **7.** 4
**9.** $-\frac{8}{5}$ **11.** 14
**13.** $\frac{28}{9}$ **15.** $-1$
**17.** $\sqrt{7}$ **19.** no existe
**21.** $-10$ **23.** 3
**25.** 60 **27.** 14
**29.** $\frac{1}{5}$ **31.** $-\frac{1}{8}$
**33.** 3 **35.** no existe
**37.** 2 **39.** $\frac{128}{3}$
**41.** $-2$ **43.** $a^2 - 2ab + b^2$
**45.** 16 **47.** $-1/x^2$
**49.** $\frac{1}{2}$ **51.** $\frac{1}{5}$
**53.** 32 **55.** $\frac{1}{2}$
**57.** no existe **59.** $8a$

## Problemas 3.3

**1.** ninguno **3.** 3 y 6
**5.** $n\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **7.** 2

**9.** ninguno  **11.** $e^{-2}$

**13.** ***a***) continua  ***b***) continua

**15.** ***a***) continua  ***b***) continua

**17.** ***a***) no continua  ***b***) no continua

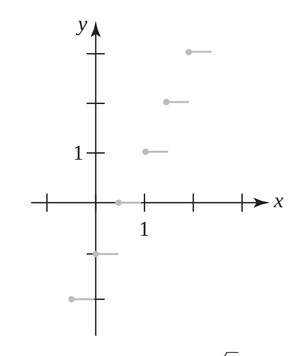
**19.** ***a***) continua  ***b***) no continua

**21.** ***a***) no continua  ***b***) no continua

**23.** ***a***) no continua  ***b***) continua

**25.** $m = 4$  **27.** $m = 1; n = 3$

**29.** discontinua en $n/2$, donde $n$ es un entero;




**31.** defina $f(9) = 6$  **33.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**35.** 0  **37.** 1

**39.** 1  **41.** $-\pi/6$

**43.** $(-3, \infty)$  **45.** $c = 4$

**47.** $c = 0, c = \pm\sqrt{2}$  **55.** $-1.22, -0.64, 1.34$

**57.** 2.21  **59.** 0.78

## Problemas 3.4

**1.** $\frac{3}{2}$  **3.** 0

**5.** 1  **7.** 4

**9.** 0  **11.** 36

**13.** $\frac{1}{2}$  **15.** no existe

**17.** 3  **19.** $\frac{3}{7}$

**21.** 0  **23.** $-4$

**25.** 4  **27.** $\frac{1}{2}$

**29.** 5  **31.** $\frac{1}{6}$

**33.** 8  **35.** $\sqrt{2}$

**37.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$  **43.** 3

## Problemas 3.5

**1.** $-\infty$  **3.** $\infty$

**5.** $\infty$  **7.** $\infty$

**9.** $\frac{1}{4}$  **11.** 5

**13.** $-\frac{1}{4}$  **15.** $\frac{5}{2}$

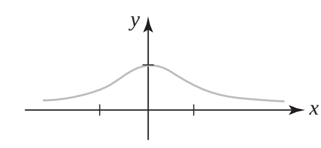
**17.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$  **19.** 0

**21.** 1  **23.** $-\pi/6$

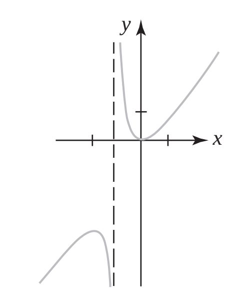
**25.** $-4; 4$  **27.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}$

**29.** $-1; 1$  **31.** $-1; 1$

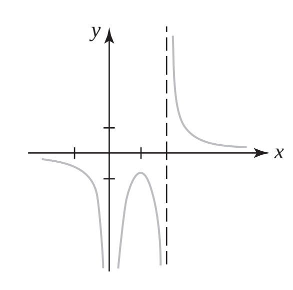
**33.** AV: ninguna;  AH: $y = 0$;



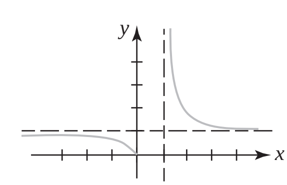

**35.** AV: $x = -1$;  AH: ninguna;



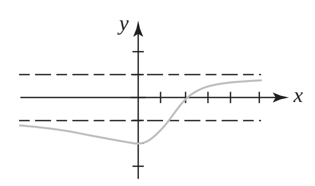

**37.** AV: $x = 0, x = 2$;  AH: $y = 0$;




**39.** AV: $x = 1$;  AH: $y = 1$;




**41.** AV: ninguna;  AH: $y = -1, y = 1$;




**43.** ***a***) 2  ***b***) $-\infty$  ***c***) 0  ***d***) 2

**45.** ***a***) $-\infty$  ***b***) $-1$  ***c***) $\infty$  ***d***) 0

**51.** 3

## Problemas 3.6

**1.** elija $\delta = \varepsilon$  **3.** elija $\delta = \varepsilon$

**5.** elija $\delta = \varepsilon$  **7.** elija $\delta = \varepsilon/3$

**9.** elija $\delta = 2\varepsilon$  **11.** elija $\delta = \varepsilon$

**13.** elija $\delta = \varepsilon/8$  **15.** elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

**17.** elija $\delta = \varepsilon^2/5$ **19.** elija $\delta = \varepsilon/2$
**21.** elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ **23.** elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$
**25.** elija $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ **31.** elija $N = 7/(4\varepsilon)$
**33.** elija $N = -30/\varepsilon$

## Competencia final de la unidad 3

**A. 1.** verdadero **3.** falso
**5.** falso **7.** verdadero
**9.** falso **11.** falso
**13.** verdadero **15.** verdadero
**17.** falso **19.** verdadero
**21.** falso

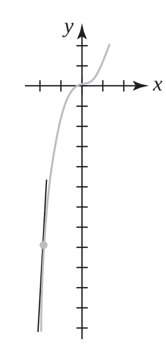
**B. 1.** 4 **3.** $-\frac{1}{5}$
**5.** 0 **7.** $\infty$
**9.** 1 **11.** $3^-$
**13.** $-\infty$ **15.** $-2$
**17.** 10 **19.** continua
**21.** 9

**C. 5.** ***a***), ***e***), ***f***), ***h***) **7.** ***c***), ***h***)
**9.** ***b***), ***c***), ***d***), ***e***), ***f***)
**11.** ; continua en todas partes
**13.** $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$
**15.** $(-\infty, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, \infty)$
**17.** $\frac{1}{6}$

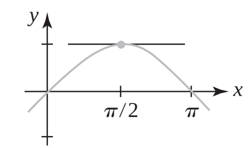
## Problemas 4.1

**1.** $-4.5$;

**3.** 7;




**5.** $\frac{3\sqrt{3}-6}{\pi}$;

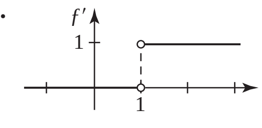



**7.** $m_{\tan} = 6$; $y = 6x - 15$

**9.** $m_{\tan} = -1$; $y = -x - 1$
**11.** $m_{\tan} = -23$; $y = -23x + 32$
**13.** $m_{\tan} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x - 1$
**15.** $m_{\tan} = 2$; $y = 2x + 1$
**17.** $m_{\tan} = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}x + 1$
**19.** $m_{\tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}$
**21.** no una recta tangente **23.** $y = x - 2$; $(0, -2)$
**25.** $m_{\tan} = -2x + 6$; $(3, 10)$
**27.** $m_{\tan} = 3x^2 - 3$; $(-1, 2), (1, -2)$
**29.** 58 mi/h **31.** 3.8 h
**33.** $-14$
**35.** ***a***) $-4.9$ m/s ***b***) 5 s ***c***) $-49$ m/s
**37.** ***a***) 448 pies; 960 pies; 1 008 pies; 960 pies
***b***) 144 pies/s ***d***) 16 s ***e***) $-32t + 256$
***f***) $-256$ pies/s ***g***) 1 024 pies

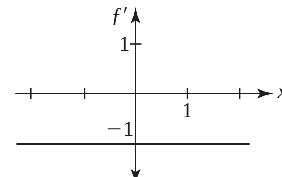
## Problemas 4.2

**1.** 0 **3.** $-3$
**5.** $6x$ **7.** $-2x + 4$
**9.** $2x + 2$ **11.** $3x^2 + 1$
**13.** $-3x^2 + 30x - 1$ **15.** $-2/(x + 1)^2$
**17.** $5/(x + 4)^2$ **19.** $-1/(2x^{3/2})$
**21.** $y = -x - 4$ **23.** $y = 2x - 2$
**25.** $(-4, -6)$ **27.** $(1, -2), (-1, 2)$
**29.** $x$; $\left(3, \frac{7}{2}\right)$ **31.** $-3x^2$; $(2, -4), (-2, 12)$
**33.** $f'_+(2) = 2$ pero $f'_-(2) = -1$ **35.** $20a$
**37.** $3a^2 - 8a$ **39.** $4/(3 - a)^2$
**41.** $y = \frac{1}{2}x + 3$; $f(-3) = \frac{3}{2}$; $f'(-3) = \frac{1}{2}$
**43.**




**45.**

**47.**




**49.** ***e***)
**51.** ***b***) **53.** ***a***)

## Problemas 4.3

**1.** 0 **3.** $9x^8$
**5.** $14x - 4$ **7.** $2x^{-1/2} + 4x^{-5/3}$
**9.** $x^4 - 12x^3 + 18x$ **11.** $20x^4 - 20x^3 - 18x^2$
**13.** $6x^5 + 40x^3 + 50x$ **15.** $16 + 4/\sqrt{x}$
**17.** $192u^2$ **19.** $-1/r^2 - 2/r^3 - 3/r^4 - 4/r^5$
**21.** $y = 6x + 3$ **23.** $y = \frac{1}{4}x + 5$
**25.** $(4, -11)$ **27.** $(3, -25), (-1, 7)$

**29.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$ **31.** $x = 4$

**33.** $-2$ **35.** $32$

**37.** $60/x^4$ **39.** $1\,440x^2 + 120x$

**41.** $(-4, \infty), (-\infty, -4)$ **43.** $(-4, 48)$

**45.** $(1, \infty), (-\infty, 1)$ **49.** $(2, 8)$

**51.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{16}\right)$ **53.** $y = -7x$

**55.** $S = 4\pi r^2$ **57.** $-15$ N

## Problemas 4.4

**1.** $5x^4 - 9x^2 + 4x - 28$ **3.** $8x^{-7/3} - 4x^{-5/6} + 12^{1/2}$

**5.** $-20x/(x^2 + 1)^2$ **7.** $-17/(5 - 2x)^2$

**9.** $72x - 12$ **11.** $(2x^5 + x^2 - 40x - 12)/x^4$

**13.** $(x^2 + 2x)/(2x^2 + x + 1)^2$ **15.** $18x^2 + 22x + 6$

**17.** $(6x^2 + 8x - 3)/(3x + 2)^2$

**19.** $(2x^3 + 8x^2 - 6x - 8)/(x + 3)^2$

**21.** $y = -4x + 1$ **23.** $y = 7x - 1$

**25.** $(0, 24), (\sqrt{5}, -1), (-\sqrt{5}, -1)$

**27.** $(0, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)$ **29.** $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(-5, \frac{1}{2}\right)$

**31.** $(-4, 0), (-6, 2)$ **33.** $k = -21$

**35.** $-28$ **37.** $\frac{11}{3}$

**39.** $-30$ **41.** $\frac{13}{2}$

**43.** $(x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x))/x^3$

**45.** $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$; $f'(x) < 0$ en $(1, 2) \cup (2, \infty)$

**47.** $f'(x) > 0$ en $\left(-\infty, \frac{5}{8}\right)$; $f'(x) < 0$ en $\left(\frac{5}{8}, \infty\right)$

**49.** $-16\,km_1m_2$ **51.** $-\dfrac{RT}{(V - b)^2} + \dfrac{2a}{V^3}$

## Problemas 4.5

**1.** $2x + \operatorname{sen} x$ **3.** $7\cos x - \sec^2 x$

**5.** $x\cos x + \operatorname{sen} x$ **7.** $(x^3 - 2)\sec^2 x + 3x^2 \tan x$

**9.** $x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x + \sec^2 x$

**11.** $0$ **13.** $\cos x$

**15.** $\dfrac{-x\csc^2 x - \csc^2 x - \cot x}{(x + 1)^2}$ **17.** $\dfrac{-2x^2 \sec^2 x + 4x\tan x + 2x}{(1 + 2\tan x)^2}$

**19.** $\dfrac{1}{1 + \cos x}$

**21.** $x^4 \operatorname{sen} x \sec^2 x + x^4 \operatorname{sen} x + 4x^3 \operatorname{sen} x \tan x$

**23.** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$ **25.** $y = \frac{2}{3}x + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{9}$

**27.** $\pi/6, 5\pi/6$ **29.** $\pi/2$

**31.** $y = 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{8\pi}{3}$ **33.** $y = x - 2\pi$

**35.** $2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\cos 2x$ **37.** $2\cos x - x\operatorname{sen} x$

**39.** $\dfrac{-x^2 \operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x}{x^3}$

**41.** $\csc x \cot^2 x + \csc^3 x$

**45.** $-\frac{160}{3}$; cuando el ángulo de elevación aumenta, la longitud $s$ de la sombra decrece

**53.** no diferenciable en $0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$

**55.** ***b)*** $-\dfrac{14(0.2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(0.2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2}$ ***c)*** 0.1974 radián

***d)*** 13.7281 aproximadamente

***e)*** el esfuerzo mínimo requerido para jalar el trineo es alrededor de 13.73 lb cuando $\theta$ es aproximadamente 0.1974 radián u 11.31°.

## Problemas 4.6

**1.** $-150(-3x)^{29}$ **3.** $200(2x^2 + x)^{199}(4x + 1)$

**5.** $-4(x^3 - 2x^2 + 7)^{-5}(3x^2 - 2x)$

**7.** $-2(3x - 1)^3(-2x + 9)^4(27x - 59)$

**9.** $\dfrac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ **11.** $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + 1)^{3/2}}$

**13.** $10(1 + 6x(x^2 - 4)^2)(x + (x^2 - 4)^3)^9$

**15.** $\dfrac{5x^{14} + 9x^{13} + 13x^{12}}{(x^2 + x + 1)^5}$ **17.** $\pi\cos(\pi x + 1)$

**19.** $15\operatorname{sen}^2 5x\cos 5x$ **21.** $-3x^5 \operatorname{sen} x^3 + 3x^2 \cos x^3$

**23.** $10(2 + x\operatorname{sen} 3x)^9(3x\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$

**25.** $-x^{-2}\sec^2(1/x)$

**27.** $-3\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x + 2\cos 2x\cos 3x$

**29.** $5(\sec 4x + \tan 2x)^4(4\sec 4x\tan 4x + 2\sec^2 2x)$

**31.** $2\cos 2x\cos(\operatorname{sen} 2x)$

**33.** $-(2x + 5)^{-1/2}\cos\sqrt{2x + 5}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\sqrt{2x + 5})$

**35.** $24x\operatorname{sen}^2(4x^2 - 1)\cos(4x^2 - 1)$

**37.** $360x^2(1 + x^3)^3(1 + (1 + x^3)^4)^4(1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^5$

**39.** $-54$ **41.** $-7$

**43.** $y = -8x - 3$ **45.** $y = 6x - 1 - \dfrac{3\pi}{2}$

**47.** $y = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{12}{\pi(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

**49.** $-\pi^3\cos\pi x$ **51.** $-125x\cos 5x - 75\operatorname{sen} 5x$

**53.** $(\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/16), (-\sqrt{3}/3, -3\sqrt{3}/16)$; no

**55.** $\dfrac{1}{18}$

**57.** Si $0 \le \theta \le \pi$, entonces $\theta = \pi/4$ o $\theta = 3\pi/4$.

**59.** $dr/dt = 5/(8\pi)$ pulg/min

## Problemas 4.7

**1.** $4x^2y^3\dfrac{dy}{dx} + 2xy^4$ **3.** $-2y\operatorname{sen} y^2\dfrac{dy}{dx}$

**5.** $\dfrac{1}{2y - 2}$ **7.** $\dfrac{2x - y^2}{2xy}$

**9.** $\dfrac{2x}{3 - \operatorname{sen} y}$ **11.** $\dfrac{4x - 3x^2y^2}{2x^3y - 2y}$

**13.** $\dfrac{x^2 - 4x(x^2 + y^2)^5}{y^2 + 4y(x^2 + y^2)^5}$ **15.** $\dfrac{2x^4y^4 + 3y^{10} - 6x^9y}{6xy^9 - 3x^{10}}$

**17.** $\dfrac{1 - x}{y + 4}$ **19.** $\dfrac{3}{2y(x + 2)^2}$

**21.** $\dfrac{\cos(x + y) - y}{x - \cos(x + y)}$ **23.** $\cos y\cot y$

**25.** $\dfrac{\cos 2\theta}{r}$ **27.** $-\dfrac{2}{5}$

**29.** $-\dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{2}{3}$ **31.** $y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}$

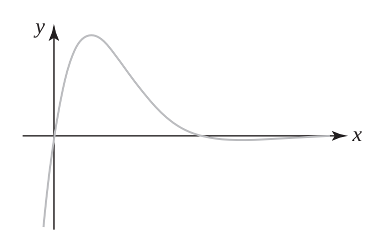
**33.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
**35.** $(1, 2), (-1, -2)$
**37.** $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$
**39.** $(8, 4)$
**41.** $\dfrac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
**43.** $\dfrac{-25}{y^3}$
**45.** $\dfrac{-\operatorname{sen} y}{(1 - \cos y)^3}$
**47.** $\dfrac{-2}{(y - x)^3}$
**49.** $\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}, -\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$
**51.** $\dfrac{-2x - 3}{x^4}$
**53.** $y = 1 - \sqrt{x - 2}$
**55.** $y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 \le x < 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$
**57.** $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$
**59.** *a)* $y = -x + 3$ *b)* $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$
**65.** *b)* $\dfrac{4(252 - x^2)}{(x^2 + 252)^2 + 16x^2}$ *c)* $x = 6\sqrt{7} \approx 15.87$ pies

## Problemas 4.8

**1.** $f'(x) > 0$ para toda $x$ muestra que $f$ es creciente en $(-\infty, \infty)$. Así $f$ es uno a uno.
**3.** $f(0) = 0, f(1) = 0$ implica que $f$ no es uno a uno
**5.** $\frac{2}{3}$
**7.** $(f^{-1})'(x) = -1/(x - 2)^2$
**9.** $(5, 3)$; $y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$
**11.** $(8, 1)$; $y = \frac{1}{60}x + \frac{13}{15}$
**13.** $\dfrac{5}{\sqrt{1 - (5x - 1)^2}}$
**15.** $\dfrac{-8}{4 + x^2}$
**17.** $\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
**19.** $\dfrac{2(\cos^{-1} 2x + \operatorname{sen}^{-1} 2x)}{\sqrt{1 - 4x^2}(\cos^{-1} 2x)^2}$
**21.** $\dfrac{-2x}{(1 + x^4)(\tan^{-1} x^2)^2}$
**23.** $\dfrac{2 - x}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos^{-1} x$
**25.** $3\left(x^2 - 9\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right)^2\left(2x - \dfrac{27}{9 + x^2}\right)$
**27.** $\dfrac{1}{t^2 + 1}$
**29.** $\dfrac{-4 \operatorname{sen} 4x}{|\operatorname{sen} 4x|}$
**31.** $\dfrac{2x \sec^2(\operatorname{sen}^{-1} x^2)}{\sqrt{1 - x^4}}$
**33.** $\dfrac{2x(1 + y^2)}{1 - 2y - 2y^3}$
**35.** $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x =$ constante
**37.** $\sqrt{3}/3$
**39.** $y = \dfrac{2 + \pi}{4}x - \dfrac{1}{2}$
**41.** $(5\pi/6, 4), (7\pi/6, 6)$

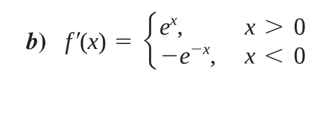
## Problemas 4.9

**1.** $-e^{-x}$
**3.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
**5.** $5^{2x}(2 \ln 5)$
**7.** $x^2e^{4x}(3 + 4x)$
**9.** $\dfrac{-e^{-2x}(2x + 1)}{x^2}$
**11.** $-\frac{5}{2}(1 + e^{-5x})^{-1/2}e^{-5x}$
**13.** $-\dfrac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{(e^{x/2} + e^{-x/2})^2}$
**15.** $8e^{8x}$
**17.** $3e^{3x-3}$
**19.** $\frac{1}{3}x^{-2/3}e^{x^{1/3}} + \frac{1}{3}e^{x/3}$
**21.** $\sec^2 e^x - e^{-x} \tan e^x$
**23.** $\dfrac{e^{x\sqrt{x^2+1}}(2x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
**25.** $2xe^{x^2}e^{e^{x^2}}$
**27.** $y = 4x + 4$
**29.** $(\ln 3, 3)$
**31.** $x = \pi/4 + n\pi, n = 0, \pm 1, 2, \ldots$



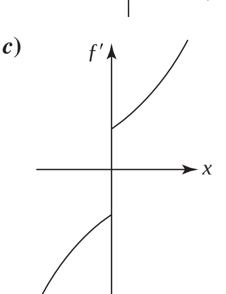

**33.** $4e^{x^2}(2x^3 + 3x)$
**35.** $4e^{2x}\cos e^{2x} - 4e^{4x}\operatorname{sen} e^{2x}$
**41.** $\dfrac{e^{x+y}}{1 - e^{x+y}}$
**43.** $\dfrac{-ye^{xy}\operatorname{sen} e^{xy}}{1 + xe^{xy}\operatorname{sen} e^{xy}}$
**45.** $\dfrac{-y^2 + ye^{x/y}}{2y^3 + xe^{x/y}}$
**47.** *a)*

*b)*



$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

*c)*




*d)* no

**49.** *b)* $P = 0, P = 2$ *c)* *d)* $t = 0$
**61.** $f'(0) = 0$

## Problemas 4.10

**1.** $\dfrac{10}{x}$
**3.** $\dfrac{1}{2x}$
**5.** $\dfrac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 1}$
**7.** $3x + 6x \ln x$
**9.** $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$
**11.** $\dfrac{1}{x(x + 1)}$
**13.** $\tan x$
**15.** $\dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$
**17.** $\dfrac{1 + \ln x}{x \ln x}$
**19.** $\dfrac{1}{4x\sqrt{\ln\sqrt{x}}}$
**21.** $\dfrac{2}{t} + \dfrac{2t}{t^2 + 2}$
**23.** $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x + 3}$
**25.** $y = x - 1$
**27.** $4$
**29.** $-8$
**31.** $(e, e^{-1})$
**33.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
**35.** $\sec x$

**37.** $\dfrac{2}{x^3}$ **39.** $\dfrac{2-2\ln|x|}{x^2}$

**43.** $\dfrac{y}{2xy^2-x}$ **45.** $\dfrac{y-xy}{2xy^2+x}$

**47.** $\dfrac{2x-x^2y-y^3}{x^3+xy^2-2y}$ **49.** $x^{\operatorname{sen} x}\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+(\cos x)\ln x\right]$

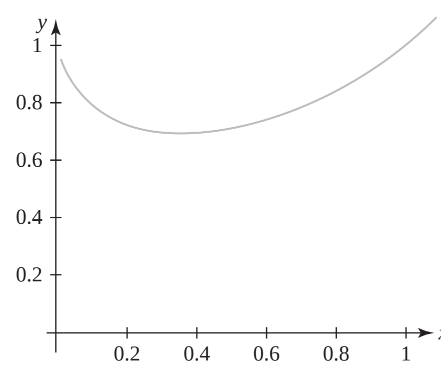
**51.** $x(x-1)^x\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}+\ln(x-1)\right]$

**53.** $\dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3}\left[\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{3/2}{3x+2}-\dfrac{4}{4x+3}\right]$

**55.** $\dfrac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}\left[\dfrac{15x^2}{x^3-1}+\dfrac{16x^3+36x^2}{x^4+3x^3}-\dfrac{63}{7x+5}\right]$

**57.** $y=3x-2$

**59.** $(e^{-1}, e^{-e^{-1}})$;




**65.** *b*) un intervalo es $(\pi, 2\pi)$ **67.** $4-4\ln 4\approx -1.55$

## Problemas 4.11

**1.** $\cosh x=\sqrt{5}/2$, $\tanh x=-\sqrt{5}/5$, $\coth x=-\sqrt{5}$, $\operatorname{sech} x=2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{csch} x=-2$

**3.** $10\operatorname{senh} 10x$ **5.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}$

**7.** $-6(3x-1)\operatorname{sech}(3x-1)^2\tanh(3x-1)^2$

**9.** $-3\operatorname{senh} 3x\operatorname{csch}^2(\cosh 3x)$

**11.** $3\operatorname{senh} 2x\operatorname{senh} 3x+2\cosh 2x\cosh 3x$

**13.** $2x^2\operatorname{senh} x^2+\cosh x^2$ **15.** $3\operatorname{senh}^2 x\cosh x$

**17.** $\frac{2}{3}(x-\cosh x)^{-1/3}(1-\operatorname{senh} x)$ **19.** $4\tanh 4x$

**21.** $\dfrac{e^x+1}{(1+\cosh x)^2}$ **23.** $e^{\operatorname{senh} t}\cosh t$

**25.** $\dfrac{\cos t+\cos t\operatorname{senh} 2t-2\operatorname{sen} t\cosh 2t}{(1+\operatorname{senh} 2t)^2}$

**27.** $y=3x$

**29.** $(0,-2)$, $(-2, 2\cosh 2-4\operatorname{senh} 2)$, $(2, 2\cosh 2-4\operatorname{senh} 2)$

**31.** $-2\operatorname{sech}^2 x\tanh x$ **35.** $\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$

**37.** $\dfrac{-2x}{1-(1-x^2)^2}$ **39.** $\sec x$

**41.** $\dfrac{3x^3}{\sqrt{x^6+1}}+\operatorname{senh}^{-1}x^3$ **43.** $-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\operatorname{sech}^{-1}x}{x^2}$

**45.** $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1}x}$ **47.** $\dfrac{3}{\sqrt{\cosh^{-1}6x}\sqrt{36x^2-1}}$

**49.** (**b**) $v_{\text{ter}}=\sqrt{mg/k}$ *c*) 56 m/s

## Competencia final de la unidad 4

**A. 1.** falso **3.** falso

**5.** verdadero **7.** verdadero

**9.** verdadero **11.** verdadero

**13.** falso **15.** verdadero

**17.** falso **19.** verdadero

**B. 1.** 0 **3.** $-\frac{1}{4}$

**5.** $y=-\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$ **7.** $-3$

**9.** 23

**11.** $-16F'(\operatorname{sen} 4x)\operatorname{sen} 4x+16F''(\operatorname{sen} 4x)\cos^2 x$

**13.** $a=6$; $b=-9$ **15.** $(1, 5)$

**17.** $\dfrac{1}{x(\ln 10)}$ **19.** catenaria

**C. 1.** $0.08x^{-0.9}$

**3.** $10(t+\sqrt{t^2+1})^9(1+t(t^2+1)^{-1/2})$

**5.** $x^2(x^4+16)^{1/4}(x^3+8)^{-2/3}+x^3(x^4+16)^{-3/4}(x^3+8)^{1/3}$

**7.** $-\dfrac{16x\operatorname{sen} 4x+4\operatorname{sen} 4x+4\cos 4x}{(4x+1)^2}$

**9.** $10x^3\operatorname{sen} 5x\cos 5x+3x^2\operatorname{sen}^2 5x$

**11.** $\dfrac{-3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$ **13.** $\dfrac{1}{(\cot^{-1}x)^2(1+x^2)}$

**15.** $\dfrac{-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ **17.** $-xe^{-x}$

**19.** $7x^6+7^x(\ln 7)+7e^{7x}$ **21.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{4x-1}$

**23.** $\dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2+1}\sqrt{1-x^2}}$

**25.** $e^{x\cosh^{-1}x}\left[\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\cosh^{-1}x+1\right]$

**27.** $3x^2e^{x^3}\cosh e^{x^3}$ **29.** $\dfrac{405}{8\sqrt{1+3x}}$

**31.** $\dfrac{120}{t^6}$ **33.** $4e^{\operatorname{sen} 2x}(\cos^2 2x-\operatorname{sen} 2x)$

**35.** $\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{10}{x+8}-\dfrac{2}{6x+4}$

**37.** $\dfrac{1}{4}$ **39.** $\dfrac{e^x-y^2}{2xy+e^y}$

**41.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{27}$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{27}$ **43.** $y=6x-9$, $y=-6x-9$

**45.** $(4, 2)$ **47.** $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 2\pi$

**53.** *a*) $(2, 0)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ *b*) $4, -2, -2$

**55.** $y=\sqrt{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

## Problemas 5.1

**1.** $-1, 19$; $-2, 18$; $2, 18$; $8, 8$

**3.** $18, 6$; $-23, 1$; $23, 1$; $18, -6$

**5.** $-\frac{15}{4}, 0$; $17, 2$; $17, 2$; $-128, -2$

RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES, UNIDAD 5

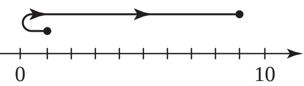
**7.** $1, \frac{1}{2}$; $1 - \pi, 1$; $\pi - 1, 1$; $0, \pi^2$

**9.** *a*) $-6, 6$ *b*) $-8, 8$

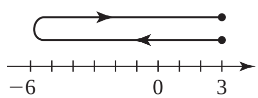
**11.** *a*) $-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ *b*) $15$ *c*) $-4, 8$

**13.** reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-\infty, -3)$, $(0, 3)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(-3, 0)$, $(3, \infty)$

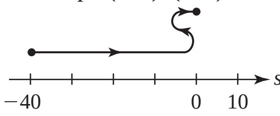
**15.** $v(t) = 2t$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 0)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(0, 3)$;



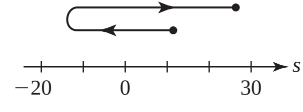

**17.** $v(t) = 2t - 4$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 2)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(2, 5)$;



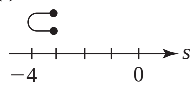

**19.** $v(t) = 6t^2 - 12t$, $a(t) = 12t - 12$; reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-2, 0)$, $(1, 2)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(0, 1)$, $(2, 3)$;



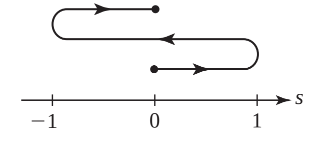

**21.** $v(t) = 12t^3 - 24t^2$, $a(t) = 36t^2 - 48t$;



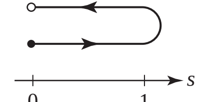

**23.** $v(t) = 1 - 2t^{-1/2}$, $a(t) = t^{-3/2}$;




**25.** $v(t) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$, $a(t) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$;




**27.** $v(t) = e^{-t}(-t^3 + 3t^2)$, $a(t) = e^{-t}(t^3 - 6t^2 + 6t)$;




**29.**

| | |
|---|---|
| positiva | negativa |
| cero | cero |
| positiva | positiva |
| positiva | negativa |
| negativa | negativa |
| negativa | positiva |

frenándose en los intervalos de tiempo $(a, b)$, $(d, e)$, $(f, g)$; aumentando la velocidad en los intervalos de tiempo $(c, d)$, $(e, f)$

**31.** *a*) $v > 0$ en $\left[0, \frac{3}{2}\right)$, $v < 0$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}(6 + \sqrt{42})\right]$
*b*) 42 pies

**33.** $64\sqrt{2}$ pies/s; 16 pies/s$^2$

**35.** $-8\sqrt{\pi}$ pies/s; la coordenada $y$ es decreciente

## Problemas 5.2

**1.** *a*) máx. abs. $f(2) = -2$, mín. abs. $f(-1) = -5$
*b*) máx. abs. $f(7) = 3$, mín. abs. $f(3) = -1$
*c*) no extrema
*d*) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(1) = -3$

**3.** *a*) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(2) = -4$
*b*) máx. abs. $f(1) = f(3) = -3$, mín. abs. $f(2) = -4$
*c*) mín. abs. $f(2) = -4$
*d*) máx. abs. $f(5) = 5$

**5.** *a*) no extrema
*b*) máx. abs. $f(\pi/4) = 1$, mín. abs. $f(-\pi/4) = -1$
*c*) máx. abs. $f(\pi/3) = \sqrt{3}$, mín. abs. $f(0) = 0$
*d*) no extrema

**7.** $\frac{3}{2}$

**9.** $-1, 6$

**11.** $\frac{4}{3}, 2$

**13.** 1

**15.** $\frac{3}{4}$

**17.** $-2, -\frac{11}{7}, 1$

**19.** $2n\pi$, $n$ un entero

**21.** 2

**23.** máx. abs. $f(3) = 9$, mín. abs. $f(1) = 5$

**25.** máx. abs. $f(8) = 4$, mín. abs. $f(0) = 0$

**27.** máx. abs. $f(0) = 2$, mín. abs. $f(-3) = -79$

**29.** máx. abs. $f(3) = 8$, mín. abs. $f(-4) = -125$

**31.** máx. abs. $f(2) = 16$, mín. abs. $f(0) = f(1) = 0$

**33.** máx. abs. $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = f(7\pi/6) = f(11\pi/6) = \frac{3}{2}$, mín. abs. $f(\pi/2) = f(3\pi/2) = -3$

**35.** máx. abs. $f(\pi/8) = f(3\pi/8) = f(5\pi/8) = f(7\pi/8) = 5$, mín. abs. $f(0) = f(\pi/4) = f(\pi/2) = f(3\pi/4) = f(\pi) = 3$

**37.** punto extremo máx. abs. $f(3) = 3$, máx. rel. $f(0) = 0$, mín. abs. $f(-1) = f(1) = -1$

**39.** *a*) $c_1, c_3, c_4, c_{10}$
*b*) $c_2, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$
*c*) mín. abs. $f(c_7)$, punto extremo máx. abs. $f(b)$
*d*) máx. rel. $f(c_3)$, $f(c_5)$, $f(c_9)$, mín. rel. $f(c_2)$, $f(c_4)$, $f(c_7)$, $f(c_{10})$

**41.** *a*) $s(t) \geq 0$ sólo para $0 \leq t \leq 20$ *b*) $s(10) = 1\,600$

**53.** *b*) $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$
*c*) máx. abs. $f(\pi) = 3$, mín. abs. $f(\pi/3) = f(5\pi/3) = -\frac{3}{2}$

## Problemas 5.3

**1.** $c = 0$

**3.** $f(-3) = 0$ pero $f(-2) \neq f(-3)$

**5.** $c = -\frac{2}{3}$

**7.** $c = -\pi/2, \pi/2$, o $3\pi/2$

**9.** $f$ no es diferenciable sobre el intervalo

**11.** $f(a) \neq 0$ y $f(b) = 0$, así, $f(a) \neq f(b)$

**13.** $c = 3$

**15.** $c = \sqrt{13}$

**17.** $f$ no es continua sobre el intervalo

**19.** $c = \frac{9}{4}$

**21.** $c = 1 - \sqrt{6}$

**23.** $f$ no es continua sobre $[a, b]$

**25.** $f$ creciente en $[0, \infty)$; $f$ decreciente en $(-\infty, 0]$

**27.** $f$ creciente en $[-3, \infty)$; $f$ decreciente en $(-\infty, -3]$

**29.** $f$ creciente en $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$; $f$ decreciente en $[0, 2]$

**31.** $f$ creciente en $[3, \infty)$; $f$ decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$

**33.** $f$ decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$

**35.** $f$ creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$; $f$ decreciente en $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

**37.** $f$ creciente en $[-2, 2]$; $f$ decreciente en $[-2\sqrt{2}, -2]$ y $[2, 2\sqrt{2}]$

**39.** $f$ creciente en $(-\infty, 0]$; $f$ decreciente en $[0, \infty)$

**41.** $f$ creciente en $(-\infty, 1]$ y $[3, \infty)$; $f$ decreciente en $[1, 3]$

**43.** $f$ creciente en $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$; $f$ decreciente en $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi]$, donde $n$ es un entero

**45.** $f$ creciente en $[0, \infty)$; $f$ decreciente en $(-\infty, 0]$

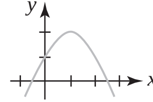
**47.** $f$ es creciente en $(-\infty, \infty)$

**49.** si el motociclista viaja a la velocidad límite, no habrá recorrido más de 65 mi

**61.** $c \approx 0.3451$ radianes

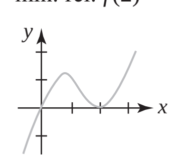
## Problemas 5.4

**1.** máx. rel. $f(1) = 2$;

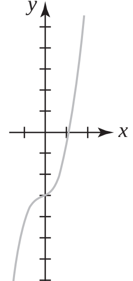


**3.** máx. rel. $f(-1) = 2$, mín. rel. $f(1) = -2$;

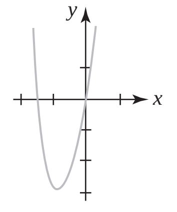
**5.** máx. rel. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mín. rel. $f(2) = 0$;



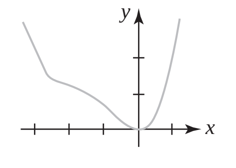
**7.** sin extremos;



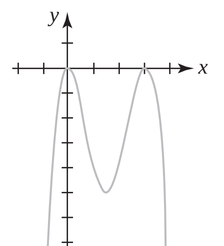
**9.** mín. rel. $f(-1) = -3$;



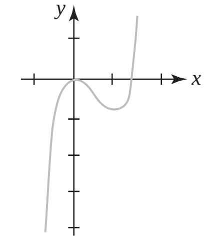
**11.** mín. rel. $f(0) = 0$;



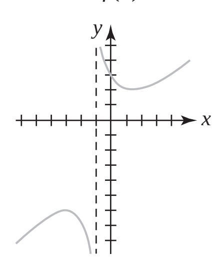
**13.** máx. rel. $f(0) = f(3) = 0$, mín. rel. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{81}{16}$;



**15.** máx. rel. $f(0) = 0$, mín. rel. $f(1) = -1$;

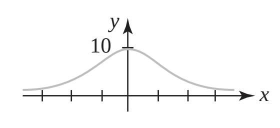


**17.** máx. rel. $f(-3) = -6$, mín. rel. $f(1) = 2$;



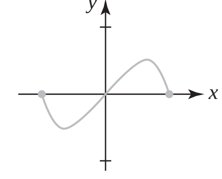
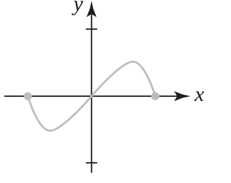
**19.** máx. rel. $f(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, mín. rel. $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$;

**21.** máx. rel. $f(0) = 10$;



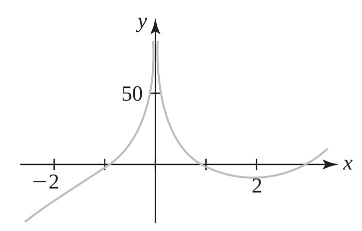

**23.** máx. rel. $f(0) = \sqrt[3]{16}$, mín. rel. $f(-2) = f(2) = 0$;

**25.** máx. rel. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, mín. rel. $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;

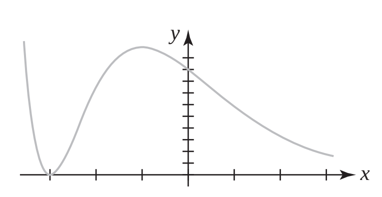



**27.** máx. rel. $f(-8) = 16$, mín. rel. $f(8) = -16$;

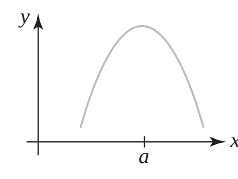
**29.** mín. rel. $f(2) \approx -8.64$;



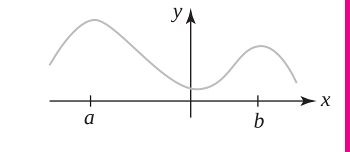

**31.** mín. rel. $f(-3) = 0$, máx. rel. $f(-1) = 4e$;



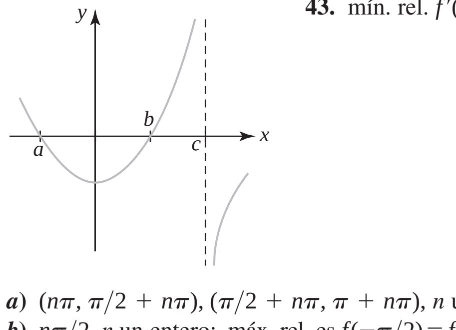
**33.**




**35.**



**37.**

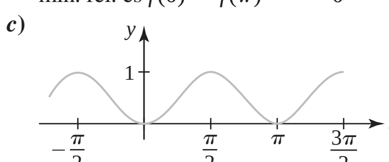



**43.** mín. rel. $f'(-2) = -13$

**45.** ***a***) $(n\pi, \pi/2 + n\pi)$, $(\pi/2 + n\pi, \pi + n\pi)$, $n$ un entero

***b***) $n\pi/2$, $n$ un entero; máx. rel. es $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \cdots 1$, mín. rel. es $f(0) = f(\pi) = \cdots 0$

***c***)




## Problemas 5.5

**1.** cóncava hacia abajo en $(-\infty, \infty)$

**3** cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$; cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$

**5.** cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(2, 4)$

**7.** cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$

**9.** cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$

**11.** cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$

**13.** respuestas aproximadas: $f'$ creciente en $(-2, 2)$; $f'$ decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$

**15.** respuestas aproximadas: $f'$ creciente en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$; $f'$ decreciente en $(-1, 3)$

**19.** $(-\sqrt{2}, -21 - \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -21 + \sqrt{2})$

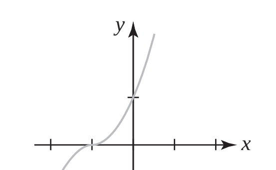
**21.** $(n\pi, 0)$, $n$ un entero

**23.** $(n\pi, n\pi)$, $n$ un entero

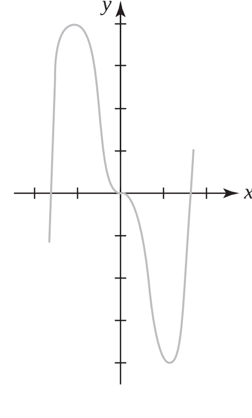
**25.** $(2, 2 + 2e^{-2})$

**27.** máx. rel. $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$;

**29.** punto de inflexión: $(-1, 0)$;

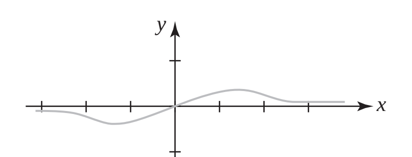



**31.** máx. rel. $f(-1) = 4$, mín. rel. $f(1) = -4$; puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$;

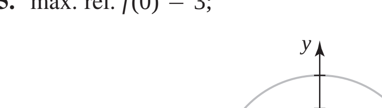



**33.** máx. rel. $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, mín. rel. $f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

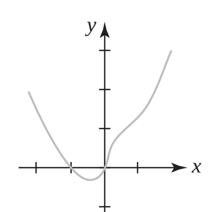
puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$, $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$;



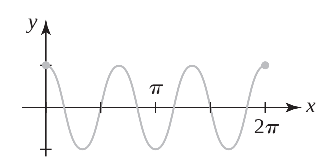

**35.** máx. rel. $f(0) = 3$;



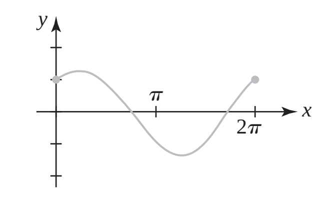

**37.** mín. rel. $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -3/4^{4/3}$;
puntos de inflexión: $(0, 0)$, $(1/2, 3/2^{4/3})$;



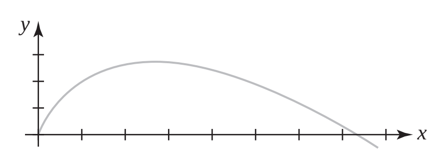

**39.** máx. rel. $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = 1$,
mín. rel. $f(\pi/3) = f(\pi) = f(5\pi/3) = -1$;
puntos de inflexión: $(\pi/6, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(5\pi/6, 0)$, $(7\pi/6, 0)$, $(9\pi/6, 0)$, $(11\pi/6, 0)$;




**41.** máx. rel. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, máx. rel. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$;
puntos de inflexión: $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$;



**43.** máx. rel. $f(e) = e$;




**45.** máx. rel. $f(\pi/4) = \frac{1}{2}$ **47.** mín. rel. $f(\pi) = 0$

## Problemas 5.6

**1.** $\dfrac{dV}{dt} = 3x^2\dfrac{dx}{dt}$ **3.** $8\sqrt{3}$ cm²/h

**5.** $\dfrac{4}{3}$ pulg/h **7.** $\dfrac{dx}{dt} = s\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta\dfrac{ds}{dt}$

**9.** $-6$ o 6 **11.** $\dfrac{4}{9}$ cm²/h

**13.** *a)* 1 pie/s *b)* 4 pies/s

**15.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pies/min **19.** 17 nudos

**21.** $-\dfrac{5}{4}$ pies/s **23.** 15 rad/h

**25.** $-360$ mi/h **27.** $\dfrac{8\pi}{9}$ km/min

**29.** *a)* $500\sqrt{3}$ mi/h *b)* 500 mi/h

**31.** $\dfrac{5}{32\pi}$ m/min

**33.** *a)* $-\dfrac{1}{4\pi}$ pie/min *b)* $-\dfrac{1}{12\pi}$ pie/min
*c)* aproximadamente $-0.0124$ pie/min

**35.** *a)* $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ pie/min *c)* $\dfrac{165\sqrt{3}}{4} \approx 71.45$ min; 0.035 pie/min

**39.** $-\dfrac{1}{3}$ pulg²/min **41.** 668.7 pies/min

**43.** $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{R^2}{R_1^2}\dfrac{dR_1}{dt} + \dfrac{R^2}{R_2^2}\dfrac{dR_2}{dt}$

**45.** *a)* aumenta *b)* aproximadamente 2.8% por día

**47.** *a)* 24 000 kg km/h² *b)* 2 023 100 kg km/h²

## Problemas 5.7

**1.** 30 y 30 **3.** $\dfrac{1}{2}$

**5.** $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$ **7.** $(2, 2\sqrt{3}), (2, -2\sqrt{3})$; $(0, 0)$

**9.** $\left(\frac{4}{3}, -\frac{128}{27}\right)$ **11.** base $\frac{3}{2}$, altura 1

**13.** (4, 0) y (0, 8) **15.** 750 pies por 750 pies

**17.** 2 000 m por 1 000 m

**19.** el jardín debe ser rectangular con 40 pies de largo y 20 pies de ancho

**21.** base 40 cm por 40 cm, altura 20 cm

**23.** base $\frac{80}{3}$ cm por $\frac{80}{3}$ cm, altura $\frac{20}{3}$ cm; máx. vol. $\frac{128\,000}{27}$ cm³

**25.** altura $\frac{15}{2}$ cm, ancho 15 cm

**27.** 10 pies del poste de la bandera al lado derecho

**29.** radio de la porción circular $10/(4 + \pi)$ m, ancho $20/(4+\pi)$ m, altura de la porción rectangular $10/(4 + \pi)$ m

**31.** $L \approx 20.81$ pies **33.** radios 16/3, altura 4

**35.** radios $\sqrt[3]{16/\pi}$, altura $2\sqrt[3]{16/\pi}$

**37.** volar al punto 17.75 km desde el nido

**39.** costo mínimo cuando $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

**41.** $r = \sqrt[3]{9}$, $h = 2\sqrt[3]{9}$

**43.** longitud mínima cuando $x = 6.375$ pulg

**45.** cuadrado con longitud de lado $(a + b)/\sqrt{2}$

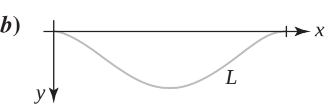
**47.** longitud de la sección transversal $\sqrt{3}d/3$, ancho de la sección transversal $\sqrt{6}d/3$

**49.** $\frac{50}{11}$ m del foco con iluminancia $I_1$

**53.** $-\dfrac{1}{8}$

**55.** *a)* $w_0L^4/384EI$

*b)*




**65.** Debe nadar del punto *A* al punto *B* alrededor de 3.18 millas desde el punto en la playa más cercano a *A*, y después seguir directamente a *C*.

**67.** *a)* $L = x + 2\sqrt{4 + (4 - x)^2}$

*c)* $x = 4 - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

*d)* $L = x + \sqrt{1 + (4 - x)^2} + \sqrt{4 + (4 - x)^2}$

*f)* $x \approx 3.1955$

## Problemas 5.8

**1.** $L(x) = 3 + \dfrac{1}{6}(x - 9)$ **3.** $L(x) = 1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**5.** $L(x) = x - 1$ **7.** $L(x) = 2 + \dfrac{1}{4}(x - 3)$

**17.** 0.98 **19.** 11.6

**21.** 0.7 **23.** 0.96

**25.** 16 **27.** 0.325

**29.** 0.4 **31.** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{120} \approx 0.5453$

**33.** $L(x) = 4 + 2(x - 1)$; 4.08

**35.** $\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2x\,dx$

**37.** $\Delta y = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2(x + 1)\,dx$

**39.** $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$; $dy = -\dfrac{1}{x^2}dx$

**41.** $\Delta y = \cos x \operatorname{sen}\Delta x + \operatorname{sen} x(\cos\Delta x - 1)$; $dy = \cos x\,dx$

**43.**

| $x$ | $\Delta x$ | $\Delta y$ | $dy$ | $\Delta y - dy$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 25 | 20 | 5 |
| 2 | 0.5 | 11.25 | 10 | 1.25 |
| 2 | 0.1 | 2.05 | 2 | 0.05 |
| 2 | 0.01 | 0.2005 | 0.2 | 0.0005 |

**45.** *a)* 1.11 *b)* $-2.9$ **47.** *a)* $9\pi$ cm² *b)* $8\pi$ cm²

**49.** el volumen exacto es $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3)$; el volumen aproximado es $dV = 4\pi r^2 t$, donde $t = \Delta r$; $(0.1024)\pi$ pulg³

**51.** $\pm 6$ cm²; $\pm 0.06$; $\pm 6\%$ **55.** 2 048 pies; 160 pies

**57.** ***a***) mínimo en el ecuador ($\theta = 0°$); máximo en el polo norte ($\theta = 90°$ N)
***b***) 981.9169 cm/s$^2$ ***c***) 0.07856 cm/s$^2$

**59.** 0.0102 s

## Problemas 5.9

**1.** 0 **3.** 2

**5.** $\frac{2}{3}$ **7.** 10

**9.** $-6$ **11.** $\frac{1}{2}$

**13.** $\frac{7}{5}$ **15.** $\frac{1}{6}$

**17.** no existe **19.** $\frac{1}{2}$

**21.** $2e^4$ **23.** 0

**25.** $\frac{1}{3}$ **27.** $\infty$

**29.** $-2$ **31.** $-\frac{1}{8}$

**33.** $-1$ **35.** no existe

**37.** $\frac{1}{9}$ **39.** 3

**41.** $\infty - \infty$; $-\frac{1}{2}$ **43.** $0 \cdot \infty$; 1

**45.** $0^0$; 1 **47.** $\infty - \infty$; 0

**49.** $\infty - \infty$; $\frac{1}{24}$ **51.** $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$

**53.** $\infty^0$; 1 **55.** $1^\infty$; $e^3$

**57.** $0^0$; 1 **59.** El denominador es $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$

**61.** $\infty - \infty$; $\frac{1}{5}$ **63.** $0 \cdot \infty$; 0

**65.** $0 \cdot \infty$; 1 **67.** $0 \cdot \infty$; 5

**69.** $\infty - \infty$; no existe **71.** $1^\infty$; $e^{-1/3}$

**73.** $0^0$; 1 **75.** $\frac{1}{2}$

**79.** 0

**81.** ***a***) $A(\theta) = 25\dfrac{\theta - \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta}{\theta^2}$ ***b***) 0 ***c***) $\frac{50}{3}$

**83.** ***b***) $p_1 v_1 \ln(v_2/v_1)$

## Competencia final de la unidad 5

**A.** **1.** falso **3.** falso

**5.** verdadero **7.** falso

**9.** verdadero **11.** verdadero

**13.** verdadero **15.** falso

**17.** verdadero **19.** falso

**B.** **1.** la función velocidad **3.** $y = \tan^{-1} x$

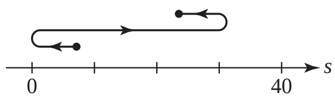
**5.** 0 **7.** 2

**9.** $2x\Delta x - \Delta x + (\Delta x)^2$

**C.** **1.** máx. abs. $f(-3) = 348$, mín. abs. $f(4) = -86$

**3.** máx. abs. $f(3) = \frac{9}{7}$, mín. abs. $f(0) = 0$

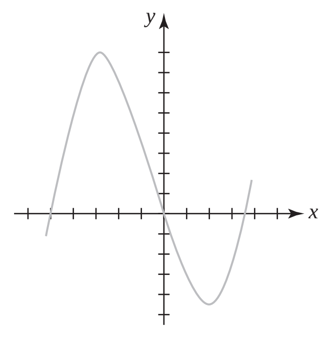
**7.** vel. máx. $v(2) = 12$, rapidez máx. $|v(-1)| = |v(5)| = 15$;




**9.** ***b***) $a, b, (a + b)/2$

**11.** máx. rel. $f(-3) = 81$, mín. rel. $f(2) = -44$;

**13.** máx. rel. $f(0) = 2$, mín. rel. $f(1) = 0$;




**15.** mín. rel. $f(0) = 0$, puntos de inflexión: $(-3, 27)$, $(-1, 11)$

**17.** punto de inflexión: (3, 10) **19.** ***c***), ***d***)

**21.** ***c***), ***d***), ***e***) **23.** ***c***)

**25.** $(a + b + c)/3$ **27.** 32 pulg$^2$/min

**31.** $y = \frac{1}{2}h$; la distancia máxima es $h$

**33.** $x = 195$ pies, $y = 390$ pies; 57 037.5 pies$^2$

**39.** $8\sqrt{3}\pi/9$ **41.** $-2$

**43.** 1 **45.** $e^{-1}$

**47.** $-\infty$

## Problemas A.1

**1.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ **3.** $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

**5.** 10, 100, 1 000, 10 000, . . . **7.** 2, 4, 12, 48, . . .

**9.** $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$

**15.** 0 **17.** 0

**19.** $\frac{1}{2}$ **21.** la sucesión diverge

**23.** la sucesión diverge **25.** 0

**27.** 0 **29.** la sucesión diverge

**31.** 0 **33.** $\frac{5}{7}$

**35.** 1 **37.** 6

**39.** 1 **41.** 1

**43.** $\ln \frac{4}{3}$ **45.** 0

**47.** $\left\{\dfrac{2n}{2n - 1}\right\}$, converge a 1

**49.** $\{(-1)^{n+1}(2n + 1)\}$, diverge **51.** $\left\{\dfrac{2}{3^{n-1}}\right\}$, converge a 0

**53.** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$ **55.** $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

**57.** 8 **59.** $a_{n+1} = \dfrac{5}{n + 1}a_n$, $a_1 = 5$

**61.** converge a 0 **63.** converge a 0

**67.** $\frac{40}{9}$ pie; $15\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pies

**69.** 15, 18, 18.6, 18.72, 18.744, 18.7488, ...

**71.** 32

## Problemas A.2

**1.** creciente **3.** no monótona

**5.** creciente **7.** no creciente

**9.** creciente **11.** no monótona

**13.** acotada y creciente **15.** acotada y creciente

**17.** acotada y decreciente **19.** acotada y decreciente

**21.** acotada y creciente **23.** acotada y decreciente

**25.** 10 **27.** 7

## Problemas A.3

**1.** $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + +\frac{9}{4} + \cdots$ **3.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots$

**5.** $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \cdots$ **7.** $2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} + \frac{128}{35} + \cdots$

**9.** $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$ **11.** 1

**13.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{15}{4}$

**17.** $\frac{2}{3}$ **19.** diverge

**21.** 9 000 **23.** diverge

**25.** $\frac{2}{9}$ **27.** $\frac{61}{99}$

**29.** $\frac{1\,313}{999}$ **31.** $\frac{17}{6}$

**43.** $-2 < x < 2$ **45.** $-2 < x < 0$

**47.** 75 pies **49.** $\frac{N_0}{1 - s}$; 1 000

**51.** 18.75 mg

## Problemas A.4

**1.** converge **3.** converge

**5.** diverge **7.** converge

**9.** converge **11.** converge

**13.** diverge **15.** converge

**17.** converge **19.** diverge

**21.** converge **23.** diverge

**25.** converge **27.** converge

**29.** converge **31.** diverge

**33.** converge

**35.** converge para $p > 1$, diverge para $p \leq 1$

## Problemas A.5

**1.** converge **3.** diverge

**5.** diverge **7.** diverge

**9.** converge **11.** converge

**13.** converge **15.** diverge

**17.** converge **19.** converge

**21.** converge **23.** converge

**25.** diverge **27.** converge

**29.** diverge **31.** diverge

**33.** converge **35.** diverge

**37.** converge **39.** diverge

## Problemas A.6

**1.** converge **3.** diverge

**5.** converge **7.** diverge

**9.** converge **11.** converge

**13.** converge **15.** diverge

**17.** converge **19.** diverge

**21.** converge **23.** converge

**25.** diverge **27.** converge

**29.** diverge **31.** converge

**33.** converge para $0 \leq p < 1$

**35.** converge para todos los valores reales de $p$

**39.** utilice la prueba del cociente

## Problemas A.7

**1.** converge **3.** diverge

**5.** converge **7.** converge

**9.** converge **11.** converge

**13.** diverge **15.** condicionalmente convergente

**17.** absolutamente convergente **19.** absolutamente convergente

**21.** absolutamente convergente **23.** divergente

**25.** condicionalmente convergente **27.** divergente

**29.** condicionalmente convergente **31.** absolutamente convergente

**33.** divergente **35.** 0.84147

**37.** 5 **39.** 0.9492

**41.** menor que $\frac{1}{101} \approx 0.009901$

**43.** la serie contiene signos algebraicos mixtos pero los signos no se alternan; converge

**45.** los signos algebraicos no se alternan; converge

**47.** $a_{k+1} \leq a_k$ no se satisface para $k$ suficientemente grande. La sucesión de las sumas parciales $\{S_{2n}\}$ es la misma que la sucesión de las sumas parciales para la serie armónica. Lo anterior implica que la serie diverge.

**49.** diverge **51.** converge

## Problemas A.8

**1.** $(-1, 1]$; 1 **3.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2}$

**5.** $[2, 4]$; 1 **7.** $(-5, 15)$; 10

**9.** $\{0\}$; 0 **11.** $\left[0, \frac{2}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$

**13.** $[-1, 1)$; 1 **15.** $(-16, 2)$; 9

**17.** $\left(-\frac{75}{32}, \frac{75}{32}\right)$; $\frac{75}{32}$ **19.** $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$

**21.** $(-\infty, \infty)$; $\infty$

**23.** $(-3, N)$; $3$

**25.** $(-\infty, \infty)$; $\infty$

**27.** $\left(-\frac{15}{4}, -\frac{9}{4}\right)$; $\frac{3}{4}$

**29.** $4$

**31.** $x > 1$ o $x < -1$

**33.** $x < -\frac{1}{2}$

**35.** $-2 < x < 2$

**37.** $x < 0$

**39.** $0 \le x < \pi/3, 2\pi/3 < x < 4\pi/3, 5\pi/3 < x \le 2\pi$

**41.** *a*) $(-\infty, \infty)$

## Problemas A.9

**1.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}$; $(-3, 3)$

**3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**5.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$; $(-1, 1)$

**7.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} x^{2k}$; $(-2, 2)$

**9.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^{k-1}$; $(-3, 3)$

**11.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k-1)2^{k-3}}{5^{k+1}} x^{k-2}$; $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

**13.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{2k-1}$; $(-1, 1)$

**15.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$; $[-1, 1]$

**17.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

**19.** $\displaystyle\ln 4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)4^{k+1}} x^{k+1}$; $(-4, 4]$

**21.** $\displaystyle 1 + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2x)^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**23.** $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1) x^k$; $(-1, 1)$

**25.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+3}$; $[-1, 1]$

**27.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

**29.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5^{k+1}} (x-6)^k$; $(1, 11)$

**31.** $\displaystyle -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+1)^{k+1}$; $(-2, 0)$

**33.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{4^k} - \frac{1}{3^k}\right] x^k$; $(-3, 3)$

**35.** $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \cdots$

**37.** $(-3, 3]$

**39.** $0.0953$

**41.** $0.4854$

**43.** $0.0088$

## Problemas A.10

**1.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$

**3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$

**5.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

**7.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

**9.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

**11.** $\displaystyle x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

**13.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}} (x-4)^k$

**15.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

**17.** $\displaystyle \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$

**19.** $\displaystyle \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$

**21.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$

**23.** $\displaystyle \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} (x-2)^k$

**25.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$

**27.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$

**29.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} x^k$

**31.** $\displaystyle 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \cdots$

**33.** $6$

**35.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

**37.** $\displaystyle 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \cdots$

**39.** $\displaystyle 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$

**43.** $\displaystyle \frac{\pi}{4}$

**45.** $-1$

**47.** $0.71934$; cuatro lugares decimales

**49.** $1.34983$; cuatro lugares decimales

**55.** *c*) $y = 7.92$ pulg *d*) $y = 7.92000021$ pulg

## Problemas A.11

**1.** $\displaystyle 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \cdots$; $1$

**3.** $\displaystyle 3 - \frac{3}{2 \cdot 9}x - \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 9^2}x^2 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3! \cdot 9^3}x^3 - \cdots$; $9$

**5.** $\displaystyle 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \cdots$; $1$

**7.** $\displaystyle 8 + \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 4}x + \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2! \cdot 4^2}x^2 - \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 \cdot 3! \cdot 4^3}x^3 + \cdots$; $4$

**9.** $\displaystyle \frac{1}{4}x - \frac{2}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 2! \cdot 2^2}x^3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 3! \cdot 2^3}x^4 + \cdots$; $2$

**11.** $\displaystyle |S_2 - S| < a_3 = \frac{1}{9}x^2$

**13.** $\displaystyle x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1}$

**17.** $\displaystyle P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

**19.** $\displaystyle \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2^4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 3}{2^6 \cdot 3!}(x-1)^3 - \cdots$

# ÍNDICE ANALÍTICO



## A



## B



## C

## D



ÍNDICE ANALÍTICO

## E



## F

## G



## H



## I



ÍNDICE ANALÍTICO

K



L



M



ÍNDICE ANALÍTICO

## N



## O



## P



## R

## S



ÍNDICE ANALÍTICO

ÍNDICE ANALÍTICO